



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_4^4 x - 6 \log_{11} 11 = \log_{9^3} \frac{1}{11} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Решение:

1) Пусть  $a: 2^x, b: 2^y, c: 2^z$ , где

$x, y, z \in \mathbb{Z}$  и  $x, y, z \geq 0$ ;

2) п.к.  $(ab): 2^6$ , но  $2^x \cdot 2^y \geq 2^6$ , т.е.

$x+y \geq 6$ , аналогично  $y+z \geq 14$ ,  $x+z \geq 16$ , сложив эти три неравенства,

получим  $2 \cdot (x+y+z) \geq 6+14+16=36$ ,  $(x+y+z) \geq 18$ ,

но  $2^x \cdot 2^y \cdot 2^z \geq 2^{18}$ , получим  $(a \cdot b \cdot c): 2^{18}$ ;

3) Аналогично для числа 3, пусть  $a: 3^{x_1}, b: 3^{y_1}, c: 3^{z_1}$ ,  
 $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}, x_1, y_1, z_1 \geq 0$ ;  $x_1+y_1 \geq 13$ ,  $y_1+z_1 \geq 25$ ,  
получим  $x_1+y_1+z_1 \geq \frac{13+29+25}{2} = \frac{34+25}{2} = \frac{59}{2} = 29,5$ ;

получим  $x_1+y_1+z_1 \geq 30$ , значит  $(a \cdot b \cdot c): 3^{30}$ ;

4) Аналогично для числа 5,  $a: 5^{x_2}, b: 5^{y_2}, c: 5^{z_2}$ ,

$x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}, x_2, y_2, z_2 \geq 0$ , получим

$x_2+y_2+z_2 \geq \frac{11+13+28}{2} = \frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$ , получим

~~$(a \cdot b \cdot c): 5^{26}$~~

5) ~~значит  $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$  (т.к. 2, 3, 5 - простые~~

~~числа); ~~неравенство выполняется~~ ~~каждое~~ ~~для~~~~

~~$a \geq 5$~~  5) мы знаем, что  $x_1+y_1 \geq 13$ ,  $y_1+z_1 \geq 21$ ,

$x_1+z_1 \geq 25$ , получим при  $x_1=9, y_1=4$  и  $z_1=17$ , все

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нум неравенства будут выполнены; нум знам

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq 30;$$

6) Мы знаем, что  $x_2 + y_2 \geq 11$ ,  $y_2 + z_2 \geq 13$ ,  $x_2 + z_2 \geq 28$ ,

кроме, так  $y_2 \geq 0$ , то  $x_2 + y_2 + z_2 \geq 28$ ;

нум  $x_2 \geq 14$ ,  $y_2 \geq 0$ ,  $z_2 \geq 14$ , все

нум неравенства будут выполнены, нум знам

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 28; \text{ и}$$

7) Тогда  $a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ ;

8) Если  $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^4$ ,  $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$ ,

то  $a \cdot b \cdot c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$  и

$$a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} ; (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}); b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} ; (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14})$$

~~$$a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} ; (2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28})$$~~

$$a \cdot c = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} ; (2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28});$$

Ответ  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

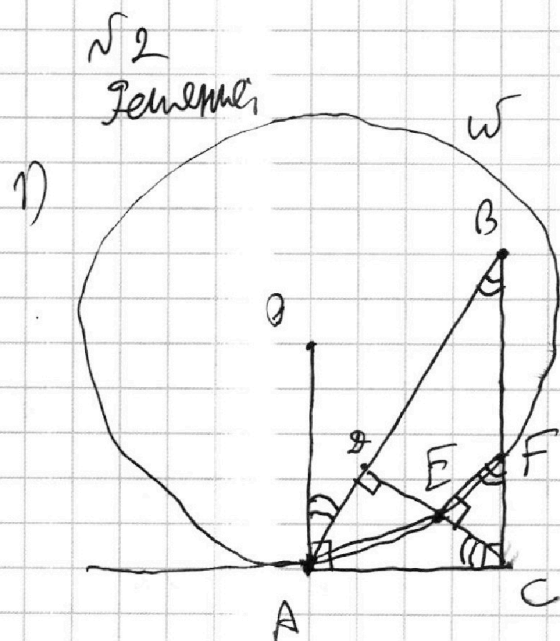
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2)  $AD : DB = 2 : 5$ ; пусть  $AD = 2 \cdot x$ , где  $x > 0$ ,  
тогда  $BD = 5 \cdot x$ ;  $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{5 \cdot x \cdot 2 \cdot x} = \sqrt{10} \cdot x$ ;  
 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(2x)^2 + (\sqrt{10}x)^2} = \sqrt{14} \cdot x$ ;  
 $BC = \sqrt{35} \cdot x$ ;

3) Если  $B \in W$ , то  $CF \cdot CB = CA^2$ ;  
 $CF \cdot CB = 14x^2$ ;  ~~$CF \cdot CB = 14x^2$~~   $CF = \frac{14x^2}{BC} = \frac{14x^2}{\sqrt{35}x} =$   
 $= \frac{7 \cdot 2 \cdot x}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{35} \cdot x}{5}$ ; тогда, так как  $\triangle ADC \sim \triangle CBF$ ,

то  $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CBF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{14} \cdot x}{\frac{2\sqrt{35} \cdot x}{5}}\right)^2 =$   
 $= \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 5}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$ ;

Ответ:  $\frac{5}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Решение:

$$1) 10 \cdot \sin \alpha \cos(\sin \alpha) = 9\pi - 2\alpha;$$

Пусть  $\alpha \cos(\sin \alpha) = L$ , где  $L \in [0, \pi]$ , тогда  
 $\cos L = \sin \alpha$ ; и  $10 \cdot L = 9\pi - 2\alpha$ ,  $L = \frac{9\pi - 2\alpha}{10}$ ;

$$\text{значит } \begin{cases} \cos\left(\frac{9\pi - 2\alpha}{10}\right) = \sin \alpha, \text{ и.о.} \\ 0 \leq L \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{2\alpha}{10}\right) = \sin \alpha; \\ 0 \leq \frac{9\pi - 2\alpha}{10} \leq \pi \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha - 2\pi}{5}\right) = \sin \alpha, \\ -9\pi \leq -2\alpha \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha - 2\pi}{5}\right) = \sin \alpha; \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{9\pi}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{\alpha - 2\pi}{5} = \alpha + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha - 2\pi}{5} = \pi - \alpha + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4,5 \cdot \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha = -2\pi + 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ 6\alpha = 7\pi + 10\pi m, m \in \mathbb{Z}; \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4,5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5\pi h - \pi}{2}, h \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \alpha = \frac{7\pi + 10\pi m}{6}, m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 4,5 \cdot \pi \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad x = \frac{5\pi h - \pi}{2}; \quad h \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h > 2, \text{ то } x > \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } h < 0, \text{ то } x < -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{Таким образом } 0 \leq h \leq 2; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ соответственно}$$

значения

$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array} \right];$$

$$(2) \quad x = \frac{7\pi + 10\pi m}{6}, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } m > 2, \text{ то } x > \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2};$$

$$\text{Если } m < -1, \text{ то } x < \frac{-3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}, \text{ соответственно}$$

$$\text{Если } -1 \leq m \leq 2, \text{ то } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ поэтому}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array} \right];$$

значения

$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{array} \right];$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}.$$

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$1) \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 = 25)(x^2 + y^2 + 18y + 72) = 0 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5} \quad (3) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \quad (1) \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \quad (2) \end{cases} \end{cases}$$

(1)  $x^2 + y^2 = 5^2$ ; график этой фигуры это окружность с центром в точке  $(0; 0)$  и радиусом 5;

(2)  $x^2 + (y+9)^2 = 2^2$ ; график этой фигуры это окружность с центром в точке  $(0; -9)$  и радиусом 2;

(3)  ~~$x = y \cdot \left(-\frac{6a}{5}\right) + \frac{b}{5}$~~ ; график ~~этой~~ прямой равенства это прямая, перпендикулярная; при  $\left(-\frac{6a}{5}\right) = 0$  эта прямая становится параллельной оси  $Ox$ ;

2) Изобразим все это на графике:

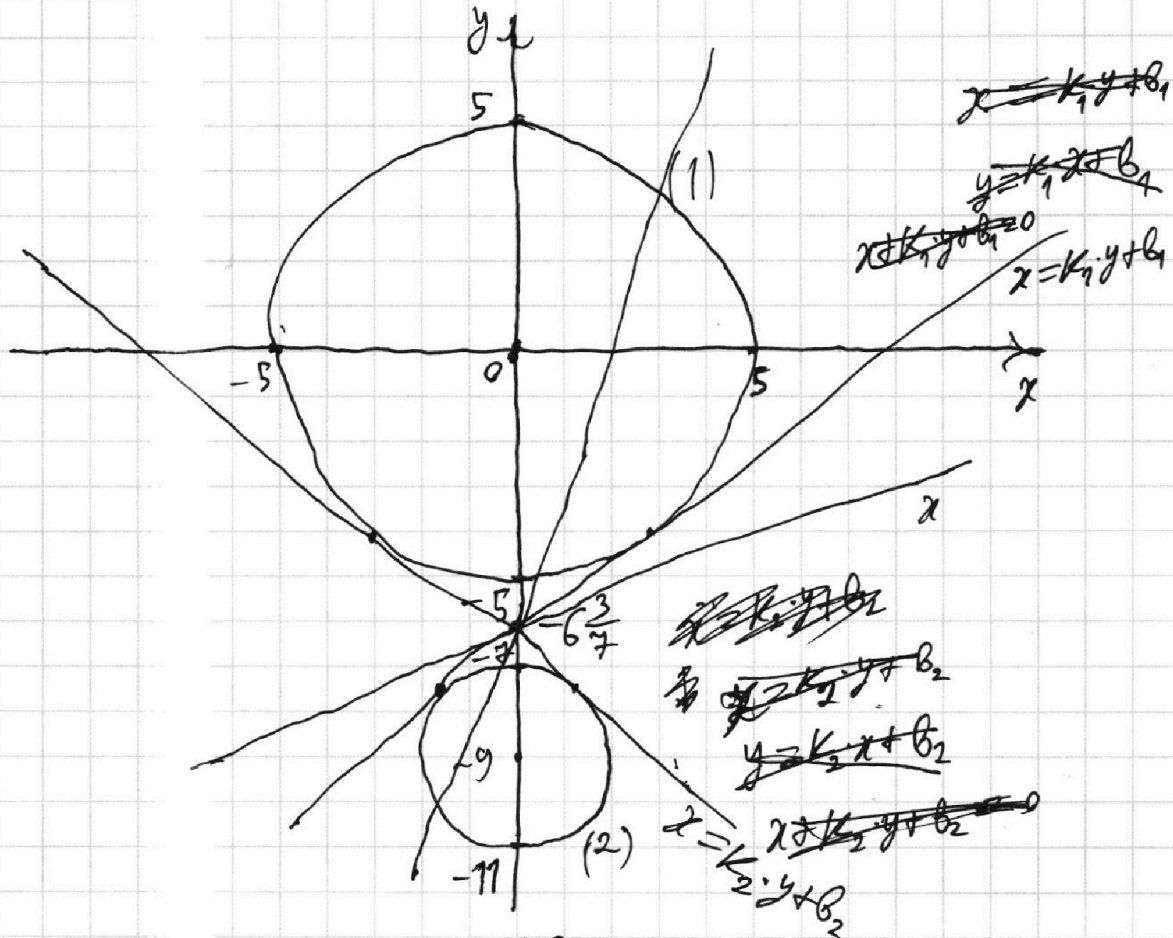
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) Записать уравнение касательных к двум окружностям  
 $x = k_1 \cdot x + b_1$ ;  $x = k_2 \cdot x + b_2$   
 это уравнение  $y = k_1 \cdot x + b_1$  и  $y = k_2 \cdot x + b_2$   
 $0 = x - k_1 \cdot y + b_1$ ;  $0 = x - k_2 \cdot y + b_2$   
 Записать, что Зафиксировать значение параметра  $a$

тогда при извлечении параметра  $b$ ; уравнение  $x = (-\frac{6a}{5}) \cdot y + \frac{b}{5}$   
 ~~$x = (-\frac{6a}{5}) \cdot y + \frac{b}{5}$~~  будет касательной

касательная будет им абсцисс; тогда, если  
 $(-\frac{6a}{5}) = k_1$ , то уравнение  $x = k_1 \cdot y + b_1$  будет касательной  
 касательная касательная уравнение  $x = (-\frac{6a}{5}) \cdot x + b$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~но при параллельном переносе прямой  $x = k_1 y + b_1$  влево вдоль оси  $Ox$  эта прямая не будет пересекать (2)-ую окружность, т.е. не будет 4 решения у системы; а при переносе вправо, она не будет пересекать~~

~~функции все прямые  $y = k_3 \cdot x + b_3$ ,~~

~~где  $k_1 \leq k_3 \leq k_2$  ( $k_1 < 0$  и  $k_2 > 0$ );~~

~~$k_2 \leq k_3 \leq k_1$  ( $k_1 > 0$ ;  $k_2 < 0$ );~~ ~~Всегда прямые  $y = k_1 x + b_1$  и  $y = k_2 x + b_2$  пересекаются~~

~~$y = k_1 x + b_1 \geq 0$ ;  $d_0 = 0 - k_1 \cdot 0 = 0$~~

4) ~~т.к.  $k_1 < 0$~~  ~~касательная к окружности,~~  
но касательная от точек  $(0;0)$  и  $(0;9)$  касается

двух окружностей 5 и 2 соответственно, т.е.

$$\begin{cases} 5 = \frac{10 + k_1 \cdot 0 + b_1}{\sqrt{(1-0)^2 + k_1^2}} \\ 2 = \frac{10 - 9k_1 + b_1}{\sqrt{(1-0)^2 + k_1^2}} \end{cases}; \begin{cases} 5\sqrt{k_1^2 + 1} = |b_1| \\ 2\sqrt{k_1^2 + 1} = |b_1 - 9k_1| \end{cases}$$

~~$9k_1^2 + 9 = 81k_1^2$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1^2 = 25(1+k_1^2); \quad (b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2);$$
$$(b_1 - 9k_1)^2 = \frac{4}{25} b_1^2; \quad \frac{21}{25} b_1^2 - 18 b_1 k_1 + 81 k_1^2 = 9$$

$$\left[ \begin{array}{l} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7} k_1 \end{array} \right];$$

5) Если  $b_1 = 15k_1$ , то  $|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2}$ ;

$$9k_1^2 = 1+k_1^2; \quad k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{8}};$$

6) Если  $b_1 = \frac{45}{7} k_1$ , то  $|\frac{45}{7} k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2}$ ;

$$\frac{45 \cdot 45}{7 \cdot 7} k_1^2 = 25(1+k_1^2); \quad \frac{81}{49} k_1^2 = 1+k_1^2;$$

$$\frac{32}{49} k_1^2 = 1; \quad k_1^2 = \frac{49}{32}; \quad k_1 = \pm \frac{7}{\sqrt{32}};$$

2) Если  $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ , то  $b_1 = \frac{15}{\sqrt{8}}$ , тогда уравнение

касательной будет:  $x \pm \frac{y}{\sqrt{8}} + \frac{15}{\sqrt{8}} = 0$

при  $x \geq 0$ ;  $y = -15$ ; тогда  $(0; -15)$  — точка

пересечения этой касательной и оси  $Oy$ ; тогда,

так как она не лежит на отрезке, соединяющем

центры окружностей (1) и (2), то  $k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$  не

подходит; аналогично при  $k_1 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$  и  $b_1 = -\frac{15}{\sqrt{8}}$

не будет касательной;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) Если  $k_1 = \frac{7}{\sqrt{32}}$ , то  $b_1 = \frac{45}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{45}{\sqrt{32}}$ ,

тогда уравнение касательной будет:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}} y + \frac{45}{\sqrt{32}}; \text{ или } x = 0;$$

$$y = -\frac{45}{7} = -6\frac{3}{7}, \text{ где } 0 < -6\frac{3}{7} < -9,$$

значит уравнения:

$$x = \frac{7}{\sqrt{32}} y + \frac{45}{\sqrt{32}} \text{ и } x = -\frac{7}{\sqrt{32}} y - \frac{45}{\sqrt{32}}$$

это уравнения внутренних касательных;

9) Запишем все прямые ~~и~~  $x + k_0 y + b_0 = 0$ ,

где  $k_0 \cdot (-6\frac{3}{7}) + b_0 \geq 0$ ; т.е.  $b_0 \geq \frac{45}{7} k_0$

и  $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$ , т.е.  $x = k_0 y + \frac{45}{7} k_0$

Эта прямая проходит через точку  $(0; -6\frac{3}{7})$

и из-за  $k_0 \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$ , она ~~не~~ пересекает каждую

из окружностей не далее чем в одной точке, тогда  
при параллельном переносе этой прямой вверх или

вниз, она будет ещё дальше отходить от ~~одной~~ <sup>одной</sup>

из центров окружностей; и не сможет пересекать

две окружности в двух точках каждую, т.е. у Силена

не будет более 2 решений; следовательно при  $k_0 \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

10) Если  $\text{tg} \alpha = -\frac{7}{\sqrt{32}} \leq k_0 \leq \frac{7}{\sqrt{32}}$ , прямая  $x = k_0 y + b_0$  будет пересекать камуфляж из окружностей в двух точках, т.е. у системы будет ровно 4 решения;

11) Если  $\text{tg} \alpha > \frac{7}{\sqrt{32}}$  это  $x = (-\frac{6a}{5})y + \frac{b}{5}$ ;  
~~мы можем взять  $b = \frac{45}{5}$ , тогда~~

~~прямая  $x = k_0 y + \frac{b}{5}$  мы уже знаем,~~  
 т.е.  $\text{tg} \alpha = -\frac{6a}{5} \leq -\frac{7}{\sqrt{32}}$  или  $-\frac{6a}{5} \geq \frac{7}{\sqrt{32}}$ , т.е.

любая прямая, параллельная касательной  $x = (-\frac{6a}{5}y)$ , <sup>если  $a < 0$</sup>  не сможет пересекать ~~две~~ окружности в 4-ех точках;

или  $-\frac{7}{\sqrt{32}} < -\frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}$ , то возьмем  $\frac{b}{5} = \frac{45}{7} \cdot (-\frac{6a}{5})$ ;

т.е.  $b = \frac{5 \cdot 45}{7} \cdot (-\frac{6a}{5})$ ; мы получим прямую, проходящую через точку  $(0; -\frac{45}{7})$  и перескающую окружности в четырех точках, тогда

$$\frac{7}{\sqrt{32}} - \frac{7}{\sqrt{32}} < \frac{6a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}}; \quad -\frac{35}{6\sqrt{32}} < a < \frac{35}{6\sqrt{32}} = \frac{35 \cdot \sqrt{32}}{6 \cdot 32} =$$

$$= \frac{35 \cdot 4\sqrt{2}}{6 \cdot 32} = \frac{35\sqrt{2}}{48}; \quad \text{тогда} \quad -\frac{35\sqrt{2}}{48} < a < \frac{35\sqrt{2}}{48}$$

Ответ:  $(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Решение:

1) Пусть  $\log_m x = t$  и  $\log_m \left(\frac{1}{2}y\right) = a$ ,  
 $t \neq 0$   $a \neq 0$

тогда  $a + t = \log_m \frac{xy}{2}$ , т.е.

~~$(a+t)^{24} \cdot 71^{a+t} = \frac{xy}{2}$~~   $xy = 2 \cdot 71^{a+t}$ ;

2)  $t^4 - \frac{6}{t} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{t} - 5$  /  $t \neq 0$ ;

$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$ ;

$a^4 + \frac{1}{a} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{a} - 5$  /  $a \neq 0$ ;

$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$ ; тогда

$a^5 + t^5 + 5t + 5a = 0$ ;

$(a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 5(a+t) = 0$ ;

$\begin{cases} a+t = 0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 5 = 0 \\ a+t \neq 0 \end{cases}$ ;

Если  $a+t = 0$ , то  $xy = 2 \cdot 71^0 = 2$ ; для этого  
можно выбрать по корню из уравнения  $a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$

и  $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$ , которые можно подобрать

(п.к. степень многочленов в уравнениях четная)  
и не имеют корней 0, п.к.  $\frac{16}{3} \neq 0$  и  $\left(-\frac{16}{3}\right) \neq 0$ ;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~из этих двух корней, возведем их в степень равную корням  
получим  $x$  и  $(\frac{1}{2}y)$ ,  
где будет выталкиваться, что  $xy = 2$ ;~~

~~3) Рассмотрим на примере:~~

~~$$A = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4; \text{ т.к. } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0,$$~~

~~покажем, что  $A > 0$  при любых  $a$  и  $b$ ;~~

~~$$A = a^4 + b^4 - a \cdot b (a^2 - ab + b^2)$$~~

~~Рассмотрим на примере  $\beta = a^2 - ab + b^2$~~ ~~как на квадратное трехчленное переменная,~~~~график этой функции это парабола, ветви~~~~которой направлены вверх; тогда  $D = b^2 - 4a^2 =$~~  ~~$= -3b^2$ , где  $b \neq 0$ , тогда  $D < 0$ , значит парабола~~~~целиком лежит выше оси абсцисс, значит~~

~~$$a^2 - ab + b^2 > 0; \text{ тогда}$$~~

$$3) A = a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 + a^2b^2 =$$

$$= a^3(a-b) + b^3(b-a) + a^2b^2 =$$

$$= (a^3 - b^3)(a-b) + a^2b^2; \text{ т.к. } f(a) = a^3 \text{ растёт,}$$

то  $(a^3 - b^3)$  и  $(a-b)$  имеют одинаковый знак,

тогда  $(a^3 - b^3) \cdot (a-b) \geq 0$ , но  $a^2b^2 > 0$  (т.к.  $a, b \neq 0$ ),

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит  $A = (a^3 - b^3)(a - b) + a^2 + b^2 > 0$ , тогда

$(A + 5) > 0$ , значит доверитво

$a^4 - a^3 b + a^2 + b^2 - a b^2 + b^4 + 5 = 0$  невозможной

тогда ~~так же~~ ~~тогда~~  $a + b \geq 0$ ;

4) Возьмем корень уравнения  $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$ ,  $t_0$ ,

~~так же~~ он может существовать (п.к. многочлен

в левой части уравнения непрерывной функции);

и  $t_0 \neq 0$ , п.к.  $-\frac{16}{3} \neq 0$ ;

Аналогично возьмем корень уравнения  $a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$ ,

$a_0 = -t_0$ ; ~~так же~~ он может существовать и  $a_0 \neq 0$ ;

~~тогда~~, п.к. п.к.  $(-t_0)^5 + 5 \cdot (-t_0) + \frac{16}{3} =$

$= -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 0$ ; тогда ~~так же~~

$(a_0 + t_0) = -t_0 + t_0 = 0$ ; значит

$x = 11^{t_0}$  и  $\frac{1}{2}y = 11^{a_0}$ , тогда  $\frac{xy}{2} = 11^0$ ;  $xy = 2$ ;

Ответ: 2.



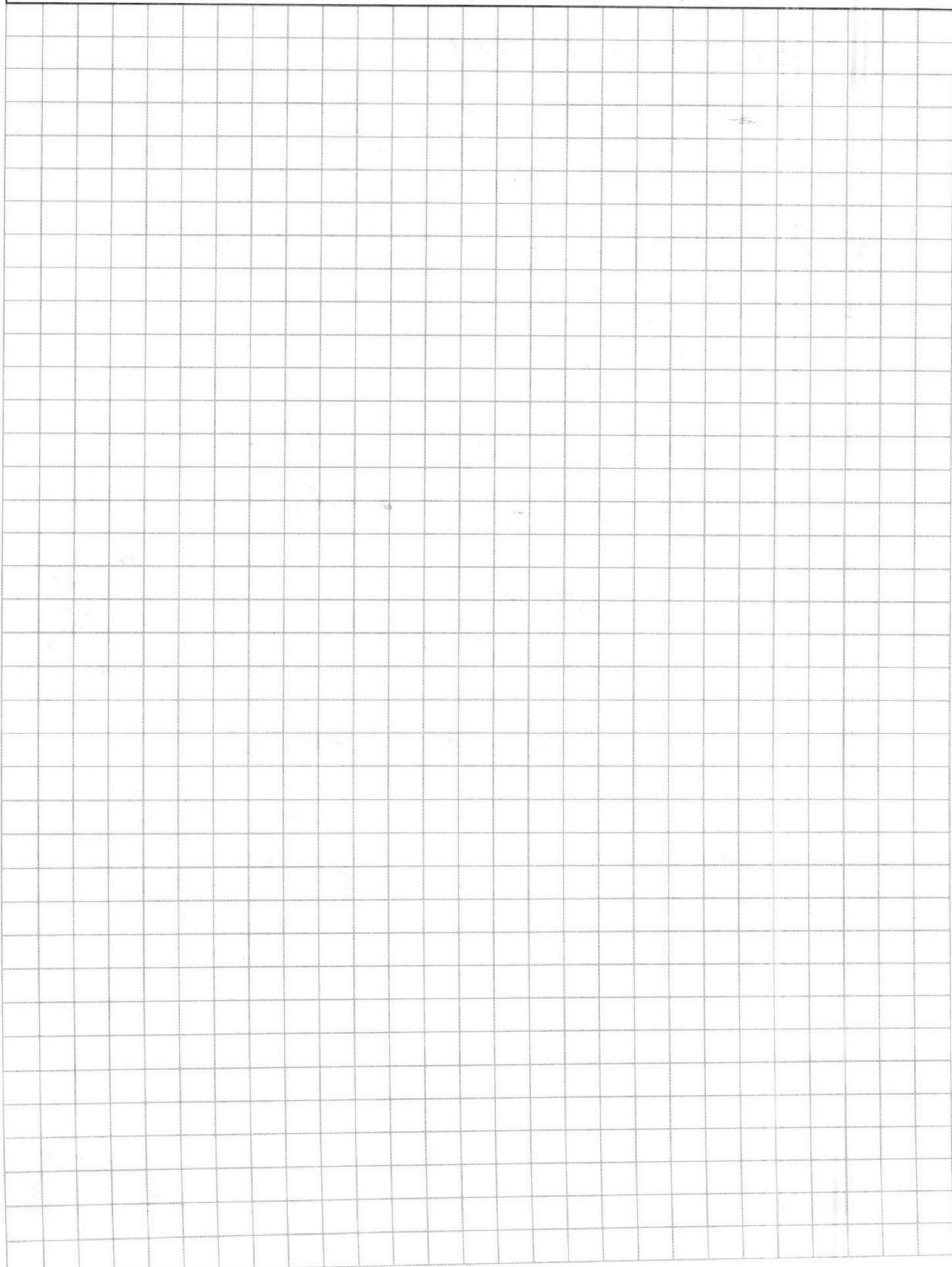
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^5 + 5a + b^5 + 5b = 0; \quad (a+b)^{-?} \quad a^2 + b^2$$

$$a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 + 5 = 0;$$

$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3)(a+b) =$$

$$= a^4 + 3a^3 b + 3a^2 b^2 + a b^3 + a^3 b + 3a^2 b^2 + 3a b^3 + b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 - 5a^3 b - 5a^2 b^2 - 5a b^3 + 5 = 0;$$

$$(a+b)^4 - 5(a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 - 1) = 0;$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4)$$

$$a^2 - ab + b^2$$

$$-5ab(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4$$

$$a > b;$$

$$b^4 - a b^3 + a^4 - a^3 b$$

$$b^3(b-a) + a^3(a-b);$$

$$(a^3 - b^3)(a-b)$$

$$a^2 - ab + b^2$$

$$b^2 - 4ab + a^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 20$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$

$$b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 20$$

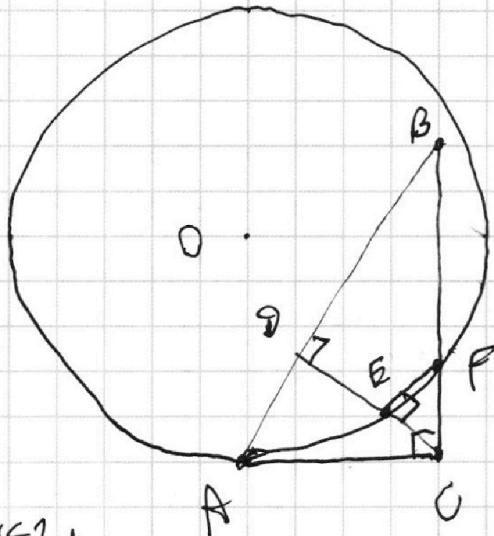
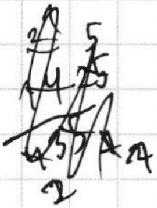
$$S_{\triangle CEF} = ?$$

$$(a+b) = ?$$

$$BD : DA = 5 : 2$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$

$$\log_m x + \log_m y = \log_m xy$$



$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = \log_m^3 m^{-2} - 5; \log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = (-2) \cdot \log_m^2 m - 5;$$

$$\log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = \frac{-2}{\log_m^3 x} - 5; \log_m^4 x - \frac{6}{\log_m x} = (-\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{\log_m^3 x} - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t^3} - 5; t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - 5\frac{1}{3} = 0; t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_m^4 \left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\log_m \left(\frac{y}{2}\right)} = \log_m^3 \left(\frac{y}{2}\right) - 5;$$

$$-\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_m \frac{y}{2}} - 5$$

$$d^4 + \frac{1}{d} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{d} - 5$$

$$a^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5a; a^5 + 5a + \frac{16}{3} = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x + \frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} = 0$$

$$2 + \left(\frac{6a}{5}\right)y - \frac{b}{5} = 0;$$

$$x + k_1 y + b_1 = 0;$$

$$\frac{|b_1|}{\sqrt{1+k_1^2}} = 5; \quad \left| \frac{b_1 - 9 \cdot k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} \right| = 2;$$

$$b_1^2 = 25 \cdot (1+k_1^2);$$

$$(b_1 - 9k_1)^2 = 4(1+k_1^2);$$

$$b_1^2 - 18b_1 \cdot k_1 + 81k_1^2 = \frac{4}{25} \cdot b_1^2;$$

$$\frac{21}{25} \cdot b_1^2 - 18b_1 \cdot k_1 + 81k_1^2 = 0;$$

$$\frac{b_1}{k_1} = 9 \pm \frac{21}{25} \cdot 81 = \frac{4}{25} \cdot 81; \quad \left(\frac{2 \cdot 9}{5}\right)^2$$

$$b_1 = \left( \frac{9 \pm \frac{18}{5}}{\frac{21}{25}} \right) \cdot k_1$$

~~9 ± 18/5 = 27/5~~

$$|15k_1| = 5\sqrt{1+k_1^2};$$

$$15^2 k_1^2 = 25(1+k_1^2);$$

$$9k_1^2 = k_1^2 + 4;$$

$$8k_1^2 = 4; \quad k_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$9 - \frac{18}{5} = \frac{27}{5}$$

$$\frac{27 \cdot 25}{5 \cdot 21} = \frac{45}{7}$$

$$9 \pm \frac{18}{5} = \frac{45 \pm 18}{5} = \frac{63}{5}$$

$$\frac{63 \cdot 25}{5 \cdot 21} = 15$$

$$\left[ \begin{array}{l} b_1 = 15k_1 \\ b_1 = \frac{45}{7} \cdot k_1 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  
  2  
  3  
  4  
  5  
  6  
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \cdot \cos 65^\circ (\sin \alpha) = 9\sqrt{10} - 2\alpha;$$

14:42

$$\cos \alpha \in [0; \sqrt{10}]$$

$$\cos 65^\circ (\sin \alpha) = L$$

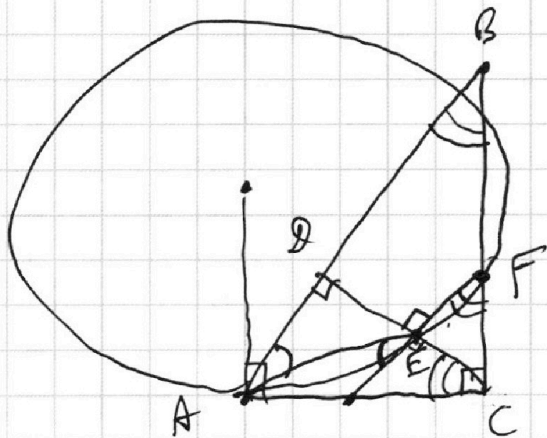
$$\sin \alpha = 85L$$

$$10L = 9\sqrt{10} - 2\alpha$$

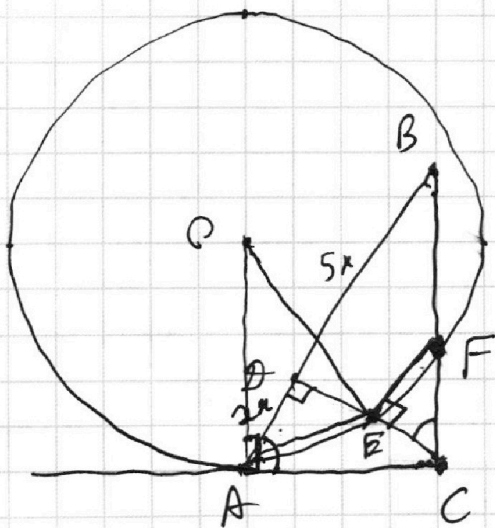
$$L = \frac{9\sqrt{10} - 2\alpha}{10}$$

$$AB : BD = 7 : 5;$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$$



$$\cos 2\alpha \cdot 5x = 2\sqrt{10}x$$



$$\frac{BD}{AB} = \frac{5}{7}$$

$$\cos \frac{9\sqrt{10} - 2\alpha}{10} = \sin \alpha$$

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{10} - 2\alpha}{10} \right) = \sin \alpha$$

$$\sin \left( \frac{2\alpha - 9\sqrt{10}}{10} \right) = \sin \alpha$$

$$\sin \left( \frac{\alpha - 2\sqrt{10}}{10} \right) = \sin \alpha$$

$$\frac{\alpha - 2\sqrt{10}}{10} = \alpha + 2\sqrt{10}k$$

$$\alpha - 2\sqrt{10} = 10\alpha + 20\sqrt{10}k$$

$$-2\sqrt{10} + 20\sqrt{10}k = 9\alpha$$

$$\triangle ADE \sim \triangle DAE$$

$$0 \leq \frac{9\sqrt{10} - 2\alpha}{20} \leq \sqrt{10}$$

$$0 \leq 9\sqrt{10} - 2\alpha \leq 10\sqrt{10}$$

$$-9\sqrt{10} \leq -2\alpha \leq \sqrt{10};$$

$$-\frac{\sqrt{10}}{2} \leq \alpha \leq \frac{9\sqrt{10}}{2};$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{AD}$$

$$DB \cdot DC = AD^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x+y \geq 21$   
 $y+z \geq 23$   
 $x+z \geq 28$

$AB : (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}) ; BC : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13})$   
 $AC : (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}) ; ABC - ?$

$x+y+z \geq 26$   
 $x \geq 13$   
 $x+z \geq 23$   
 $y =$

AB  
 BC  
 AC

$x+y \geq 23$   
 $y+z \geq 21$   
 $x+z \geq 25$   
 $x+y+z \geq 30$   
 $z \geq 12$   
 $y \geq 4$   
 $x \geq 9$

~~$\frac{24}{6} = 4$~~

a	b	c
$2^4$	$2^2$	$2^{12}$
$3^8$	$3^4$	$3^{17}$
$5^{14}$	$5^1$	$5^{24}$

$(x+y)^2 \geq 6$   
 $x^2 + y^2 \geq 14$   
 $x^2 + z^2 \geq 16$   
 $x+y+z \geq 18$

$\frac{24}{6} = 4$   
 $= \frac{2}{3}$

$\sum_{i=1}^n (x - 2\pi) = \sum_{i=1}^n a ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5 \cdot \pi$

~~$x+y \geq 23$~~   $x+y \geq 21$   
 ~~$y+z \geq 21$~~   $y+z \geq 23$   
 $x+z \geq 28$

1)  $\frac{x-2\pi}{5} = x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

$x+y+z \geq 26$   
 $k \geq 0$   
 $k \geq 1$   
 $k \geq 2$   
 $k \geq 3$

$x-2\pi = 5x + 10 \cdot \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z};$

$10\pi k - 2\pi = 4x, k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi k - \pi}{2};$

2)  $\frac{x-2\pi}{5} = \pi - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x-2\pi = 5\pi - 5x + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$6x \geq 7\pi + 10\pi k, k \in \mathbb{Z}$

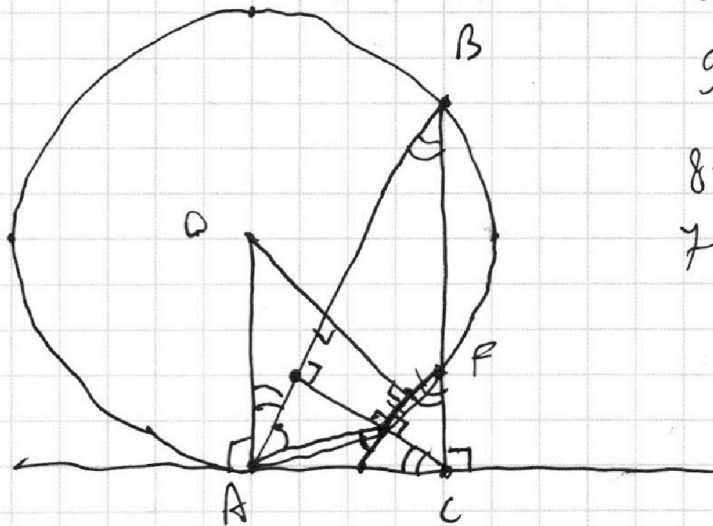
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

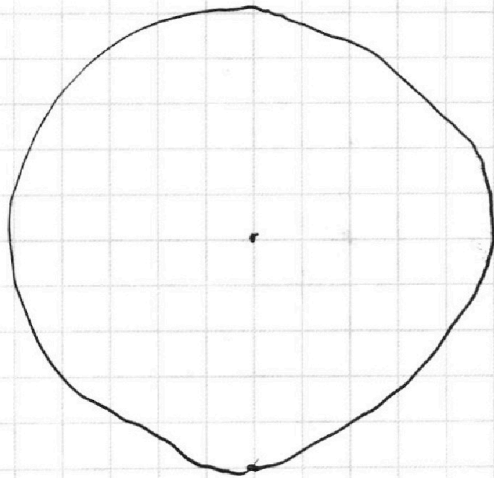
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

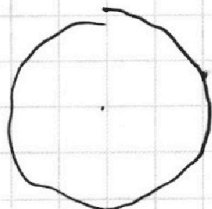
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}b_1 &= 5\sqrt{1+k^2} \\b_1 - 9k_1 &= 2\sqrt{1+k^2} \\9k_1 &= 3\sqrt{1+k^2} \\81k^2 &= 9 + 9k^2 \\72k^2 &= 9 \\k^2 &= \frac{1}{8} \\k &= \pm \frac{1}{\sqrt{8}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}CP \cdot CB &= CA^2 \\ \frac{CP}{CA} &= \frac{CA}{CB} \\ \Delta ACP &\sim \Delta BCA\end{aligned}$$



$$d_1 = \frac{0 - 9k_1 + b_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 2; \quad d_0 = \frac{0 + 0 + b_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = 5;$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



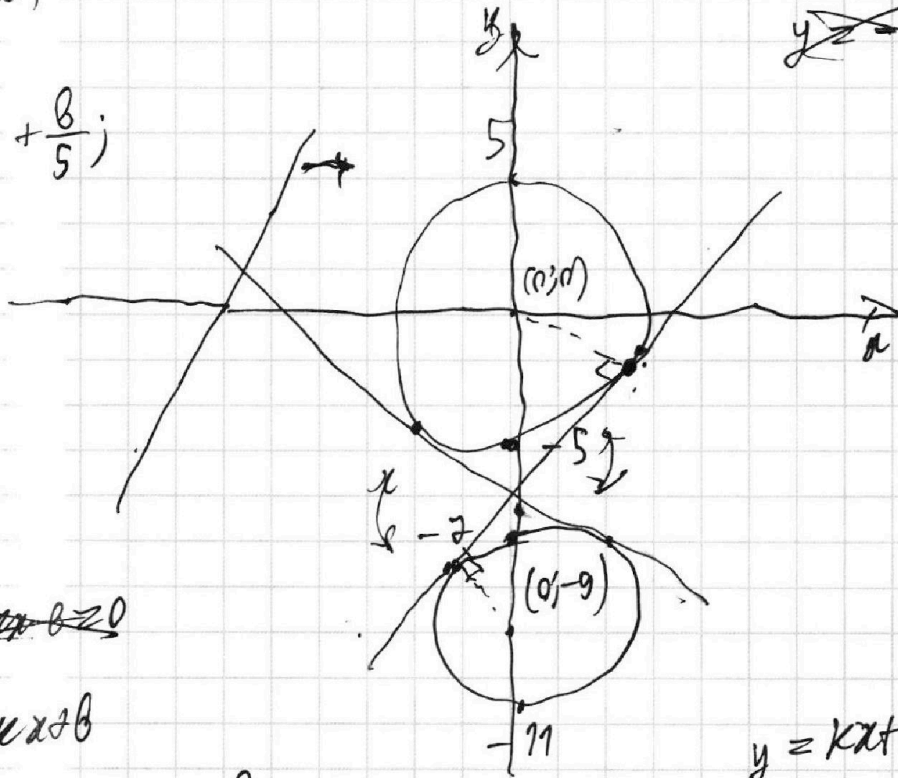
$$\begin{cases} 5x + 6ay - \theta = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ \cancel{x^2 + y^2 = 25} \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

4 решения;  
лучше все а,  
не 1 б)

- 1) Если  $a=0$ ;
- 2) Если  $a \neq 0$ ;

~~$$y = \frac{5x + \theta}{6a}$$~~

$$x = y \cdot \left(\frac{6a}{5}\right) + \frac{\theta}{5}$$



~~$$y = kx + \theta$$~~

$$y = kx + \theta$$

$M(x_0, y_0)$

$$d = \frac{y_0 - kx_0 - \theta}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$y = kx + \theta$$

~~$$y = kx + \theta = 0$$~~

$$d_0 = \frac{\theta}{\sqrt{1+k^2}} = 5;$$

$$d_{-9} = \frac{-9 + \theta}{\sqrt{1+k^2}} = 2;$$

~~$$\frac{\theta}{\theta - 9} = \frac{5}{2}$$~~

$$2\theta = 5\theta - 45;$$

$$3\theta = 45;$$

$$\theta = 15;$$

$$k = \pm \sqrt{8}$$