МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Решение:

1) Пусть $a \vdots 2^x$, $b \vdots 2^y$, $c \vdots 2^z$, где $x, y, z \in \mathbb{Z}$ и $x, y, z \geq 0$;

2) т.к. $(a \cdot b) \vdots 2^6$, то $2^x \cdot 2^y \geq 2^6$, т.е. $x + y \geq 6$ аналогично $y + z \geq 14$, $x + z \geq 16$, сложим эти три неравенства, тогда $2 \cdot (x + y + z) \geq 6 + 14 + 16 = 36$, $(x + y + z) \geq 18$, т.е. $2^x \cdot 2^y \cdot 2^z \geq 2^{18}$, тогда $(a \cdot b \cdot c) \vdots 2^{18}$;
все три неравенства выполняются, например при $x = 4, y = 2, z =$

3) Аналогично для числа 3 $a \vdots 3^{x_1}$, $b \vdots 3^{y_1}$, $c \vdots 3^{z_1}$, $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$, $x_1, y_1, z_1 \geq 0$; ~~$x_1 + y_1 \geq 13$, $y_1 + z_1 \geq 25$~~, тогда $x_1 + y_1 + z_1 \geq \frac{13 + 21 + 25}{2} = \frac{34 + 25}{2} = \frac{59}{2} = 29{,}5$;
тогда $x_1 + y_1 + z_1 \geq 30$, значит $(a \cdot b \cdot c) \vdots 3^{30}$;

4) Аналогично для числа 5, $a \vdots 5^{x_2}$, $b \vdots 5^{y_2}$, $c \vdots 5^{z_2}$, $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}$, $x_2, y_2, z_2 \geq 0$, тогда $x_2 + y_2 + z_2 \geq \frac{11 + 13 + 28}{2} = \frac{24 + 28}{2} = \frac{52}{2} = 26$, тогда

~~$(a \cdot b \cdot c) \vdots 5^{26}$;~~

~~5) Значит $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ (т.к. 2, 3, 5 — простые числа); равенство достигается например при~~

~~$a =$~~ 5) мы знаем, что $x_1 + y_1 \geq 13$, $y_1 + z_1 \geq 21$, $x_1 + z_1 \geq 25$, тогда при $x_1 = 9$, $y_1 = 4$ и $z_1 = 17$, все при неравенства будут выполнены; при этом

$x_1+y_1+z_1=30$;

6) Мы знаем, что $x_2+y_2 \geq 11$, $y_2+z_2 \geq 13$, $x_2+z_2 \geq 28$,

тогда, т.к. $y_2 \geq 0$, то $x_2+y_2+z_2 \geq 28$;

при $x_2=14$, $y_2=0$, $z_2=14$, все

при неравенства будут выполнены, при этом

$x_2+y_2+z_2=28$;

7) Тогда $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$;

8) Если $a=2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$, $b=2^2 \cdot 3^4$, $c=2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$,

то $a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ и

$a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} \vdots (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$; $b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} \vdots (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13})$;

$\cancel{ac = 2^{22} \cdot 3^{39} \cdot 5^{42} \vdots (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28})}$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} \vdots (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28})$;

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

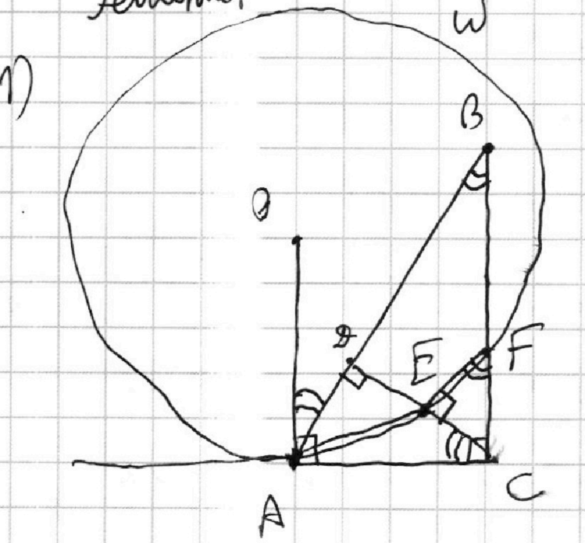
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

Решение:

1)



2) $AD : DB = 2:5$; пусть $AD = 2\cdot x$, где $x>0$,

тогда $BD = 5\cdot x$; $CD = \sqrt{AD\cdot BD} = \sqrt{5\cdot x\cdot 2x} = \sqrt{10}\cdot x$;

$AC = \sqrt{AD^2+CD^2} = \sqrt{(2x)^2+(\sqrt{10}\,x)^2} = \sqrt{14}\cdot x$;

$BC = \sqrt{35}\,x$;

3) Если $B \in \omega$, то $CF\cdot CB = CA^2$;

$CF\cdot CB = 14x^2$; ~~CF~~ ~~CBF~~ $CF = \frac{14x^2}{BC} = \frac{14x^2}{\sqrt{35}x} =$

$= \frac{7\cdot 2\cdot x}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{35}\cdot x}{5}$; тогда, т.к. $\triangle ADC \sim \triangle CEF$,

то $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \cancel{CF}\left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{14}\cdot x}{\frac{2\sqrt{35}}{5}\cdot x}\right)^2 =$

$= \left(\frac{\sqrt{2}\cdot 5}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$;

Ответ: $\frac{5}{2}$

№3 Решение:

1) $10\cdot\arccos(\sin x)=9\pi-2x$;

Пусть $\arccos(\sin x)=\alpha$, где $\alpha\in[0;\pi]$, тогда

$\cos\alpha=\sin x$; и $10\cdot\alpha=9\pi-2x$, $\alpha=\frac{9\pi-2x}{10}$;

значит $\begin{cases}\cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right)=\sin x\\ 0\le\alpha\le\pi\end{cases}$; т.о.

$\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{10}+\frac{2x}{10}\right)=\sin x\\ 0\le\frac{9\pi-2x}{10}\le\pi\end{cases}$; $\begin{cases}\sin\left(\frac{x-2\pi}{5}\right)=\sin x\\ -9\pi\le-2x\le\pi\end{cases}$;

$\begin{cases}\sin\left(\frac{x-2\pi}{5}\right)=\sin x\\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{9\pi}{2}\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{x-2\pi}{5}=x+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ \frac{x-2\pi}{5}=\pi-x+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ -\frac{\pi}{2}\le x\le 4{,}5\cdot\pi\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}4x=-2\pi+10\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 6x=7\pi+10\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ -\frac{\pi}{2}\le x\le 4{,}5\pi\end{cases}$; ..

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi n-\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\ (1)\\ x=\frac{7\pi+10\pi n, n\in\mathbb{Z}}{6}, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ -\frac{\pi}{2}\le x\le 4{,}5\cdot\pi\end{cases}$;

(1) $x = \frac{5\pi k - \pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$;

Если $k > 2$, то $x > \frac{9\pi}{2}$;

Если $k < 0$, то $x < -\frac{\pi}{2}$;

При $0 \leq k \leq 2$; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$, подходит,

значит $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array}\right.$;

(2) $x = \frac{7\pi + 10\pi m}{6}$, $m \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$;

Если $m > 2$, то $x > \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$;

Если $m < -1$, то $x < \frac{-3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$, значит

Если $-1 \leq m \leq 2$, то $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$, тогда

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array}\right.$; значит $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array}\right.$;

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$\cancel{\begin{cases} x = y\cdot\left(-\frac{6a}{5}\right)+\frac{b}{5} \\ x^2+y^2=25 \end{cases}}$$

1) $\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = y\cdot\left(-\frac{6a}{5}\right)+\frac{b}{5} \quad (3) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \quad (1) \\ x^2+(y+9)^2=2^2 \quad (2) \end{array}\right. \end{cases};$$

(1) $x^2+y^2=5^2$; график этой фигуры это окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 5;

(2) $x^2+(y+9)^2=2^2$; график этой фигуры это окружность с центром в точке $(0;-9)$ и радиусом 2;

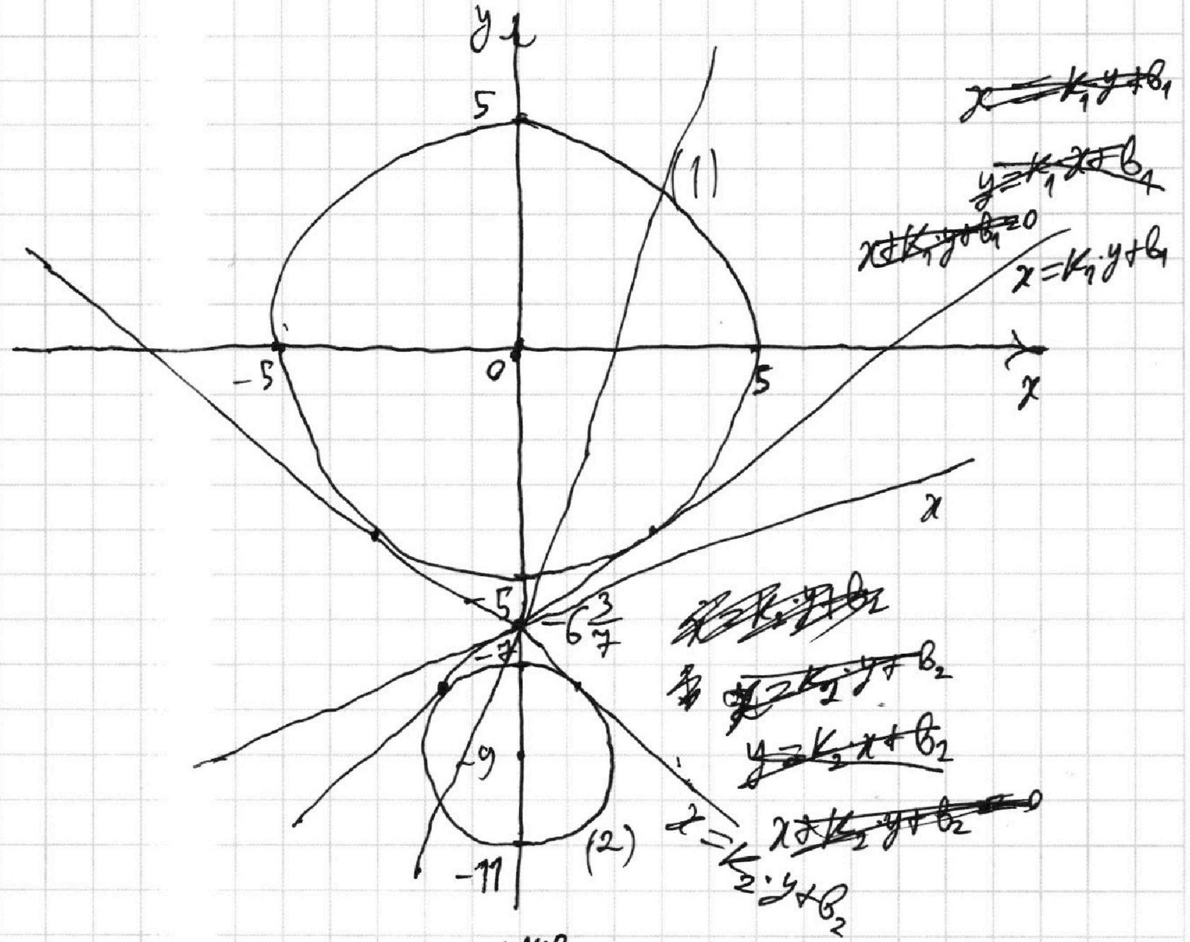
(3) $\cancel{x = y\cdot\left(-\frac{6a}{5}\right)+\frac{b}{5}}$; $x=\left(-\frac{6a}{5}\right)\cdot y+\frac{b}{5}$ график данного уравнения это прямая, негоризонтальная; при $\left(-\frac{6a}{5}\right)=0$ эта прямая становится параллельна оси ординат;

2) Изобразим все это на графике:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) Нарисуем общие ~~касательные~~ внутренние касательные к этим двух окружностям; это прямые $\cancel{y = k_1 \cdot x + b_1}$, а $\cancel{y = k_2 \cdot x + b_2}$ $x = k_1 \cdot x + b_1$; $x = k_2 \cdot x + b_2$;

$\cancel{0 = x + k_1 \cdot y + b_1;\ x + k_2 y + b_2 = 0;}$

~~Заметим, что~~ Зафиксируем значение переменной a; тогда при изменении переменной b, прямая ~~$y =$~~ $x = \left(-\frac{6a}{5}\right) \cdot y + \frac{b}{5}$ будет параллельно ~~переносится~~ переноситься вдоль оси абсцисс; ~~тогда, если~~

~~$\left(-\frac{6a}{5}\right) = k_1$, то прямая $x = k_1 \cdot y + b_1$ будет получена~~

~~параллельным переносом из прямой $x = \left(-\frac{6a}{5}\right) \cdot x + b$;~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~но при параллельном переносе прямой $x=k_1\cdot y+b_1$ влево вдоль оси Ox эта прямая не будет пересекать (2)-ую окружность, т.е. не будет 4 решения у системы; а при переносе вправо, она не будет пересекать~~

~~Рассмотрим все прямые $y=k_3\cdot x+b_3$,~~

~~где $k_1\le k_3\le k_2$ $(k_1<0$ и $k_2>0)$;~~

~~$k_2\le k_3\le k_1$ $(k_1>0;\ k_2<0)$; Тогда прямые $y=k_1\cdot x+b_1$ и $y=k_2\cdot x+b_2$; $b_1\ne b_2$~~

~~$y-k_1x-b_1=0$; $d_0=\frac{0-k_1\cdot 0}{}$~~

4) Т.к. $x=k_1\cdot y+b_1$ — касательная к окружностям, то расстояния от точек $(0;0)$ и $(0;9)$ должны быть равны 5 и 2 соответственно, т.е.

$$\begin{cases} 5=\dfrac{|0+k_1\cdot 0+b_1|}{\sqrt{(-1)^2+k_1^2}} \\ 2=\dfrac{|0-9k_1+b_1|}{\sqrt{(-1)^2+k_1^2}} \end{cases}; \quad \begin{cases} 5\sqrt{k_1^2+1}=|b_1| \\ 2\sqrt{k_1^2+1}=|b_1-9k_1| \end{cases},$$

~~$3\sqrt{k_1^2+1}=9k_1$~~

~~$9k_1^2+9=81k_1^2$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$b_1^2 = 25(1+k_1^2)$; $(b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2)$;

$(b_1 - 9k_1)^2 = \frac{4}{25} \cdot b_1^2$; $\frac{21}{25} b_1^2 - 18 b_1 \cdot k_1 + 81 \cdot k_1^2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7}k_1 \end{array}\right.;$$

5) Если $b_1 = 15k_1$, то $|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2}$;

$9k_1^2 = 1+k_1^2$; $k_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$;

6) Если $b_1 = \frac{45}{7}k_1$, то $\left|\frac{45}{7}k_1\right| = 5\sqrt{1+k_1^2}$;

$\frac{45 \cdot 45}{7 \cdot 7} \cdot k_1^2 = 25(1+k_1^2)$; $\frac{81}{49} k_1^2 = 1+k_1^2$;

$\frac{32}{49} k_1^2 = 1$; $k_1^2 = \frac{49}{32}$; $k_1 = \pm\frac{7}{\sqrt{32}}$;

7) Если $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$, то $b_1 = \frac{15}{\sqrt{8}}$, тогда уравнение касательной будет: $x \pm \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{15}{\sqrt{8}}$; ~~[illegible]~~

при $x = 0$; $y = -15$; тогда $(0; -15)$ — точка пересечения этой касательной и оси ординат; тогда, т.к. она не лежит на отрезке, соединяющем центры окружностей (1) и (2), то $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ не подходит; аналогично при $k_1 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$ и $b_1 = -\frac{15}{\sqrt{8}}$ не будет подходить;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Если $k_1 = \frac{7}{\sqrt{32}}$, то $b_1 = \frac{45}{7}\cdot\frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{45}{\sqrt{32}}$,

тогда уравнение касательной будет:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}}\cdot y + \frac{45}{\sqrt{32}}; \text{ при } x = 0:$$

$y = -\frac{45}{7} = -6\frac{3}{7}$, где $0 < -6\frac{3}{7} < -9$,

значит уравнения:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}} y + \frac{45}{\sqrt{32}} \text{ и } x = -\frac{7}{\sqrt{32}} y - \frac{45}{\sqrt{32}}$$

Это уравнения внутренних касательных;

9) Рассмотрим все прямые $x + k_0\cdot y + b_0 = 0$,

где $k_0\cdot(-6\frac{3}{7}) + b_0 = 0$, т.е. $b_0 = \frac{45}{7}k_0$;

и $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, т.е. $x = k_0 y + \frac{45}{7}k_0$

Эта прямая проходит через точку $(0; -6\frac{3}{7})$ и из-за $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, она пересекает каждую из окружностей не более чем в одной точке, тогда при параллельном переносе этой прямой вдоль оси Ox, она будет ещё больше отдаляться от одного из центров окружностей, и не сможет пересекать две окружности в двух точках каждую, т.е. у системы не будет более 2 решений; аналогично при $k_0 \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

10) Но при $-\frac{7}{\sqrt{32}} < k_0 < \frac{7}{\sqrt{32}}$, прямая $x = k_0 y + b_0$ будет пересекать каждую из окружностей в двух точках, т.е. у системы будет ровно 4 решения;

11) Наша прямая (3) это $x = \left(-\frac{6a}{5}\right) \cdot y + \frac{b}{5}$;

~~мы сможем взять тоже $\frac{b}{5}$, чтобы~~

~~прямая $x = k_0 y + \frac{b}{5}$~~ мы уже поняли, что, если $-\frac{6a}{5} \leq -\frac{7}{\sqrt{32}}$ или $-\frac{6a}{5} \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$, то любая прямая, полученная параллельным переносом вдоль оси Ox прямой $x = \left(-\frac{6a}{5} \cdot y\right)$, не сможет пересекать окружности в 4-ёх точках;

если $-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}$, то взяв $\frac{b}{5} = \frac{45}{7} \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right)$;

т.е. $b = \frac{5 \cdot 45}{7} \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right)$; мы получим прямую, проходящую через точку $\left(0; -\frac{45}{7}\right)$ и пересекающую окружности в четырёх точках, тогда

$-\frac{7}{\sqrt{32}} < \frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}$; $-\frac{35}{6\sqrt{32}} < a < \frac{35}{6\sqrt{32}} = \frac{35 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 32} =$

$= \frac{35 \cdot 4\sqrt{2}}{6 \cdot 32} = \frac{35\sqrt{2}}{48}$; тогда $-\frac{35\sqrt{2}}{48} < a < \frac{35\sqrt{2}}{48}$;

Ответ: $\left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

Решение:

1) Пусть $\log_{11} x = b$ ($b \neq 0$) и $\log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) = a$ ($a \neq 0$),

тогда $a + b = \log_{11} \frac{xy}{2}$, т.е.

$\cancel{(a+b)}^{11}$ $11^{a+b} = \frac{xy}{2}$, $xy = 2 \cdot 11^{a+b}$;

2) $b^4 - \frac{6}{b} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{b} - 5 \;/ \cdot b \neq 0$;

$b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 0$;

$a^4 + \frac{1}{a} = \left(-\frac{13}{3}\right) \cdot \frac{1}{a} - 5 \;/ \cdot a \neq 0$;

$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$; тогда

$a^5 + b^5 + 5b + 5a = 0$;

$(a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^2 + b^4) + 5(a+b) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ \begin{cases} a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^2 + b^4 + 5 = 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

Если $a + b = 0$, то $xy = 2 \cdot 11^0 = 2$; для этого просто возьмём по корню из уравнений $a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$ и $b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 0$, которые точно найдутся (т.к. степень многочленов в уравнениях нечётна) и не будут равны 0, т.к. $\frac{16}{3} \neq 0$ и $\left(-\frac{16}{3}\right) \neq 0$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из этих двух корней, возведением их в степень равную корням получим x и $\left(\frac{1}{2}y\right)$,

где будет выполняться, что $xy=2$;

3) ~~Посмотрим на выражение:~~

$A = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$; т.к. $a \neq 0$ и $b \neq 0$,

докажем, что $A > 0$ при любых a и b;

$A = a^4 + b^4 - ab(a^2 - ab + b^2)$;

Посмотрим на выражение $B = a^2 - ab + b^2$

как на квадратное относительно переменной a,

график этой функции это парабола, ветви

которой направлены вверх; тогда $D = b^2 - 4b^2 =$

$= -3b^2$, где $b \neq 0$, тогда $D < 0$, значит парабола

целиком лежит выше оси абсцисс, значит

$a^2 - ab + b^2 > 0$;

3) $A = a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 + a^2b^2 =$

$= a^3(a-b) + b^3(b-a) + a^2b^2 =$

$= (a^3 - b^3)(a-b) + a^2b^2$; т.к. $f(x) = x^3 \nearrow$ нал,

то $(a^3 - b^3)$ и $(a-b)$ имеют одинаковый знак,

тогда $(a^3 - b^3)\cdot(a-b) \geq 0$, но $a^2b^2 > 0$ (т.к. $a \cdot b \neq 0$),

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

значит $A = (a^3-b^3)(a-b)+a^2b^2 \geq 0$, тогда
$(A+5) > 0$, значит равенство
$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+5=0$ невозможно;
тогда ~~(a+b)~~ ~~=0~~ ~~тогда~~ $a+b=0$;

4) возьмём корень уравнения $b^5+5b-\frac{16}{3}=0$, b_0,
~~где~~ он точно существует (т.к. многочлен
в левой части уравнения нечетной степени);
и $b_0 \neq 0$, т.к. $-\frac{16}{3} \neq 0$;

Аналогично возьмём корень уравнения $a^5+5a+\frac{16}{3}=0$,
$a_0 = (-b_0)$; ~~где он точно существует и $a_0 \neq 0$;~~

~~тогда, т.к.~~ т.к. $(-b_0)^5+5\cdot(-b_0)+\frac{16}{3}=$
$= -\frac{16}{3}+\frac{16}{3}=0$; тогда ~~сумма~~
$(a_0+b_0) = -b_0+b_0=0$; значит

$x = 11^{b_0}$ и $\frac{1}{2}y = 11^{a_0}$, тогда $\frac{xy}{2}=11^0$; $xy=2$;

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^5+5a+b^5+5b=0;\quad (a+b)-?\quad a+b\neq 0$

$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+5=0;$

$(a+b)^4=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=$

$=a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4=$

$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^4-5a^3b-5a^2b^2-5ab^3+5=0;$

$(a+b)^4-5(a^3b+a^2b^2+ab^3-1)=0;$

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

a^2-ab+b^2

$-5ab(a^2+ab+b^2)$

$\cancel{a^4+b^4-ab(b^2-ab+a^2)+b^4}$

$a>b;$

$b^4-ab^3+a^4-a^3b$

$b^3(b-a)+a^3(a-b);$

$(a^3-b^3)(a-b)$

a^2-ab+b^2

$D=b^2-4b^2=-3b^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

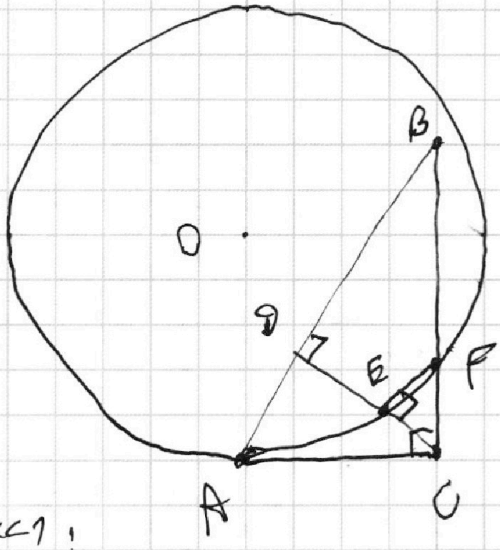
$a^5+5a+\frac{16}{3}=0$

$b^5+5b-\frac{16}{3}=0$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}-?$

$(a+b)-?$

$BD:DA=5:2;$



$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=0$

$\log_n x+\log_n y=\log_n xy;$

$\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>1\end{array}\right.;$

$\log_n^4 x-\frac{6}{\log_n x}=\log_{x^3} 11^{-2}-5;\quad \log_n^4 x-\frac{6}{\log_n x}=(-2)\cdot\log_{x^3} n-5;$

$\log_n^4 x-\frac{6}{\log_n x}=\frac{-2}{\log_n x^3}-5;\quad \log_n^4 x-\frac{6}{\log_n x}=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{\log_n x}-5;$

$b^4-\frac{6}{b}=-\frac{2}{3b}-5;\quad b^5-6=-\frac{2}{3}-5b;$

$b^5+5b-5\frac{1}{3}=0;\quad b^5+5b-\frac{16}{3}=0;$

$\log_{11}^4\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{1}{\log_n\left(\frac{y}{2}\right)}=\log_{\left(\frac{y}{2}\right)^3}(11)^{-13}-5;$

$-\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_n\frac{y}{2}}-5;$

$a^4+\frac{1}{a}=-\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{a}-5;$

$a^5+1=-\frac{13}{3}-5a;\quad a^5+5a+\frac{16}{3}=0;$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{x + \left(\frac{6a}{5}\right)y + \frac{b}{5} = 0}$ $\qquad x + \left(\frac{6a}{5}\right)y - \frac{b}{5} = 0;$

$x + k_1 \cdot y + b_1 = 0;$

$\frac{|b_1|}{\sqrt{1+k_1^2}} = 5 \;; \qquad \frac{|b_1 - 9\cdot k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}} = 2;$

$b_1^2 = 25\cdot(1+k_1^2);$

$(b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2);$

$b_1^2 - 18 b_1 \cdot k_1 + 81\cdot k_1^2 = \frac{4}{25}\cdot b_1^2;$

$\frac{21}{25}\cdot b_1^2 - 18 b_1\cdot k_1 + 81 k_1^2 = 0;$

$\frac{D}{4} = 9^2 - \frac{21}{25}\cdot 81 = \frac{4}{25}\cdot 81; \left(\frac{2\cdot 9}{5}\right)^2$

$b_1 = \left(\frac{9 \pm \frac{18}{5}}{\frac{21}{25}}\right)\cdot k_1$

$9 + \frac{18}{5} = \frac{45+18}{5} = \frac{63}{5};$

$9 - \frac{18}{5} = \frac{27}{5};$

$\frac{63\cdot 25}{5\cdot 21} = 15$

$\frac{27\cdot 25}{5\cdot 21} = \frac{45}{7}$

$\left[\begin{array}{l} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7}\cdot k_1 \end{array}\right.$

$|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2};$

$15^2 k_1^2 = 25(1+k_1^2);$

$9k_1^2 = k_1^2 + 1;$

$8k_1^2 = 1;$

$k_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{8}};$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

14:42

$10 \cdot \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x;$

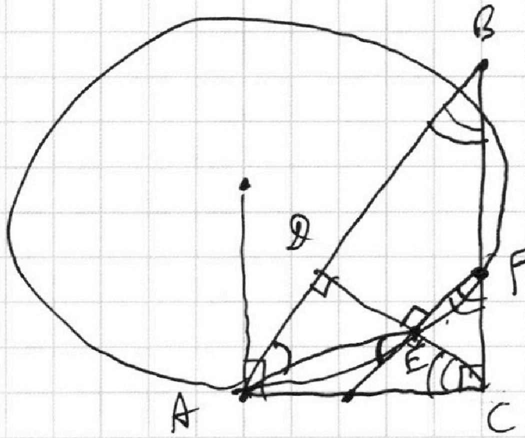
$\arccos x \in [0;\pi]$

$\arccos(\sin x) = \alpha$

$\sin x = \cos\alpha$

$10\alpha = 9\pi - 2x$

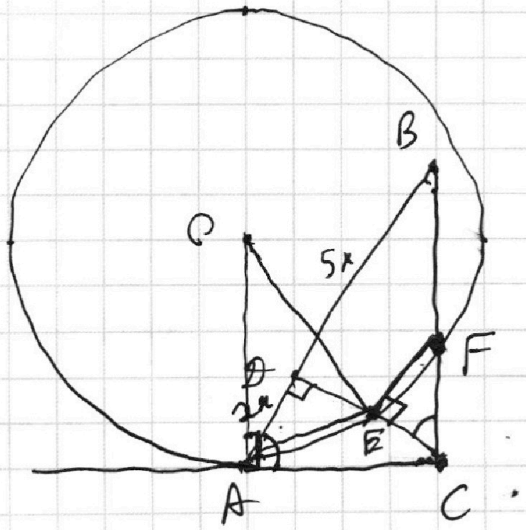
$\alpha = \frac{9\pi - 2x}{10}$



$AB : BD = 7 : 5;$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$

$\sqrt{2x \cdot 5x} = \sqrt{10}\,x$



$\frac{BD}{AB} = \frac{5}{7}$

$\cos\frac{9\pi - 2x}{10} = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{2x}{10}\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{2x - 4\pi}{10}\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = \sin x$

~~$\frac{x - 2\pi}{10} = x + 2\pi k$~~

~~$x - 2\pi = 10x + 20\pi k$~~

~~$-2\pi + 20\pi k = 9x;$~~

$\triangle ADE \sim \triangle CDA;$

$\frac{AD}{CD} = \frac{DE}{AD};$

$DE \cdot DC = AD^2;$

$0 \le \frac{9\pi - 2x}{10} \le \pi$

$0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$

$-9\pi \le -2x \le \pi;$

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2};$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x+y \geq 11$

$y+z \geq 13$

$x+z \geq 28$

$ab : (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$; $bc : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13})$

$ac : (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28})$; $abc - ?$

$x+y+z \geq 26$

$z \geq 13$

$x \geq 13$

$y =$

$x+y \geq 13$

$y+z \geq 21$

$x+z \geq 25$

$x+y+z \geq 30$

$z \geq 17$

$y \geq 4$

$x \geq 9$

$a : 2^x$

$b : 2^y$

$c : 2^z$

ab

bc

ac

$(x^4 + y^2) \geq 6$

$y^2 + z^{12} \geq 14$

$x^4 + z^{12} \geq 16$

$x+y+z \geq 18$

a	b	c
2^4	2^2	2^{12}
3^9	3^4	3^{17}
5^{14}	1	5^{14}

$\frac{27}{6}\pi =$

$= \frac{9}{2}\pi$

$\sin\left(\frac{x-2\pi}{5}\right) = \sin x$; $\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4{,}5\pi}$

$x+y \geq 13$ $\quad$ $x+y \geq 11$

$y+z \geq 21$ $\quad$ $y+z \geq 13$

$x+z \geq 28$

$x+y+z \geq 26$

1) $\frac{x-2\pi}{5} = x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$x - 2\pi = 5x + 10 \cdot \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$;

$10\pi k - 2\pi = 4x, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi k - \pi}{2}$;

$k=0$

$k=1$

$k=2$

$k=3$

2) $\frac{x-2\pi}{5} = \pi - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x - 2\pi = 5\pi - 5x + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$6x = 7\pi + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$b_1 = 5\sqrt{1+k^2}$

$b_1 - 9k_1 = 2\sqrt{1+k^2}$;

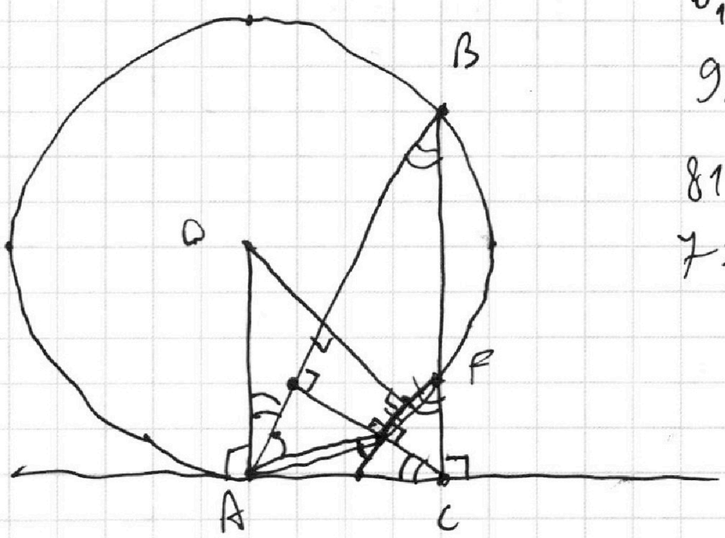
$9k_1 = 3\sqrt{1+k^2}$;

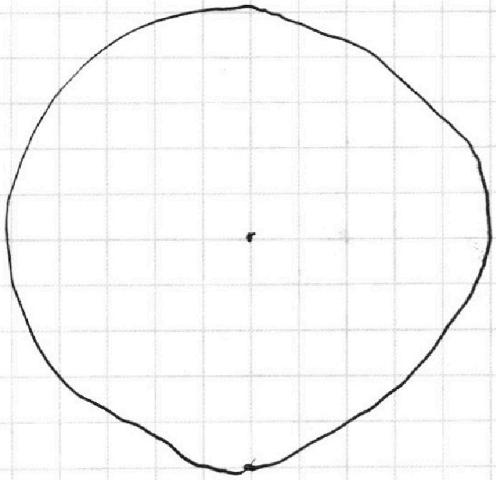
$81k^2 = 9+9k^2$;

$72k^2 = 9$

$k^2 = \frac{1}{8}$

$k = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$;

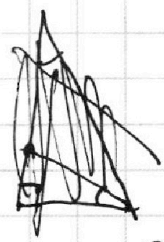


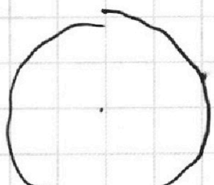


$CF \cdot CB = CA^2$;

$\frac{CF}{CA} = \frac{CA}{CB}$;

$\triangle ACF \sim \triangle BCA$;





$x = k_1 y + b_1$;

$-x + k_1 y + b_1 = 0$;

$d_1 = \frac{0 - 9k_1 + b_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 2$; $d_0 = \frac{0 + 0 + b_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 5$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

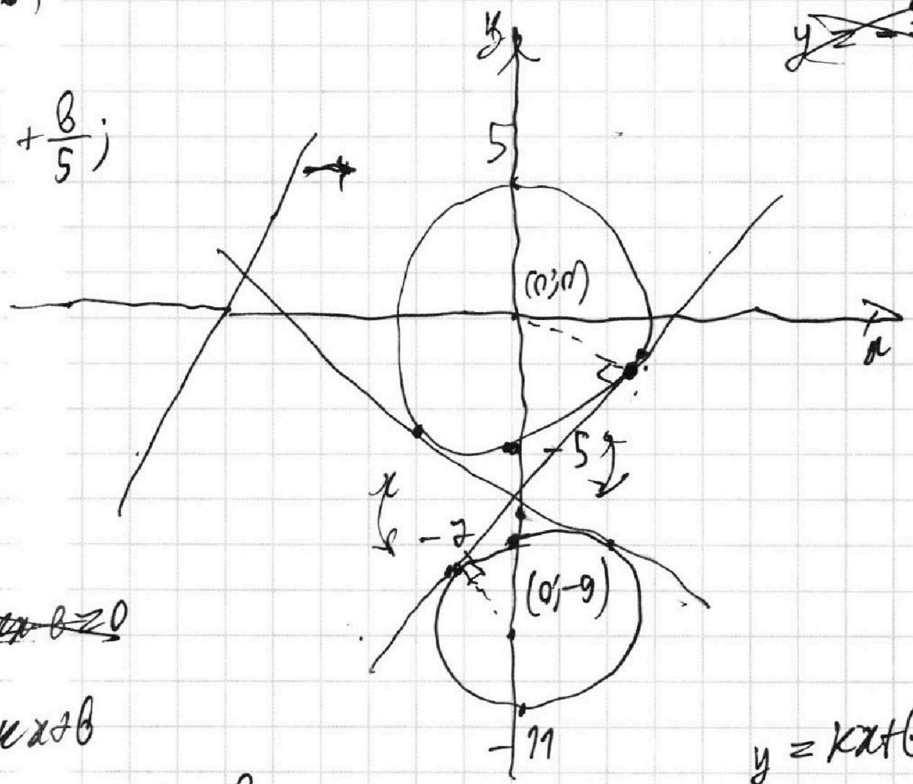
$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right. \end{cases};$$

4 решения;
Найти все a,
где ∃ b;

1) Если $a=0$;
2) Если $a\neq 0$;

$\cancel{y=-\frac{5x}{6a}+\frac{b}{6a}}$;

$x = y\cdot\left(\frac{6a}{5}\right)+\frac{b}{5}$;



$\cancel{y-kx-b=0}$

$y=kx+b$

$M(x_0;y_0)$ $d=\frac{y_0-kx_0-b}{\sqrt{1+k^2}}$;

$y=kx+b$;

$y - k\cdot x+b=0$

$\frac{b}{b-9}=\frac{5}{2}$;

$2b=5b-45$;

$3b=45$;

$b=15$; $k=\pm\sqrt{8}$

$d_0=\frac{b}{\sqrt{1^2+k^2}}=5$;

$d_{-9}=\frac{-9+b}{\sqrt{1+k^2}}=2$;