МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Решение

Пусть $a = 2^{\lambda_1}\cdot 3^{\lambda_2}\cdot 5^{\lambda_3}\cdot A$, где $A \not\vdots 2; A \not\vdots 3; A \not\vdots 5, A \in \mathbb{N}$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{N}_0$ (натуральные числа или 0.)

Аналогично $b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}\cdot B$.
$c = 2^{\mu_1}\cdot 3^{\mu_2}\cdot 5^{\mu_3}\cdot C$.

Тогда по условию:

$$\begin{cases} \lambda_1+\beta_1 \geq 8 \\ \lambda_2+\beta_2 \geq 14 \\ \lambda_3+\beta_3 \geq 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1+\mu_1 \geq 12 \\ \beta_2+\mu_2 \geq 20 \\ \beta_3+\mu_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1+\mu_1 \geq 14 \\ \lambda_2+\mu_2 \geq 21 \\ \lambda_3+\mu_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(\lambda_1+\beta_1+\mu_1) \geq 8+12+14 = 34. \\ 2(\lambda_2+\beta_2+\mu_2) \geq 14+20+21 = 55 \\ 2(\lambda_3+\beta_3+\mu_3) \geq 12+17+39 = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\beta_1+\mu_1 \geq 17. \\ \lambda_2+\beta_2+\mu_2 \geq 27,5 \\ \lambda_3+\beta_3+\mu_3 \geq 34. \end{cases}$$

$\lambda_2, \beta_2, \mu_2 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \lambda_2+\beta_2+\mu_2 \geq 28.$

Тогда ~~AB~~ $abc = 2^{\lambda_1+\beta_1+\mu_1}\cdot 3^{\lambda_2+\beta_2+\mu_2}\cdot 5^{\lambda_3+\beta_3+\mu_3}\cdot A\cdot B\cdot C \geq$
$\geq \cancel{2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}}.$ $2^{\lambda_1+\beta_1+\mu_1}\cdot 3^{\lambda_2+\beta_2+\mu_2}\cdot 5^{\lambda_3+\beta_3} = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

Равенство достигается при $\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \beta_1 = 3 \\ \mu_1 = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 8 \\ \beta_2 = 6 \\ \mu_2 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = 22 \\ \beta_3 = 0 \\ \mu_3 = 17 \end{cases}$$

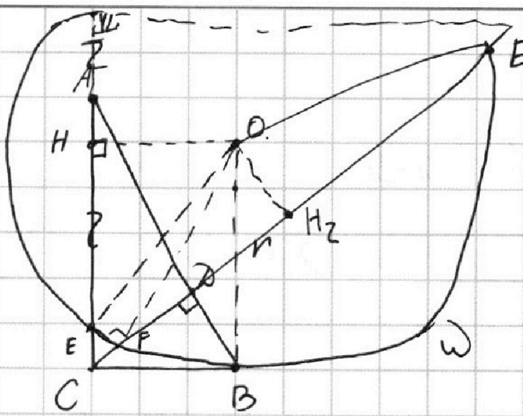
Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Решение

1) $AD:DB=5:2$.
Пусть $AD=5x$, тогда
$BD=2x$; $AB=7x$.
$AC^2=AD\cdot AB=5x\cdot 7x=35x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC=\sqrt{35}\,x$

Аналогично $BC^2=2x\cdot 7x=14x^2 \Rightarrow BC=\sqrt{14}\,x$ по св-ву прямоугольного треугольника.

~~EF~~ $CD=\sqrt{AD\cdot BD}=\sqrt{5x\cdot 2x}=\sqrt{10}\,x$ по св-ву прямоуг. треугольника.

2) $EF \parallel AD \Rightarrow \angle CFE=90^\circ$; $E\in\omega$; $F\in\omega \Rightarrow \angle EFD$ опирается на диаметр ω.

3) Пусть O-центр описанной окружности.
$E\in\omega \Rightarrow EO=r$. Пусть L точка пересечения окружности ω с AC - L. Если $OH\perp EL$, то $EH=HL$. по св-ву хорд и диаметров.

Степень т.C отн ω: $CE\cdot CL=CE\cdot(CH+HL)=$

$=CE\cdot(CE+2HE)=CE\cdot(CE+2(HC-CE))=CE(2OB-CE)=$

$=CE\cdot(2r-CE)=CB^2 \Leftrightarrow 2rCE-CE^2-CB^2=0$

$\triangle EHO$: по т. Пифагора: $(r-CE)^2+CB^2=r^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2rCE+CE^2+CB^2=0$

4) EE'-диаметр. $\Rightarrow$ по (3) $E'\in CF$. Тогда ~~Пусть CE~~ k т.к. $EF\parallel AB$, то $\triangle CEF\sim\triangle CAD$. Пусть $CE=k\cdot AC=k\cdot\sqrt{35}\,x=\sqrt{35}\,kx$
$CF=k\,CD=k\cdot\sqrt{10}\,x=\sqrt{10}\,kx$
$EF=k\,AD=k\cdot 5x=5\,kx$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Пусть $Kx = z$, тогда степень т. C:

$CE\cdot(2r-CE) = CF\cdot\left(CF+2\cdot\sqrt{r^2-(OH_2)^2}\right) = CF\cdot\left(CF+2\sqrt{r^2-\left(\frac{EF}{2}\right)^2}\right)$

$\sqrt{35}z\left(2r-\cancel{\ }\sqrt{35}z\right)=\sqrt{10}z\cdot\left(\sqrt{10}z+2\sqrt{r^2-(2{,}5z)^2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{35}r-35z = 10z+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{r^2-(2{,}5z)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{35}r-45z)=2\sqrt{10}\sqrt{r^2-(2{,}5z)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 140r^2-45^2z^2-4\cdot45\sqrt{35}rz=40(r^2-(2{,}5z)^2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100r^2-45^2z^2-4\cdot45\sqrt{35}rz=-10\cdot25z^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100r^2-2025z^2-180\sqrt{35}rz=-250z^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100r^2-180\sqrt{35}rz-\cancel{z}\,1770z^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10r^2-18\sqrt{35}rz-177z^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{r}{z}=\frac{18\sqrt{35}+2\sqrt{307\cdot15}}{20}=\frac{9\sqrt{35}+\sqrt{307\cdot15}}{10}$

$BC^2=14x^2=\sqrt{35}z\cdot\left(-\sqrt{35}z+2r\right)=$

$=\sqrt{35}\cdot(z)\left(-\sqrt{35}z+2\cdot\frac{9\sqrt{35}+\sqrt{307\cdot15}}{10}z\right)$

Значит $\sqrt{14}x=\sqrt{-35+\frac{18+5\sqrt{307\cdot21}}{10}}\,z$

Значит $K=\sqrt{\frac{14}{-35+\frac{18+5\sqrt{307\cdot21}}{10}}}$

Значит $S_{CEF}/S_{CAD}=\frac{14}{-35+\frac{18+5\sqrt{307\cdot21}}{10}}$ $\Rightarrow$

$\frac{S_{CAD}}{S_{ABC}}=\frac{\sqrt{10}x\cdot5x}{\sqrt{35}x\cdot\cancel{\sqrt{14}x}}=\frac{5\sqrt2}{7\sqrt2}=\frac57$

$\Rightarrow S_{CEF}/S_{ABC}=\frac{10}{-35+\frac{18+5\sqrt{307\cdot21}}{10}}$

Ответ: $\frac{10}{-35+\frac{18+5\sqrt{307\cdot21}}{10}}$

45×45: 225, 180, 2025; -250; 1770
18×18: 144, 18, 324; $36\times9 = 324$
324×35: 1620, 972, 11340; $1770\times4 = 7080$
$+7080$: 18420
$6140\cdot3$
$614\cdot2\cdot5\cdot3$
$307\cdot2\cdot5\cdot3$
13
137

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Решение

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$; $-\frac{\pi}{2} \le (\arcsin z) \le \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi-2x}{10} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi \Leftrightarrow -6x \le -2x \le 4x \Leftrightarrow -2\pi \le x \le 3\pi$

Если x при $[-2\pi; 0]$, то

$x_0 = x + 2\pi \in [0; 2\pi]$; $\cos(x+2\pi) = \cos x = \cos(x_0)$

$\pi - 2x = \pi - 2(x_0 - 2\pi) = 5\pi - 2x_0$.

$10\arcsin(\cos x) = 10\arcsin(\cos x_0) =$

$= \begin{cases} x_0 \in [0; 2\pi] \\ 10\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = 5\pi - 2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in [0; 2\pi]. \\ 5\pi - 10x_0 = 5\pi - 2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in [0; 2\pi] \\ x_0 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 0$

Тогда $x = x_0 - 2\pi = -2\pi$.

Если $x \in [0; 2\pi]$, то

$10\arcsin(\cos x) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, значит

$\begin{cases} x \in [0; 2\pi] \\ 5\pi - 10x = \pi - 2x \Leftrightarrow 4\pi = 8x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Если $x \in [2\pi; 3\pi]$, то $x - 2\pi \in$

(т.е $k \in \{-2; 0; 2\}$)

Пусть $k\pi \le x \le (k+1)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$; $k \vdots 2$, тогда

$\cos(x - k\pi) = \cos x$. $0 \le x - k\pi \le \pi$, тогда

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + k\pi - x$, т.е

$10 \cdot \left(\frac{1+2k}{2}\right)\pi - 10x = \pi - 2x \Leftrightarrow 8x = (10k+4)\pi \Leftrightarrow x = \frac{5k+2}{4}\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $k=-2$, то

$x = \frac{-10+2}{4}\pi = -2\pi.$

Если $k=0$, то

$x = \frac{0+2}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$

Если $k=2$, то.

$x = \frac{12}{4}\pi = 3\pi.$

$(k \in \{-1;1\})$

Если $k \not{2}$, то. $k\pi \le x \le (k+1)\pi$

$\pi \le x-(k-1)\pi \le 2\pi. \Leftrightarrow -2\pi \le (k-1)\pi - x \le -\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le (k+1)\pi - x \le \pi \Rightarrow$

$* \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \arcsin(\cos(-x)) = \arcsin(\cos((k+1)\pi - x)) =$

$= \frac{\pi}{2} + x - (k+1)\pi$

$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x - (k+1)\pi\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi + 10x - 10(k+1)\pi = \pi - 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x = (10k+11-5)\pi \Leftrightarrow x = \left(\frac{10k+11-5}{12}\right)\pi$

Если $k=-1$, то $x = \frac{+1-5}{12}\pi = -\frac{\pi}{3}$

Если $k=1$, то $x = \frac{16}{12}\pi \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\pi.$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi; 3\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Решение.

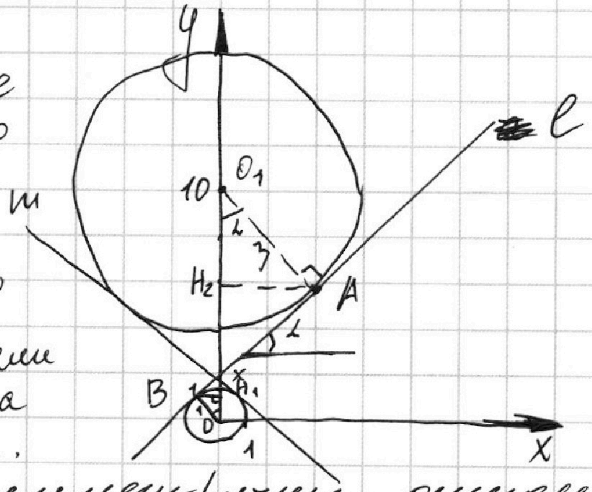
$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1. \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right.$

$x^2+y^2=1$ — график данного уравнение — окружность с ц. в т. $(0;0)$ и рад(1)

$x^2+(y-10)^2=36$ — график данного ~~функции~~ урав-нение — окружность с ц. в т. $(0;10)$ и радиусом 6.

1ым уравнением в данной системе задается невертикальная прямая. Параметр a определит угол наклона данной прямой, а параметр b — точку, через кот она будет проходить.



Чтобы прямая могла пересекать обе окружности необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициент $\frac{a}{3}$ был или больше, чем тангенс угла наклона прямой l или меньше тангенса угла наклона прямой m.

Т.к графики симметричны относительно оси OY, то $|a| > 3tg\,h$

$AH_1 = 3h$.

$BH_1 = h$, тогда ~~$\sqrt{1-h^2}+3\sqrt{1-h^2}$~~ $\triangle OBX \sim \triangle O_1AX$; $k=\frac{1}{3}$.

$XO_1 = \frac{10\cdot 3}{4} = \frac{15}{2} = 7{,}5$, тогда

$\cos\lambda = \frac{3}{7{,}5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, $tg^2x+1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow tg\,x = \pm\sqrt{\frac{25}{4}-1}$

Тогда $|a| \geq \frac{3}{2}\sqrt{21}$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3}{2}\sqrt{21}) \cup (\frac{3}{2}\sqrt{21}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.

Решение

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_{2x}5}\right)^4 - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_{2x}5}\right)^4 = 4\frac{1}{3}\log_{2x}5 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_y 5}\right)^4 + 4\frac{1}{3}\log_y 5 = -3$

Пусть $\log_{2x}5 = a$; $-\log_y 5 = b$. тогда

a и b - корни уравнения

$\left(\frac{1}{z}\right)^4 = 4\frac{1}{3}z - 3 \Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^4 = \frac{13}{\cancel{3}}z - 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 = 13z^5 - 9z^4 \Leftrightarrow 13z^5 - 9z^4 - 3 = 0.$

$\log_{2x}5 = a \Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 2x} = a \Leftrightarrow \log_5 2x = \frac{1}{a}$ $\Big| \Rightarrow$

$\log_5 y = \frac{1}{b}$

$\Rightarrow \log_5 2xy = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow xy = \frac{1}{2}\left(5^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$, где a, b - произвольные корни $13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$

$f(z): 13z^5 - 9z^4 - 3$

$f(0) = -3 < 0$
$f(1) = 1 > 0$ $\Big\} \Rightarrow$ $f(x)$ имеет корень на промежутке ~~отр~~ $[0; 1]$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(5^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$, где a, b - корни $13x^5 - 9x^4 - 3 = 0$, возможно $(a = b)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.

Решение

$5(x_2-x_1)+y_2-y_1=45.$

Пусть $x_2-x_1=\Delta x$, $y_2-y_1=\Delta y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 5\Delta x+\Delta y=45$; $\Delta x\in\mathbb{Z}$; $\Delta y\in\mathbb{Z}$

$|\Delta x|\leq 34$

$|\Delta y|\leq 50.$; $5\Delta x \vdots 5$; $45 \vdots 5 \Rightarrow \Delta y \vdots 5.$

Прямая, заданная этим уравнением параллельна стороне параллелограмма. Каждый раз на этой прямой лежит $\left(\frac{80}{5}+1\right)$ 17 точек с целыми координатами, лежащими на сторонах или внутри параллелограмма, если координата y данной точки делится на 5 и 16 точек, если не делится. Значит всего пар. $3\cdot17\cdot17+13\cdot16\cdot16.$

$3\cdot289+13\cdot\cancel{196}\,256=4195$

256×13: 768, 256, 3328; $289\times3=867$; $3328+867=4195$

Ответ: 4195

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

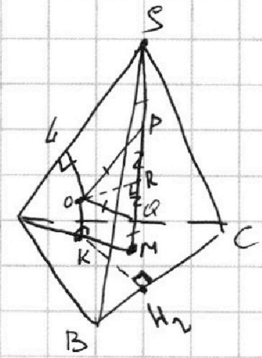
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

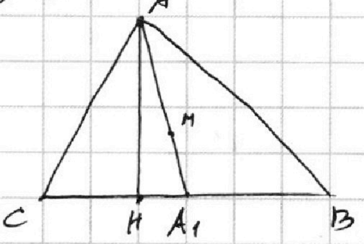
№7.

Решение

1) Рассмотрим



$\triangle SAM$. Сечением сферы плоскостью треугольника: окружность $KLPQ$.



Степень т. M: $MQ \cdot MP =$

$= KM^2 = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow KM = SL$, $AL = AK$ $\Big\} \Rightarrow$ как отрезки касательных

$\Rightarrow AS = AM = BC$.

$AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$.

$\frac{AH \cdot BC}{2} = 100 \Leftrightarrow AH = \frac{200}{16} = \frac{25}{2}$

$\sin\angle AA_1C = \frac{25}{2} : 24 = \frac{25}{48}$;

$|\cos\angle AA_1C| = \sqrt{1 - \frac{25^2}{48^2}} = \sqrt{\frac{48^2 - 25^2}{48^2}} = \frac{\sqrt{(48-25)(48+25)}}{48} =$

$= \frac{\sqrt{23 \cdot 72}}{48} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 23}{48^2}} = \frac{6}{48} \cdot \sqrt{46} = \frac{1}{8}\sqrt{46}$.

$A_1M = 8$, тогда $CM = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8}\sqrt{46}}$

$BM = \sqrt{8^2 + 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8}\sqrt{46}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = AA_1 \cdot \frac{9}{4} \cdot BM \cdot CM =$

$= 24 \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{128 - 16\sqrt{46}} \cdot \sqrt{128 + 16\sqrt{46}} =$

$= 54 \cdot \sqrt{(128)^2 - 256 \cdot 46} = 54 \cdot \sqrt{128 \cdot (128 - 92)} =$

$= 54 \cdot \sqrt{128 \cdot 36} = 54 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 54 \cdot 48 \cdot \sqrt{2} = 2592\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 48 \\ \hline 432 \\ 216 \\ \hline 2592 \end{array}$$

2) Ω касается (ABC) и (BSC), значит O лежит на биссекторе $\angle A(BC)S$.

$SP = MQ$.

Если R - середина SM, то $QR = RP$, т.е $\triangle MOS$ - р/б с осн MS. Тогда $OS = OM$.

$OS = \sqrt{SN^2 + NO^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{39} \Rightarrow$

$\Rightarrow KM = 4$ (из $\triangle KOM$)

Тогда $KA_1 : AA_1 = 12/24 = \frac{1}{2} \Rightarrow KH_2 = \frac{1}{2} AH = \frac{25}{4}$.

Тогда $\angle A(BC)S = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{\frac{25}{4}} = 2\operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.

Ответ: $2592\sqrt{2}$; $2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a b c

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

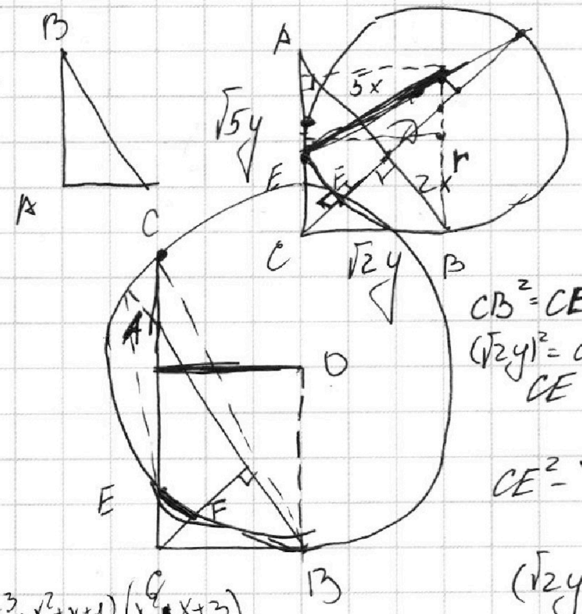
$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 8$ $\quad \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14$ $\quad \beta_1 + \gamma_1 \geq 12$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 14$ $\quad \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21$ $\quad \beta_2 + \gamma_2 \geq 20$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 12$ $\quad \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39$ $\quad \beta_3 + \gamma_3 \geq 17$



$(13x^3+1)(x^2+3)$

$13x^5 + x^2 + 39x^3 + 3$

$9x^4 + 27x^2$

$28x^2 + 39x^3$

$-39x^4 - 39 \cdot 3x$

$CD =$

$(7x)^2 = 7y^2$

$7x^2 = y^2$

$\sqrt{7}x = y$

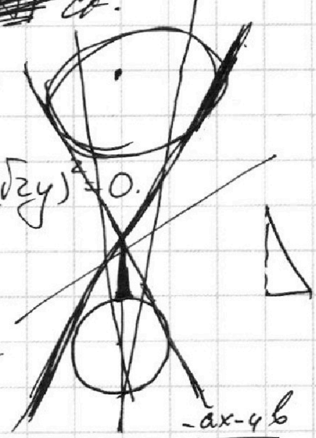
$CB^2 = CE \cdot (r - CE) = CF$

$(\sqrt{2}y)^2 = CE(\sqrt{2}y) - CE^2$

$CE : AC = CF : FD$

$CE^2 - CE(\sqrt{2}y) + (\sqrt{2}y)^2 = 0$

$(\sqrt{2}y)^2 - 4(\sqrt{2}y)^2$



$y = \frac{-ax - 4b}{3}$

$(13x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3)$

$CD = \sqrt{10}\,x$

$39x^3 + 3x^2 + 3x + 3 + 13x^5 + x^4 + x^3 + x^2 -$

$-169x^4 -$

$(r - CE)^2 = r^2 - (\sqrt{2}y)^2$

$CE(r - CE) = (\sqrt{2}y)^2$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$

$\arcsin(\cos x) =$

$=$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$

$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$

$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$

$2\pi \leq x \leq 3\pi.$

$0 \leq x - 2\pi \leq \pi$

$\sin \frac{\pi}{2} - x$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2}$

$r^2 - 2rCE + CE^2 = r^2 - 2y^2$

$-CE \cdot r + CE^2 = 2y^2 \quad | \cdot 2$

$-CE^2 = -6y^2$

$CE = \sqrt{6}y.$

$(ax^3 + bx^2 + cx)(dx^2 + fx + r)$

3 13 1

$\cos 0 \leq \cos x = \cos(x - 2\pi) \leq 2\pi$

$ac = 13$

$13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$

$z^4(13z - 9) - 3 = 0.$

$\arcsin(\cos x)$

$13x^2 + 1$

$13x^5 - 9x^4 - 3 \;\Big|\; 13x^2 + 1$

$13x^5 + 13x^3 \qquad x^3 + \frac{22}{13}x^2$

$\sin \frac{\pi}{2} - x = \cos x$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}$

$x = 1{,}5\pi,$

$9x^4 + 13x^3$

$9x^4 \quad -13x^3 - \frac{9}{13}x^2$

$-\frac{9}{13}x^2$

$13z^5 - 9z^4 - 3 = 0.$

$z^4 \cdot (13z - 9) + z^2(13z - 9)$

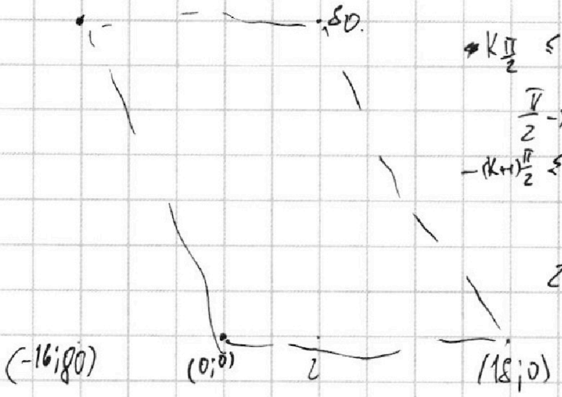
$13z$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



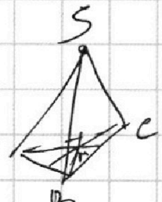
$-2\pi \le x \le 3\pi$

$k\frac{\pi}{2} \le x \le k+1\frac{\pi}{2}$

$\cos x = a$

$\frac{\pi}{2} - x$

$-(k+1)\frac{\pi}{2} \le -x \le$



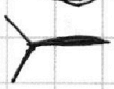
$k\pi \le x \le (k+1)\pi$

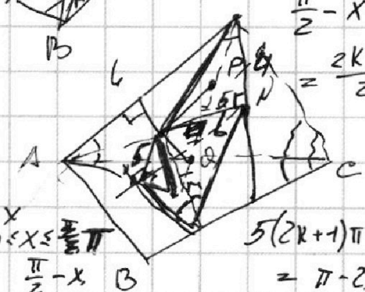
$x - k\pi$

$\frac{\pi}{2} - x + k\pi =$

$= \frac{2k+1}{2}\pi - x.$

$2\pi k \le x \le$





$5x_2 - 5x_1 + (y_2 - y_1) = 45$

$\cos 3x$

$0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$

$\frac{\pi}{2} - x$

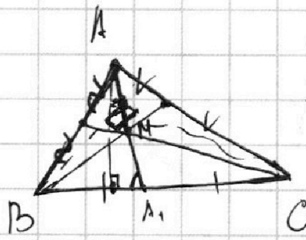
$5(2k+1)\pi - 10x =$

$= \pi - 2x \Leftrightarrow$

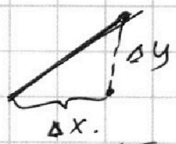
$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45.$

$SA = BC = 16. \Leftrightarrow 8x = (10k+4)\pi.$

$S_{\triangle ABC} = 100.$



$\frac{3}{2} \cdot 16 = 24$



$4x = (5k+2)\pi.$

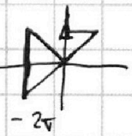
$x = \frac{5k+2}{4}\pi.$

$\frac{2 \cdot 100}{16} = \frac{50}{4} = 12{,}5.$

$5\Delta x + \Delta y = 45$

$\Delta x = 9 - \frac{\Delta y}{5}.$

$-2 \le k \le 2$



200

$\frac{1}{2}a \cdot h.$

$h = \frac{2S}{a} = \frac{200}{16} = \frac{50}{4}$

$\log_5^4 2x - 3\log_{2x} 5 = \frac{1}{3}\log_{2x} 625 - 3$

625

$125 \cdot 5 = 25 \cdot 25 =$

$= 5^4$

$\left(\frac{1}{\log_{2x} 5}\right)^4 - 3\log_{2x} 5 = \frac{1}{3}\log_{2x} 625 - 3$

$CE = k \cdot AC = \sqrt{35}\, kx$

$CF = k \cdot CD \quad \sqrt{10}\, kx$

$EF = k \cdot AD. \quad 5\, kx$

$\frac{1}{z^4} - 3z = \frac{4}{3}z - 3$

$\log_{2x} 5$

$1 - 3z^5 = \frac{4}{3}z^5 - 3z^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 9z^5 = 4z^5 - 9z^4 \Leftrightarrow 13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$

$\cancel{13z^5 - 9z^4 - 3}$

$\frac{13}{32} - \frac{9}{16} - 3.$

$kx \vee x$ k

$\log_5^4 2x$

$z \vee x$

$z \vee y.$

$CF \cdot CE' = CF \cdot \left(CF + 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{EF}{2}\right)^2}\right)$

$z \vee r.$

$? z^2 = 2y^2$

$\sqrt{35}z \cdot (2r - \sqrt{35}z) = \sqrt{10}\, z \cdot \left(\sqrt{10}\, z + 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{5}{2}z\right)^2}\right)$

$2r\sqrt{35}z - 35x^2 = 10z^2 + 2\sqrt{10} \cdot z \cdot \sqrt{r^2 - 6{,}5z^2}$

$4 \cdot 35 \cdot r^2 \cdot z^2 = (45z^2 + 2\sqrt{10}\, z \cdot \sqrt{r^2 - 3{,}5z^2})$