



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Решение

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot A$, где $A \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ (наименьшие числа или 0)

Аналогично $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot B$,
 $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot C$.

Тогда по условию:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 8 + 12 + 14 = 34 \\ 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 14 + 20 + 21 = 55 \\ 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 12 + 17 + 39 = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 27,5 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 34 \end{cases}$$

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$.

Тогда $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot A \cdot B \cdot C \geq$

$\geq 2^{\frac{17}{1}} \cdot 3^{\frac{28}{1}} \cdot 5^{\frac{34}{1}} = 2^{\frac{17}{1}} \cdot 3^{\frac{28}{1}} \cdot 5^{\frac{34}{1}}$

Равенство достигается при $\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 8 \\ \beta_2 = 6 \\ \gamma_2 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 = 22 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 17 \end{cases}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2}$

Решение

1) $AD:DB = 5:2$.

Пусть $AD = 5x$, тогда $BD = 2x$, $AB = 7x$.

$AC^2 = AD \cdot AB = 5x \cdot 7x = 35x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{35}x$

Аналогично $BC^2 = 2x \cdot 7x = 14x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{14}x$ по св-ву кривоугольного треугольника

~~CD~~ $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$ по св-ву кривоугольного

треугольника.

2) $EF \parallel AD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$; $EE' \perp \omega$; $FE \perp \omega \Rightarrow \angle EFA$ опирается на диаметр ω .

3) Пусть O - центр описанной окружности.

$EE' \perp \omega \Rightarrow EO = r$. Пусть L точка пересечения окружности ω с AC - L . Если $OH \perp EL$, то $EH = HL$. по св-ву хорды и диаметров.

Используя т.С для ω : $CE \cdot CL = CF \cdot (CA + HL) =$

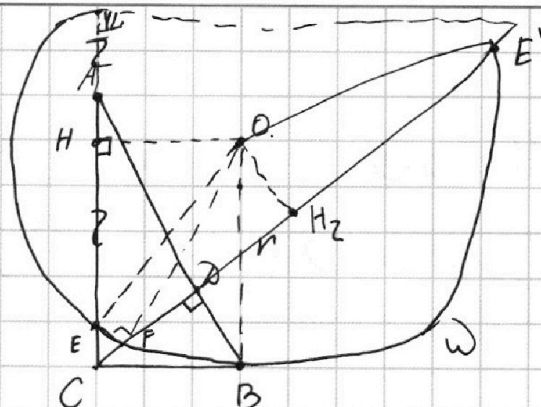
$= CE \cdot (CE + 2HE) = CE \cdot (CE + 2(HC - CE)) = CE(2OB - CE) =$

$= CE \cdot (2r - CE) = CB^2 \Leftrightarrow 2rCE - CE^2 - CB^2 = 0$

ΔEHO : по т. Пифагора: $(r - CE)^2 + CB^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2rCE + CE^2 + CB^2 = 0$

4) EE' - диаметр. \Rightarrow по (3) $E' \in CF$. Тогда ~~Пусть~~ ~~к~~ т.К $EF \parallel AB$, то $\Delta CEF \sim \Delta CAD$. Пусть $CE = k \cdot AC = k \cdot \sqrt{35}x = \sqrt{35}kx$
 $CF = k \cdot CD = k \cdot \sqrt{10}x = \sqrt{10}kx$
 $EF = k \cdot AD = k \cdot 5x = 5kx$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2}$.

Пусть $Kx = z$, тогда, сложив м.с:

$$CE \cdot (2v - CE) = CF \cdot (CF + z \cdot \sqrt{v^2 - (0.4z)^2}) = CF \cdot (CF + 2\sqrt{v^2 - (\frac{CF}{2})^2})$$

$$\sqrt{35}z(2v - \sqrt{35}z) = \sqrt{10}z \cdot (\sqrt{10}z + 2\sqrt{v^2 - (2.5z)^2}) \Leftrightarrow$$

$$= 2\sqrt{35}v - 35z = 10z + 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{v^2 - (2.5z)^2} \Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow) (2\sqrt{35}v - 45z) = 2\sqrt{10} \sqrt{v^2 - (2.5z)^2} \quad (1)$$

$$(\Leftrightarrow) 140v^2 - 45^2z^2 - 4 \cdot 45 \cdot \sqrt{35}vz = 40(v^2 - (2.5z)^2) \Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow) 100v^2 - 45^2z^2 - 4 \cdot 45 \sqrt{35}vz = -10 \cdot 25z^2 \quad (2)$$

$$(\Leftrightarrow) 100v^2 - 2025z^2 - 180\sqrt{35}vz = -250z^2 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 100v^2 - 180\sqrt{35}vz - 1770z^2 = 0 \quad (4)$$

$$(\Leftrightarrow) 10v^2 - 18\sqrt{35}vz - 177z^2 = 0 \quad (5)$$

$$(\Leftrightarrow) \frac{v}{z} = \frac{18\sqrt{35} + 2\sqrt{307.15}}{20} = \frac{9\sqrt{35} + \sqrt{307.15}}{10}$$

$$BC^2 = 14x^2 = \sqrt{35}z \cdot (\sqrt{35}z + 2v) =$$

$$= \sqrt{35} \cdot (z) \cdot (\sqrt{35}z + 2 \cdot \frac{9\sqrt{35} + \sqrt{307.15}}{10} z)$$

Значит $\sqrt{14}x = \sqrt{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307.15}}{10}} z$

Значит $K = \sqrt{\frac{14}{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307.15}}{10}}}$

Значит $S_{CEF} / S_{CAD} = \frac{14}{35 + \frac{18 + 5\sqrt{307.15}}{10}} \quad \left| \Rightarrow \right.$

$$\frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{10}x \cdot 5x}{\sqrt{35}x \cdot \sqrt{14}x} = \frac{5\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow S_{CEF} / S_{ABC} = \frac{40}{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307.15}}{10}} \quad \text{Ответ: } \frac{10}{-35 + \frac{18 + 5\sqrt{307.15}}{10}}$$

Handwritten calculations for the quadratic equation:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \\ - 250 \\ \hline 1770 \\ \hline 18 \times 36 \\ \hline 648 \\ 18 \times 324 \\ \hline 5832 \\ 35 \times 1770 \\ \hline 61950 \\ \hline 1620 \quad 7080 \\ \hline 972 \\ \hline 11340 \\ + 1080 \\ \hline 12420 \\ \hline 6140.3 \\ 614.253 \\ 307.253 \\ \hline 12 \\ 137 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Решение

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \end{array} \right.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq (\arcsin z) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(z) \quad -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \Leftrightarrow -6x \leq -2x \leq 4x \Leftrightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

Если $x \in [-2\pi; 0]$, то

$$x_0 = x + 2\pi \in [0; 2\pi]; \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x = \cos(x_0)$$

$$\pi - 2x = \pi - 2(x_0 - 2\pi) = 5\pi - 2x_0.$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\cos x_0) =$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \in [0; 2\pi] \\ 10 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = 5\pi - 2x_0 \Leftrightarrow 5\pi - 10x_0 = 5\pi - 2x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0. \Leftrightarrow x_0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_0 \in [0; 2\pi] \\ x_0 \in [0; 2\pi] \end{array}$$

Тогда $x = x_0 - 2\pi = -2\pi$.

Если $x \in [0; 2\pi]$, то

$$10 \arcsin(\cos x) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ значит}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in [0; 2\pi] \\ 5 - 10x = \pi - 2x \Leftrightarrow 4\pi = 8x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

Если $x \in [2\pi; 3\pi]$, то $x - 2\pi \in$

Пусть $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}; k \geq 2$, тогда

$$\cos(x - k\pi) = \cos x, \text{ где } x - k\pi \in [0; \pi], \text{ тогда}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + k\pi - x, \text{ т.е.}$$

$$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi - x\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 8x = (10k+4)\pi \Leftrightarrow x = \frac{(10k+4)\pi}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $k = -2$, то

$$x = \frac{-10+2}{4}\pi = -2\pi.$$

Если $k = 0$, то

$$x = \frac{0+2}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

Если $k = 2$, то.

$$x = \frac{12}{4}\pi = 3\pi.$$

~~Если~~ $(k \in \{-1; 1\})$

Если $k \geq 2$, то $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$

$$\pi \leq x - (k-1)\pi \leq 2\pi. \Leftrightarrow \overset{-2\pi}{\leq} (k-1)\pi - x \leq -\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (k+1)\pi - x \leq \pi \Rightarrow$$

$$\# \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \arcsin(\cos(-x)) = \arcsin(\overset{\cos}{((k+1)\pi - x)}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + x - (k+1)\pi.$$

$$10. \left(\frac{\pi}{2} + x - (k+1)\pi\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi + 10x - 10(k+1)\pi = \pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x = (10k+11-5)\pi \Leftrightarrow x = \left(\frac{10k+11-5}{12}\right)\pi$$

$$\text{Если } k = -1, \text{ то } x = \frac{+1-5}{12}\pi = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Если } k = 1, \text{ то } x = \frac{16}{12}\pi \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\pi.$$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi; 3\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

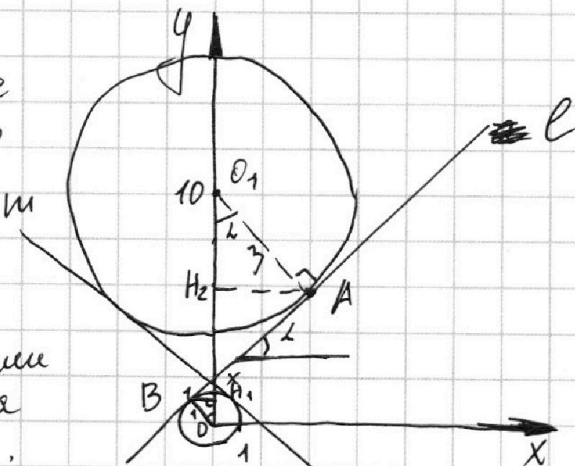
Решение.

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{— график данного уравнения —} \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & \text{— график данной функции уравнения —} \end{cases}$
 — окружность с ц. в ш. $(0; 0)$ и радиусом 1
 — окружность с ц. в ш. $(0; 10)$ и радиусом 6.

1-ым уравнением в данной системе задаем не вертикальную прямую. Параметр a определим угол наклона данной прямой, а параметр b — точку, через которую она будет проходить.

Чтобы прямая могла пересекать обе окружности необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициент a был или больше, или меньше тангенса угла наклона прямой l или больше тангенса угла наклона прямой m .



Т.к. графики симметричны относительно осей Ox, Oy , то $|a| > 3 \operatorname{tg} \alpha$

$AH_1 = 3h$.

$BH_1 = h$, тогда $\sqrt{1 + h^2} + 3\sqrt{1 + h^2} \Delta OBX \sim \Delta O_1AX; k = \frac{1}{3}$.

$x_{O_1} = \frac{10 \cdot 3}{4} = \frac{15}{2} = 7,5$, тогда

$\cos \alpha = \frac{3}{7,5} = \frac{2}{5}; \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 1}$

Тогда $|a| \geq \frac{3\sqrt{21}}{2}$ Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{3\sqrt{21}}{2}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

25.

Решите

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_{2x} 5}\right)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_{2x} 5}\right)^4 = 4 \frac{1}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_y 5}\right)^4 + 4 \frac{1}{3} \log_y 5 = -3$$

Пусть $\log_{2x} 5 = a$; $-\log_y 5 = b$. Тогда a и b - корни уравнения

$$\left(\frac{1}{z}\right)^4 = 4 \frac{1}{3} z - 3 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^4 = \frac{13}{3} z - 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = 13z^5 - 9z^4 \Leftrightarrow 13z^5 - 9z^4 - 3 = 0.$$

$$\log_{2x} 5 = a \Leftrightarrow \log_5 2x = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_5 2x = \frac{1}{a} \quad | \Leftrightarrow$$

$$\log_5 y = \frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \log_5 2xy = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow xy = \frac{1}{2} \left(5^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right), \text{ где } a, b - \text{корни } 13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$f(z) = 13z^5 - 9z^4 - 3$$

$f(0) = -3 < 0$
 $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow f(x)$ имеет корни на промежутке $(0; 1)$.

Ответ: $\frac{1}{2} \left(5^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)$, где a, b - корни $13x^5 - 9x^4 - 3 = 0$, возможно $(a = b)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6.

Решите

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45.$$

Пусть $x_2 - x_1 = \Delta x$ $\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \Rightarrow$
 $y_2 - y_1 = \Delta y$

$$\Rightarrow 5\Delta x + \Delta y = 45, \quad \Delta x \in \mathbb{Z}; \Delta y \in \mathbb{Z}$$

$$|\Delta x| \leq 34$$

$$|\Delta y| \leq 50; \quad 5\Delta x \leq 45; \quad 45:5 \Rightarrow \Delta y \leq 5.$$

Прямая, заданная этим уравнением

параллельна стороне параллелограмма. Каждый

раз на этой прямой лежат

$\left(\frac{80}{5} + 1\right) = 17$ точек с целыми координатами,

лежащими на сторонах или внутри

параллелограмма, если координата у данной

точки делится на 5 и 16 точек, если не

делится. Значит всего пар. $3 \cdot 17 \cdot 17 + 13 \cdot 16 \cdot 16$.

$$3 \cdot 289 + 13 \cdot 256 = 4195$$

$$\begin{array}{r} \times 256 \\ 13 \\ \hline 768 \\ 256 \\ \hline 328 \\ 852 \\ \hline 4195 \end{array}$$

Ответ: 4195

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

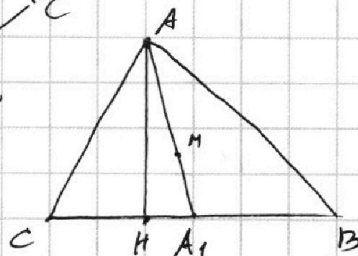
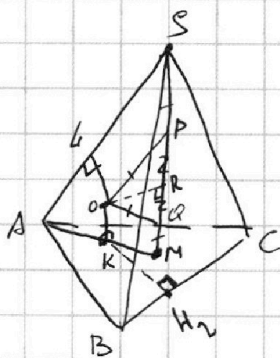


№7.

Решение

1) Рассмотрим

$\triangle SAM$. Вспомогательная сфера
плоскостью шреугольника:
околооси $KLPR$.



Синусы $\angle M$: $MK \cdot MP =$

$$\Rightarrow KM^2 = SP \cdot SQ = SG^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = SG \quad \left| \begin{array}{l} AL = AK \\ \end{array} \right. \Rightarrow$$

как окружности касательных

$$\Rightarrow AS = AM = BC.$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24.$$

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = 100 \Rightarrow AH = \frac{200}{16} = \frac{25}{2}$$

$$\sin \angle AA_1C = \frac{25}{2} : 24 = \frac{25}{48};$$

$$|\cos \angle AA_1C| = \sqrt{1 - \frac{25^2}{48^2}} = \frac{\sqrt{48^2 - 25^2}}{48} = \frac{\sqrt{(48-25)(48+25)}}{48} =$$

$$= \frac{\sqrt{23 \cdot 72}}{48} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 23}}{48} = \frac{6}{48} \cdot \sqrt{46} = \frac{1}{8} \sqrt{46}.$$

$$A_1M = 8, \text{ тогда } CM = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} \sqrt{46}}$$

$$BM = \sqrt{8^2 + 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} \sqrt{46}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 &= AA_1 \cdot \frac{9}{4} \cdot BM \cdot CM = \\ &= 24 \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{128 - 16\sqrt{46}} \cdot \sqrt{128 + 16\sqrt{46}} = \\ &= 54 \cdot \sqrt{(128)^2 - 256 \cdot 46} = 54 \cdot \sqrt{128^2 - 11904} = \\ &= 54 \cdot \sqrt{128 \cdot 36} = 54 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 54 \cdot 48 \cdot \sqrt{2} = 2592\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 54 \\ 162 \\ \times 48 \\ 432 \\ \hline 216 \\ 2592 \end{array}$$

2) Ω касается (ABC) и (BSC) , значит
О лежит на ~~ее~~ биссектрисе $\angle A(BC)S$.

$$SP = MQ.$$

Если R - середина SM , то $QR = RP$, т.е. ~~.....~~

$\triangle MOS$ - p.o. с осью MS . Тогда $OS = OM$.

$$OS = \sqrt{SN^2 + NO^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = \del{...} = 4 \text{ (из } \triangle KOM)$$

Тогда $KH_1 : AA_1 = 12/24 = \frac{1}{2} \Rightarrow KH_2 = \frac{1}{2} AH = \frac{25}{4}$.

Тогда $\angle A(BC)S = 2 \arctg \frac{5}{4} = 2 \arctg \frac{4}{5}$.

Ответ: $2592\sqrt{2}; 2 \arctg \frac{4}{5}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



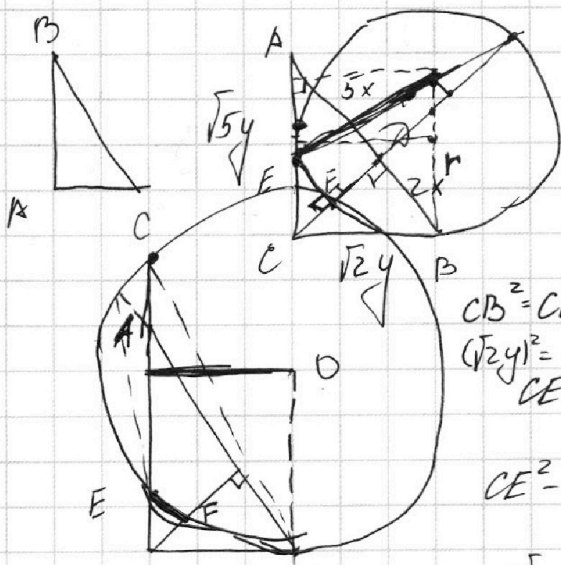
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

abc
 $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$
 $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 8$
 $\alpha_2 + \beta_2 \geq 14$
 $\alpha_3 + \beta_3 \geq 12$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 14$
 $\alpha_2 + \beta_2 \geq 21$
 $\alpha_3 + \beta_3 \geq 39$

$\beta_1 + \beta_1 \geq 12$
 $\beta_2 + \beta_2 \geq 20$
 $\beta_3 + \beta_3 \geq 17$



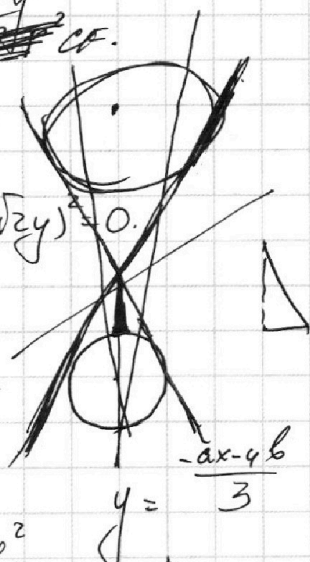
$CD =$
 $(7x)^2 = 7y^2$
 $7x^2 = y^2$

$(13x^3 + 1)(x^2 + 3)$
 $13x^5 + x^2 + 39x^3 + 3$
 $9x^4 + 27x^2$
 $28x^2 + 39x^3$
 $-39x^3 - 39 \cdot 3x$

$CB^2 = CE \cdot (r - CE) = CE \cdot CF$
 $(\sqrt{2}y)^2 = CE(\sqrt{2}y) - CE^2$
 $CE : AC = CF : FD$

$CE^2 - CE(\sqrt{2}y) + (\sqrt{2}y)^2 = 0$
 $(\sqrt{2}y)^2 - 4(\sqrt{2}y)^2$

$(r - CE)^2 = r^2 - (\sqrt{2}y)^2$
 $CE(r - CE) = (\sqrt{2}y)^2$
 $r^2 - 2rCE + CE^2 = r^2 - 2y^2$
 $-CE \cdot r + CE^2 = 2y^2 \quad | \cdot 2$
 $-CE^2 = -8y^2$
 $CE = \sqrt{8}y$



$y = \frac{-ax - qb}{3}$

$(13x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + 3)$
 $13x^5 + 3x^2 + 3x^3 + 3 + 13x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 169x^3 - 1$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$
 $\arcsin(\cos x) =$
 $= -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$

$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$

$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$

$2\pi \leq x \leq 3\pi$

$0 < 1 - 2\pi \leq \pi$

$\sin \frac{\pi}{2} - x$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$

$13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$

$z^4(13z - 9) + z^2(13z - 9)$
 $13z$

$\cos 0 \leq \cos x = \cos(x - 2\pi) \leq 2\pi$

$\arcsin(\cos x)$

$\sin \frac{\pi}{2} - x = \cos x$

$10(\frac{\pi}{2} - x) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$8x = 4\pi; x_2 = \frac{\pi}{2}$

$(ax^3 + bx^2 + cx) \div (dx^2 + ex + f)$

$13x^2 + 1$
 $13x^5 - 9x^4 - 3$
 $13x^5 + 13x^3$
 $13x^3 - 9x^4 - 3$
 $13x^3 + 22x^2$

$9x^4 + 13x^3$

$9x^4 - 13x^3 - 9x^2$

$x \in [5\pi, \frac{\pi}{2}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-2\pi \leq x \leq 3\pi$
 $\cos x = a$
 $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$
 $x - k\pi = \frac{\pi}{2} - x + k\pi = \frac{2k+1}{2}\pi - x$

$\frac{\pi}{2} - x$
 $-(k+1)\frac{\pi}{2} \leq -x$
 $2\pi k \leq x \leq 2\pi(k+1)$

$5x_2 - 5x_1 + (y_2 - y_1) = 45$
 $5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$
 $\frac{3}{2} \cdot 16 = 24$
 $5\Delta x + 2y = 45$
 $\Delta x = 9 - \frac{2y}{5}$

$2 \cdot \frac{100}{16} = \frac{50}{4} \cdot 2.5$
 200
 $\frac{1}{2} a \cdot h$
 $h = \frac{2.9}{a} = \frac{200}{10} = 20$

$\log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$
 $(\log_{2x} 5)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$
 $\frac{1}{z^4} - 3z = \frac{4}{3} z - 3$
 $1 - 3z^5 = \frac{4}{3} z^5 - 3z^4$
 $(z) 3 - 9z^5 = 4z^5 - 9z^4 \Rightarrow 13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$

$13z^5 - 9z^4 - 3 = 0$
 $\frac{13}{32} - \frac{9}{16} - 3$
 $z \sqrt{x} \quad (K)$
 $CF \cdot CE' = CF \cdot (CF + 2(\sqrt{v^2 - (EE')^2}))$
 $\sqrt{z^2} = 20z^2 \quad \sqrt{35z^2} \cdot (2v - \sqrt{35z^2}) = \sqrt{10z^2} \cdot (\sqrt{10z^2} + 2\sqrt{v^2 - (\frac{5}{2}z^2)^2})$
 $2v\sqrt{35z^2} - 35x^2 = 10z^2 + 2\sqrt{10} \cdot z \cdot \sqrt{v^2 - 9.5z^2}$
 $4 \cdot 35 \cdot v^2 \cdot z^2 = (45z^2 + 2\sqrt{10} \cdot z \cdot \sqrt{v^2 - 35z^2})$

$(-16; 80)$ $(0; 8)$ $(18; 0)$

$SA = BC = 16$
 $S_{\triangle ABC} = 100$
 $4x = (5k+2)\pi$
 $x = \frac{5k+2}{4}\pi$
 $-2 \leq k \leq 2$

$CE = k \cdot AC = \sqrt{35} kx$
 $CF = k \cdot CD = \sqrt{10} kx$
 $EF = k \cdot AD = 5 kx$

$125 \cdot 5 = 25 \cdot 25 = 5^4$