МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 20y + 64\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

№1. Решение:

1. $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$ – разложим a, b, c на множители, т.к. ищем abc наименьшее, то другие множители, отличн. от 2, 3, 5 не рассматриваем

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\Gamma_1} \cdot 3^{\Gamma_2} \cdot 5^{\Gamma_3}$

Тогда: т.к. $ab \vdots 2^8$, $bc \vdots 2^{12}$, $ac \vdots 2^{14}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \beta_1 + \Gamma_1 \geq 12 \\ \alpha_1 + \Gamma_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \Gamma_1 \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$$

Аналогично,

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \Gamma_2 \geq 20 \\ \alpha_2 + \Gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \Gamma_2 \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \Gamma_2 \geq 28$, т.к. $\alpha_2, \beta_2, \Gamma_2$ – натур. или 0.

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \\ \beta_3 + \Gamma_3 \geq 17 \\ \alpha_3 + \Gamma_3 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \Gamma_3 \geq 34, \text{ но } \alpha_3 + \Gamma_3 \geq 39 \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \Gamma_3 \geq 39$$

Значит, $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\Gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\Gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\Gamma_3} \geq$
$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ – оценка.

Пример:

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$

$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0$

$c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$

$\Rightarrow$ $ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}$ (+)

$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{27}$ (+)

$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$ (+)

$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

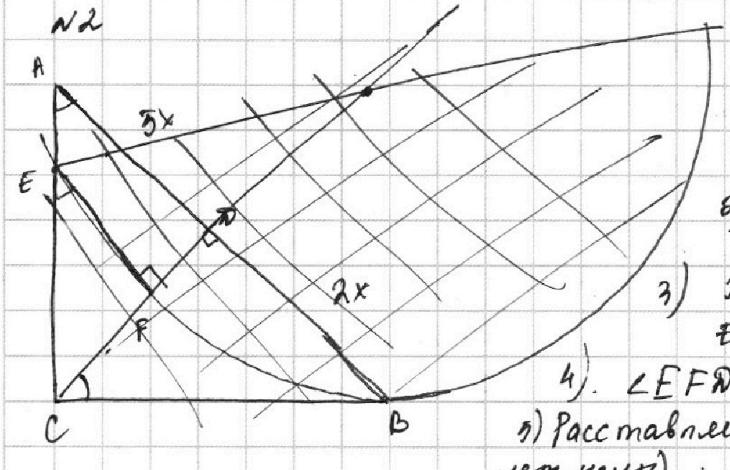
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2



Решение:

1). В $\triangle ABC$:

$AC^2 = AD \cdot AB = 5x \cdot 7x = 35x$

$\Rightarrow AC = \sqrt{35}\,x$

2) $CB^2 = BD \cdot BA = 2x \cdot 7x = 14x \Rightarrow$

$\Rightarrow CB = \sqrt{14}\,x$

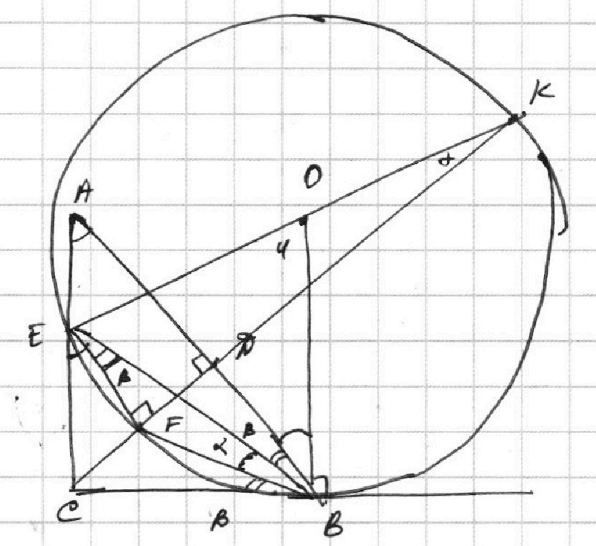
3) Т.к. $AB \parallel EF$, и $CD \perp AB$, то $EF \perp CD$

4). $\angle EFD = 90^\circ \Rightarrow EOK$ - диаметр.

5) Расставляем углы: $\angle FEB = \angle EBA = \beta$ (накр. леж. углы) ; $\angle CBF = \angle FEB = \beta$ (лежат на одной дуге)

$\angle EOB = \varphi$, тогда $\alpha = \dfrac{\varphi - 2\beta}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = \varphi - 2\beta$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow 10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \pi - 2x.$

1. $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x - \pi k \le \frac{\pi}{2}$; – по определению arcsin, $k \in \mathbb{Z}$

$-\pi \le -x - \pi k \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x + \pi k \le \pi \Leftrightarrow -\pi k \le x \le \pi - \pi k$

2. $10\left(\frac{\pi}{2} - x - \pi k\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi - 10x - 10\pi k = \pi - 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x = 4\pi - 10\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4}$

$$-\pi k \le \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4} \le \pi - \pi k \Leftrightarrow -k \le \frac{1}{2} - \frac{5k}{4} \le 1 - k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k - \frac{1}{2} \le -\frac{5k}{4} \le \frac{1}{2} - k \Leftrightarrow k - \frac{1}{2} \le \frac{5k}{4} \le k + \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.)\ k - \frac{1}{2} \le \frac{5k}{4} \Leftrightarrow \frac{k}{4} \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k \ge -2 \\ 2)\ k + \frac{1}{2} \ge \frac{5k}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{k}{4} \Rightarrow k \le 2 \end{array}\right\} \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi\cdot(-2)}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 3\pi;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi(-1)}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} = \frac{7\pi}{4};$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$x_4 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{2\pi - 5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4};$$

$$x_5 = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi\cdot 2}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} = -2\pi$$

Ответ: $\left\{-2\pi; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; 3\pi\right\}$.

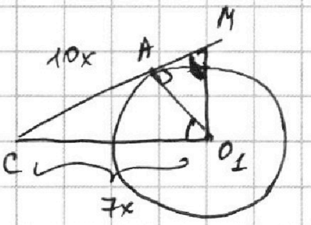
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\triangle AO_1M \sim \triangle BO_2M \Rightarrow \frac{AO_1}{BO_2} = \frac{O_1M}{O_2M} = \frac{1}{6} \Rightarrow O_1M = \frac{10}{7}$, $MO_2 = \frac{60}{7}$

$\triangle AO_1M \sim \triangle O_1CM \Rightarrow \frac{AO_1}{O_1C} = \frac{MO_1}{MC} \Rightarrow \frac{1}{O_1C} = \frac{\frac{10}{7}}{MC} \Rightarrow \frac{MC}{O_1C} = \frac{10}{7}$



$MO_1 = \sqrt{100x^2 - 49x^2} = \sqrt{51}\,x$

$k = \frac{MO_1}{CO_1} = \frac{\sqrt{51}\,x}{7x} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

в силу симметрии

Значит $\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

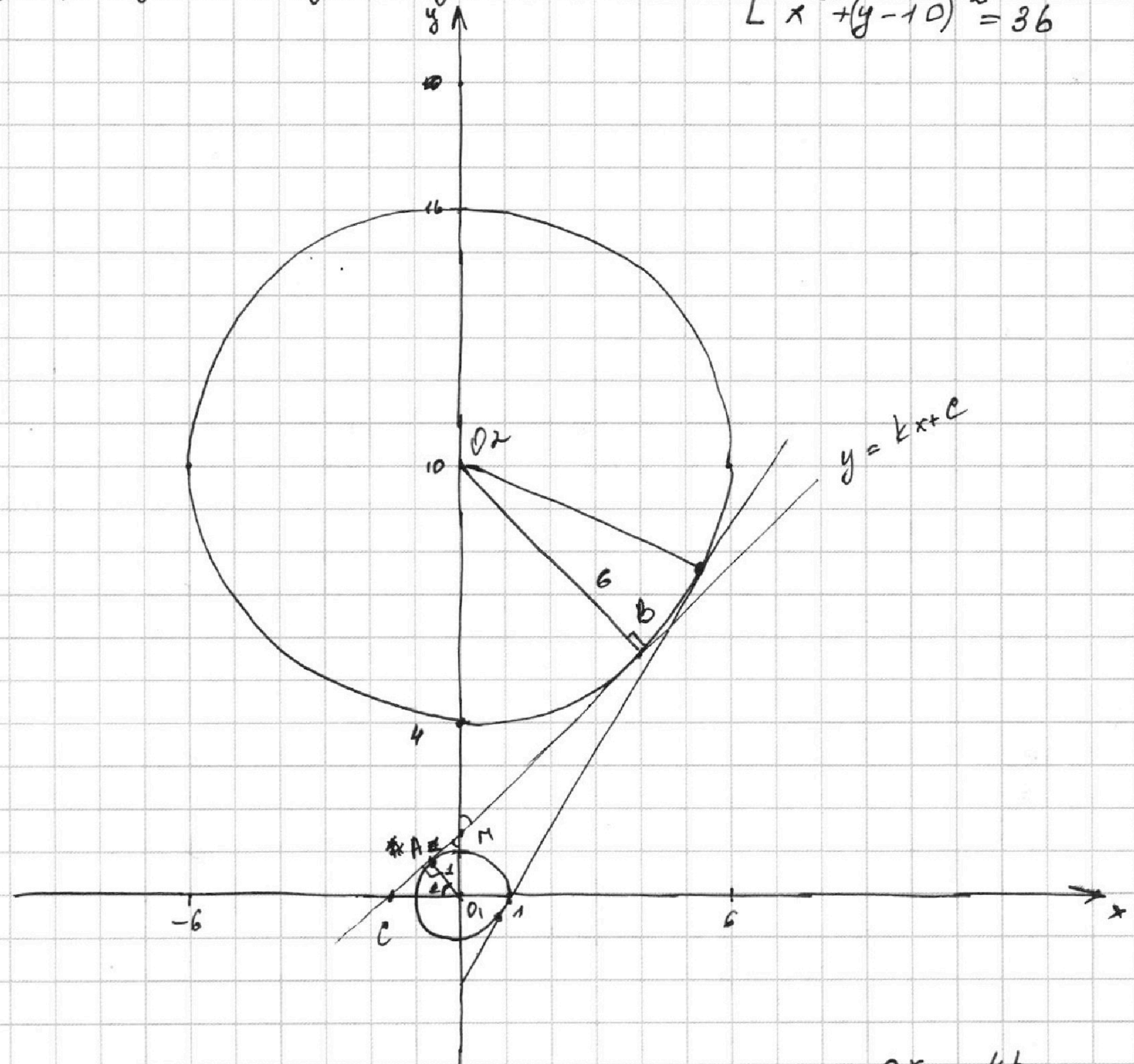
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. $\begin{cases} ax-3y+4b=0 \quad (2)\\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \quad (1)\end{cases}$

Решение:

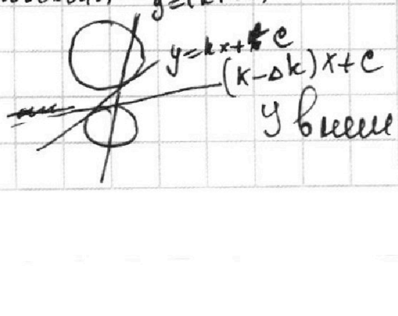
(1). $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1\\ x^2+(y-10)^2=36\end{array}\right.$



(2) $ax-3y+4b=0 \iff 3y=ax+4b \iff y=\frac{ax}{3}+\frac{4b}{3}$

3. Проводим общую внутреннюю касательную: $y=kx+c$

Заметим, что, если k увеличить, то система будет иметь 4 решения



Значит, гранич. случай — внутр. касат.

У внеш. касательной угол наклона больше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5. $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

1) Замена: $t = \log_5 2x$; $\log_{8x^3}625 = \log_{8x^3}5^4 = \log_{2x}5^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\log_{2x}5$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 \Leftrightarrow t^4 - \frac{9+4}{3t} + 3 = 0 \Leftrightarrow t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0$ (*) 1

2) $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$; Замена $m = \log_5 y$

$m^4 + \frac{4}{m} = -\frac{1}{3m} - 3 \Leftrightarrow m^4 + \frac{12+1}{3m} + 3 = 0 \Leftrightarrow m^4 + \frac{13}{3m} + 3 = 0$ (*) 2

$\log_{y^3}0{,}2 = \log_{y^3}\frac{1}{5} = \log_{y^3}5^{-1} = -\frac{1}{3}\log_y 5$

3) (*) 1: $t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$
(*) 2: $m^5 + 3m + \frac{13}{3} = 0$ $\Rightarrow t^5 + m^5 + 3t + 3m = 0$

$(t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4) + 3(t+m) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 3) = 0$

1. $t + m = 0$
2. $t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 3 = 0 \Rightarrow t^3(t-m) - m^3(t-m) + t^2m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-m)(t^3-m^3) + t^2m^2 + 3 = 0$ Но:

$\underbrace{(t-m)^2}_{\geq 0}\underbrace{(t^2 + tm + m^2)}_{\geq 0} + \underbrace{t^2m^2}_{\geq 0} + 3 \geq 3$ — р-во (2) невозможно.

4) $t + m = 0 \Leftrightarrow \log_5(2x) + \log_5 y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5(2xy) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$

Ответ: 0,5.

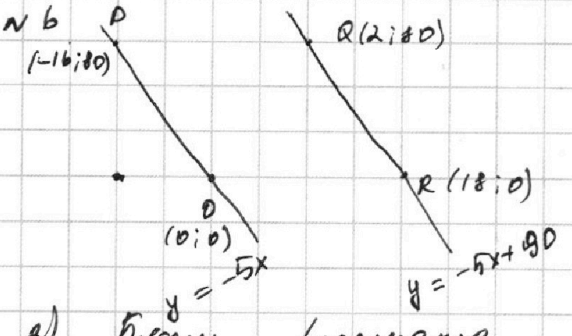
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



Решение:

1) Критерий того, что $A(x; y)$ принадл. PQRO:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 80 \\ -5x \le y \\ y \le -5x + 90. \end{cases}$$

2) Будем рассматр. точки, принадл. прямой, вида $y = -5x + c$; $c \in \{0; 1; \dots; 90\}$.

3) Тогда, пусть $A \in m$; $m: y = -5x + c$; $A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$: $5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 + y_1 = 45 + 5x_1 - 5x_1 + c = 45 + c$,

тогда $y_2 = 45 + c - 5x_2$ и т.к. $B \in PQRO$, то

B лежит на одной из прямых $y = -5x + c$, $c \in \{0; 1; \dots; 90\}$

4) Тогда

$$\begin{cases} 0 \le 45 + c - 5x_2 \le 80 \\ 0 \le 45 + c \le 90 \\ 0 \le c \le 90 \end{cases} \Rightarrow$$

1. $c \in \{0; 1; \dots; 45\}$

2. ~~$-45 - c \le -5x_2 \le 35 - c$~~
~~$c - 35 \le 5x_2 \le 45 + c$~~

5) Значит, для каждой точки $A(x_1; y_1)$, что $y_1 = -5x_1 + c$, найд. ~~такая~~ ~~и~~ такая точка B.

6) Найдем кол-во точек, принадл. прямой $y = -5x + c$ и PQRO. ~~На~~ На примере отрезка PO: $x \in [-16; 0]$ − 17 точек, т.к. $x \in \mathbb{Z}$.

7) Если есть A, то ей подойдут 17 точек B, лежащих на $y = 45 + c - 5x_2$

8) Прямых, где может располагаться точка A: $y = -5x + 90$ ... $y = -5x + 45$
→ 46 прямых

Значит, суммарно пар:

$$\underbrace{17}_{\text{точек A на 1 прямой } y = -5x + c} \cdot \underbrace{17}_{\text{точек B, подх. A}} \cdot \underbrace{46}_{\text{прямые, где распол. точка A}} = 13294$$

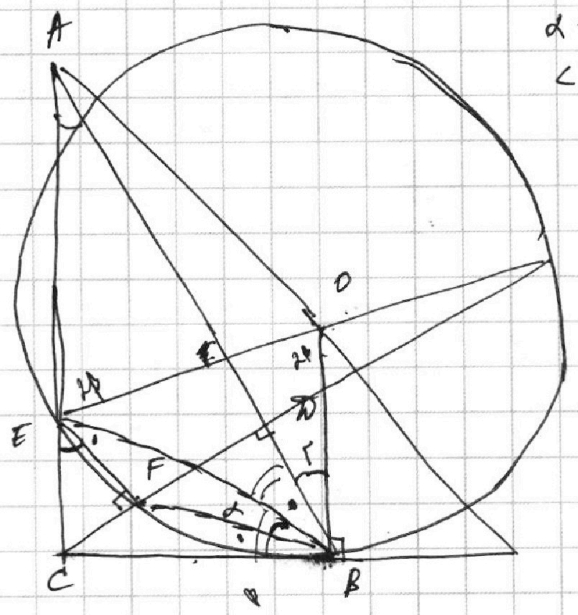
Ответ: 13294.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\alpha = 2\beta - 2\circ$

$\angle CBO : 2\beta + \Gamma = 90^\circ$

$\alpha = \cancel{\beta\circ}\ \cancel{90^\circ -}$

$\alpha = 2\beta - 2\circ$

$90 - \alpha - \beta$

$4 - \alpha = 2\alpha + 2\beta - \alpha =$

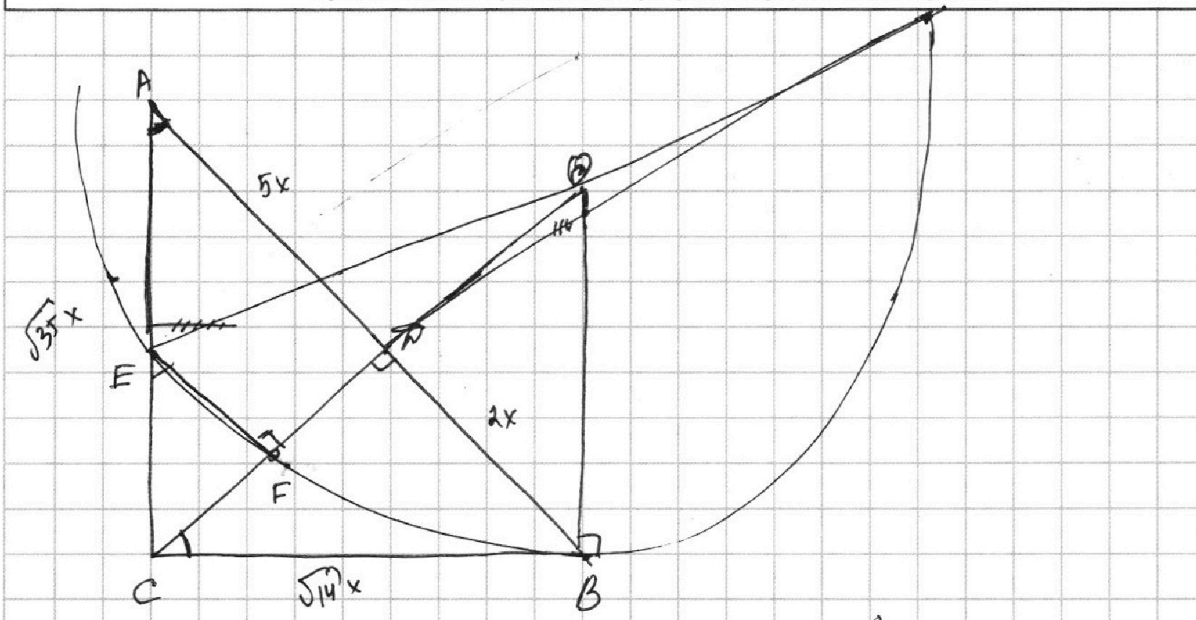
$= \alpha + 2\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

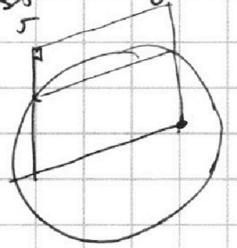
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

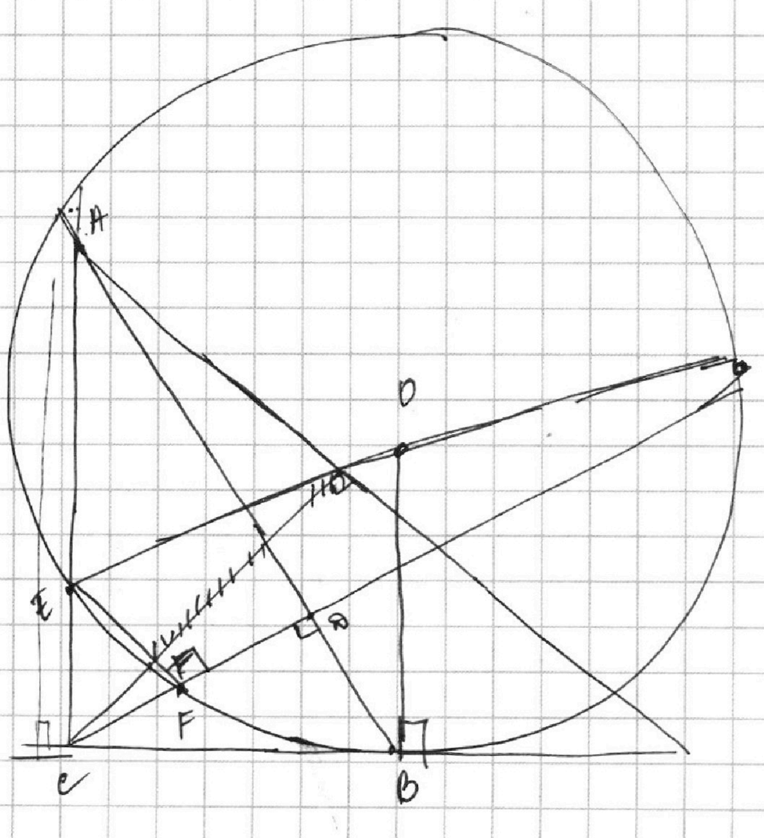
МФТИ

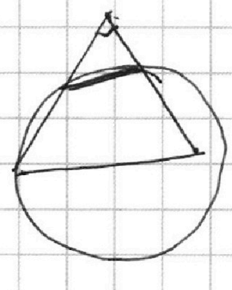


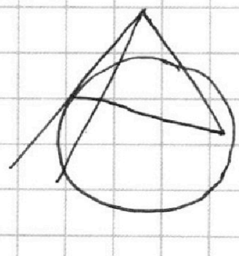
$\frac{OB}{\sqrt{14}x} = \frac{\sqrt{14}x}{\sqrt{35}x} \Rightarrow OB = \frac{14x^2}{\sqrt{35}x} = \frac{14\sqrt{35}}{35}x = \frac{2}{5}\sqrt{35}x.$

$CF(CF+21) = CB^2$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$\cancel{a^{*} = \cdot 5^{12}}$

$\cancel{c = 5^{27} \cdot 2^{9}}$

$\frac{8+12+14}{2} = 17.$

$a + b = 8$

$b + c = 12$

$a + c = 14.$

$a + b + c = 17$

$c = 9 \quad b = 3$

$\cancel{a = 5} \quad a = 5$

$\cancel{b = 7}$

$a = 2^{5} \cdot 3^{8} \cdot 5^{12}$

$b = 2^{3} \cdot 3^{7} \cdot 5^{0}$

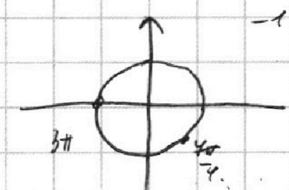
$c = 2^{9} \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$

$a + b = 14$

$b + c = 20$

$a + c = 21$

$a + b + c = 28$



$-1.$

3π

4π

$10 \arcsin(\cos(-2\pi)) = \pi + 4\pi$

$10 \arcsin\left(\cos \frac{4\pi}{4}\right) = \pi - \frac{7\pi}{2}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\pi + \frac{3\pi}{4}$

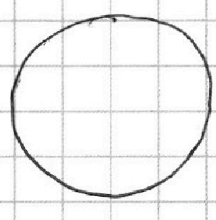
$-\frac{\pi}{4}$

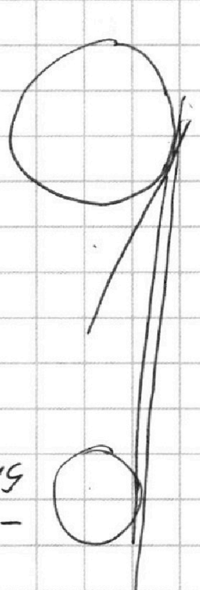
$-\frac{5\pi}{2}.$

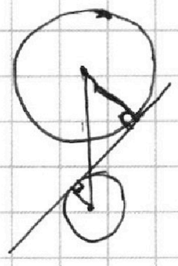
$\frac{2\pi - 7\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}.$

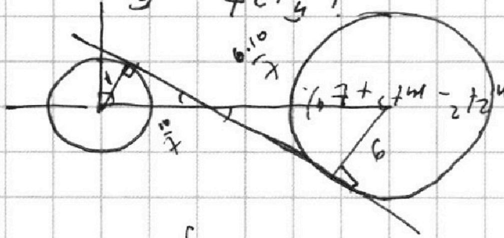
$10 \arcsin(\cos 3\pi) = \pi - 6\pi$

$10 \cdot -\frac{\pi}{2} = -5\pi.$









$m^4 + \frac{13}{3m} + 3 = 0$

$t^4 - \frac{5}{3t} + 3 = 0$

$m^4 - t^4 + \frac{13}{3m} + \frac{5}{3t} = 0$

$m^4 + \frac{13}{3m} + 3 = 0.$

$m^5 + 3m + \frac{13}{3} = 0.$

1 макс. 1 кор.

$t^5 + 3t - \frac{5}{3} = 0$

$m^5 + 3m + t^5 + 3t + \frac{8}{3} = 0.$

$m^5 + t^5$

$m(m^4 + 3) \quad m^4$

$-\frac{13}{3}$

$t^5 + 3t = \frac{5}{3} \quad \frac{13}{3}$

$m^5 + 3m = -\frac{13}{3}$

$t^5 m^5 + 3mt^5 + 3tm^5 + 9tm = -\frac{65}{9}.$

$5m^5 -$

$m^4 - t^4 + \frac{13t + 5m}{3tm} = 0.$

$(m^2 - t^2)(m^2 + t^2)$

$(m+t)(m-t)(m^2+t^2) + \frac{13t + 5m}{3tm} = 0$

$m + t = a$

$(m+t)^5$

$m^5 + t^5$

$(m+t)(m^4 - m^3 t + m^2 t^2 - mt^3 + t^4).$

$m + t$

$m^5 + 3m + t^5 + \frac{11}{3} = 0$

$xy - 1$

$m + t$

$\log_2 x$

$\log_2 + \log$

$t^5 + 3t - \frac{5}{3} = 0$

log

$\frac{t^5 + 3t}{m^5 + 3m} = -\frac{5}{13}$

$-13t^5 - 39t = 5m^5 + 15m$

$5m^5 + 13t^5 + 15m + 39t = 0.$

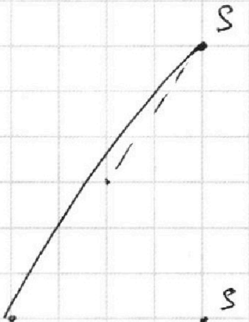
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

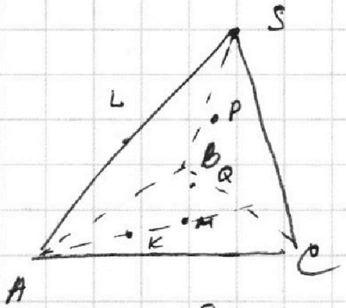
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

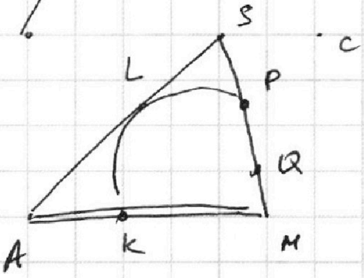
МФТИ

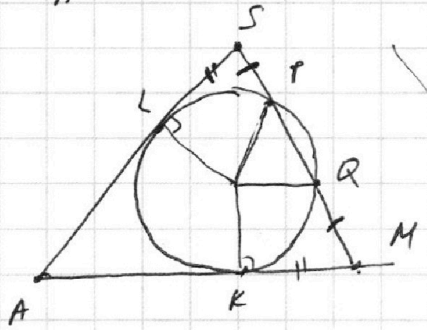
$SP = MQ$.





AA_1, BB_1, CC_1





$-5x$ 10:40 $+4$ 14:40

$-5x+45$

B
$-5x+45$ $-5x+90$

$A:(x_1; y_1)$.
$y_1 = -5x_1$
$5x_2 + y_2 = 45$
$\boxed{y_2 = 45 - 5x_2}$

$y_1 = -5x_1 + 90$.
$5x_2 + y_2 = 45 + 90$.

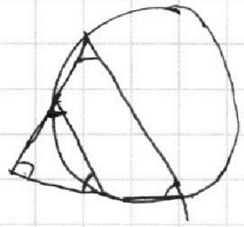
$17 \cdot 17 \cdot 46$

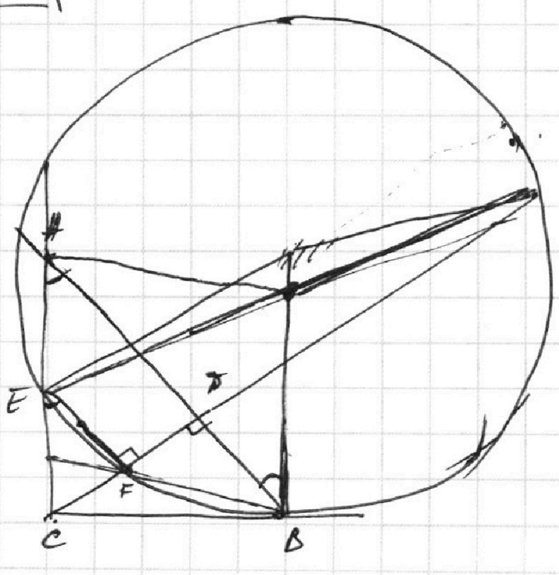
289×46: 1734, 1156, 13294

$289 \times 6 = 1734$

$289 \times 4 = 1156$

17×17: 119, 17, 289



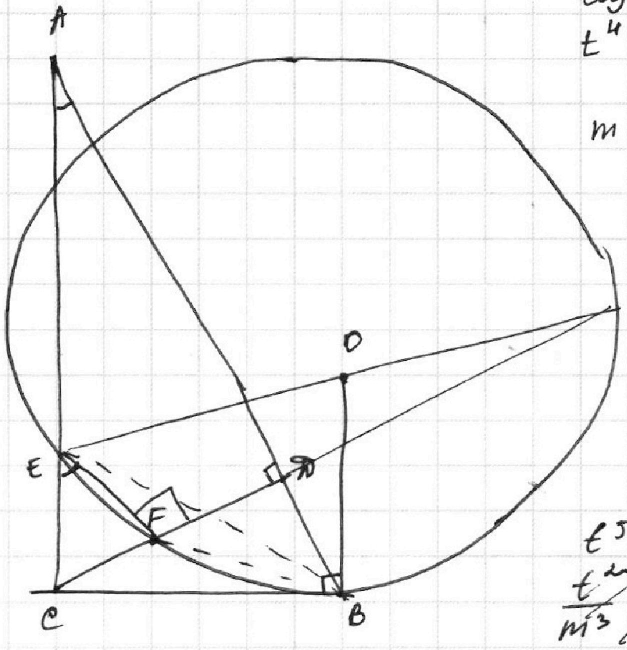


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\log_5^4 2x - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 \Rightarrow t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t$

$t^5 + 3t -$

$m^4 + \frac{4}{m} = -\frac{1}{3m} - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$

$t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0.$

$t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0.$

m^5

$t^5 + m^5 + 3t + 3m = 0.$

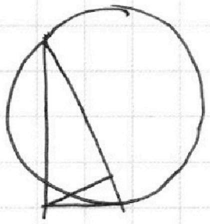
$\cancel{\frac{t^2}{m^3} + \frac{m^2}{t^3} + \frac{3t}{m^3} + \frac{3m}{t^3} = 0}$

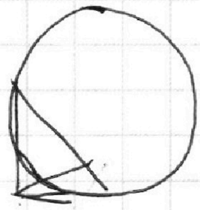
$\cancel{\frac{t^5}{m^5} + 1 + \frac{3t}{m^5} +}$

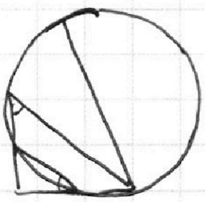
$t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4$

$t^3(t-m) - m^3(t-m)$

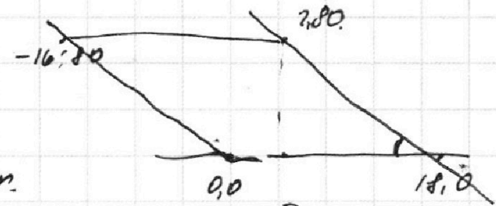
$(t-m)(t^3 - m^3) + t^2m^2$







$5x_2 - 5x_1 +$



$kx + b$

$k = -\frac{80}{16} = -5$

$0 = -5\cdot 18 + b$

$\Rightarrow b = 90.$

$A(x_1; y_1)$. ∈ паралл.

$\begin{cases} 0 \le y_1 \le 80. \\ y_1 \le 90 - 5x_1, \\ y_1 \ge -5x_1 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le y_2 \le 80 \quad y = -5x \\ y_2 \le 90 - 5x_2 \\ y_2 \ge -5x_2 \end{cases}$

$y = -5x + 90.$

$5x_2 + y_2 = \underbrace{45 + 5x_1 + y_1}_{\text{задано}}$ A B

$y_2 = -5x_2 + B$

$0. \le B \le 90$

$0 \le 45 + 5x_1 + y_1 \le 90$

$0 \le 45 + A \le 90$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45. \le 5x_2 + y_2$

$-45 \le 5x_1 + y_1 \le 45.$

y_1 $\cancel{-45 \le 5x_1 + y_1}$

$y = -5x + A.\ A \in \{0; 1; \ldots; 90\}$

$5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 - 5x + A. \Rightarrow y_A = -5x_2 + 45 + A.$ $-45 \le A \le 45.$

$A \in [0; 45].$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

$\frac{\pi}{2} - x$

$\frac{\pi}{2} - x \mp \pi k$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x - \pi k \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le -x - \pi k \le 0$

$0 \le x + \pi k \le \pi$

$-\pi k \le x \le \pi - \pi k$

$10(\frac{\pi}{2} - x - \pi k) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x - 10\pi k = \pi - 2x$

$8x = 4\pi - 10\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4}.$ $\quad -\pi k \le \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4} \le \pi - \pi k$

a – ?
$\exists b$: 4 реш.

$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36. \end{array}\right.$

$625 = 5\cdot5\cdot5\cdot5.$ $\quad xy$ – ?

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5 2x = t$

$t^4 - \frac{3}{t} = \cancel{\frac{4}{3}t - 3}\ \frac{4}{3t} - 3$

$\log_{2x}5^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\log_{2x}5$

xy

$\log_5 xy = \log_5 x + \log_5 y$

$\log_{y^3}\frac{1}{5} = \log_y 5^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

$m^4 + \frac{4}{m} = -\frac{1}{3m} - 3$

$(t+m)$ – ?

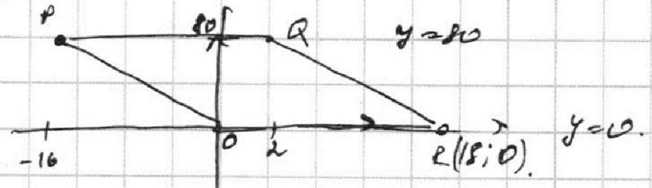
$\cancel{t^4 + m^4 - \frac{3}{t} + \frac{4}{m} = \frac{4}{3t} - \frac{1}{3m}}$

$t^4 - m^4 - \frac{3m+4t}{tm} = \frac{4m+t}{3tm}$

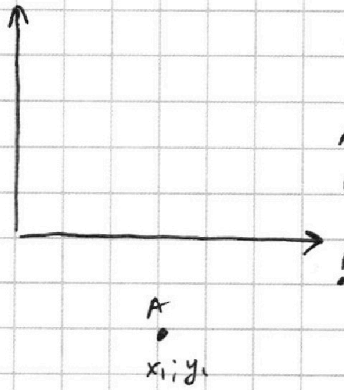
$t^4 - m^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{m} = \frac{4}{3t} + \frac{1}{3m}$

$t^4 - m^4 - \cancel{\frac{9m+12t-4m-t}{3tm}} = 0$

$\Rightarrow t^4 - m^4 -$



$A(x_1;y_1)$
$B(x_2;y_2)$
$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$
$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$



$m^4 + \frac{4}{m} + \frac{1}{3m} + 3 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$N a, b, c$: $ab : 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$abc - ?$

$abc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$abc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot k$

$b = 1.$

$c = 2^{12} 3^{20} \cdot 5^{17}$

$a = 2^8 \cdot 3^{14}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\Gamma_1} \cdot 3^{\Gamma_2} \cdot 5^{\Gamma_3}$

$\cancel{\alpha_1 + \beta_1 \geq 8}$
$\cancel{\alpha_2 + \beta_2 \geq 14}$
$\alpha_3 + \beta_3 \geq$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 8$
$\alpha_2 + \beta_2 \geq 14$
$\alpha_3 + \beta_3 \geq 12$

$\beta_1 + \Gamma_1 \geq 12$
$\beta_2 + \Gamma_2 \geq 20$
$\beta_3 + \Gamma_3 \geq 17$

$\alpha_1 + \Gamma_1 \geq 14$
$\alpha_2 + \Gamma_2 \geq 21$
$\alpha_3 + \Gamma_3 \geq 39$

$\alpha_1 + \beta_1 + \Gamma_1 \geq 17$
$\alpha_2 + \beta_2 + \Gamma_2 \geq 28$
$\alpha_3 + \beta_3 + \Gamma_3 \geq 34.$

$\frac{14 + 20 + 21}{2}$

$= \frac{34 + 21}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5$

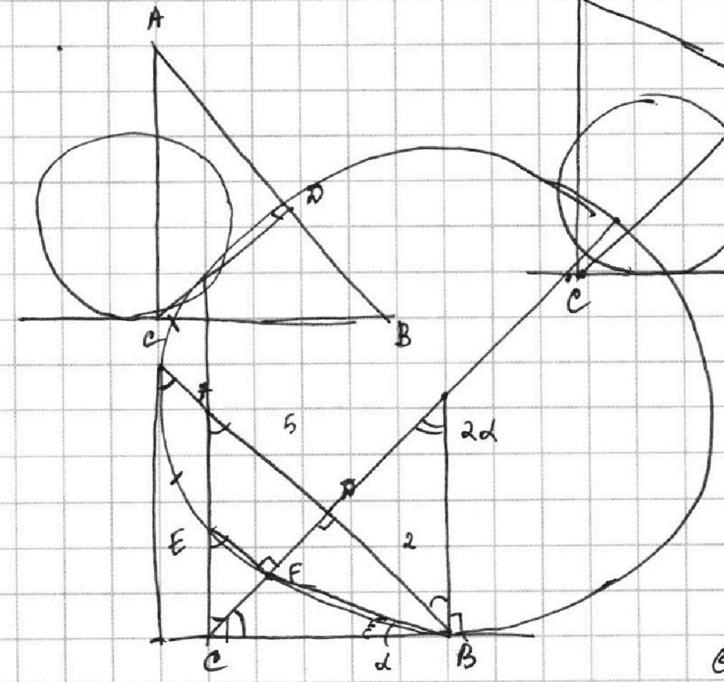
$\frac{12 + 17 + 39}{2} = \frac{12 + 56}{2} = \frac{68}{2}$

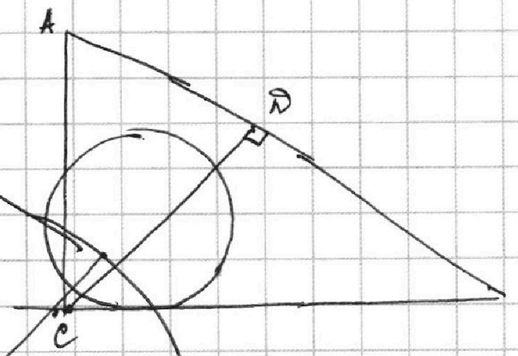
$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \Gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \Gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \Gamma_3}$

$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}.$

$\frac{12 + 17 + 39}{2} = \frac{29 + 39}{2} = \frac{68}{2}$

$c = \cancel{5^{39}}$





$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} - ?$

$\frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB}$

$\frac{5x}{AC} = \frac{AC}{7x} \Rightarrow AC = \sqrt{35}\, x$

$\frac{2x}{CB} = \frac{CB}{7x} \Rightarrow CB = \sqrt{14}\, x$