МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

Рассмотрим степень вхождения каждого из чисел 2, 3 и 5 в числа a, b и c.

Пусть для 2 это x_1, x_2, и x_3 соотв.

Тогда:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \geq 6 \\ x_2+x_3 \geq 14 \\ x_3+x_1 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow x_1+x_2+x_3 \geq 18$$

, а значит abc делится хотя бы на 2^{18}. Заметим, что это значение достигается при $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=12$. (~~Значит меньше быть~~.

Пусть для 3 это y_1, y_2 и y_3 соотв.

Тогда:

$$\begin{cases} y_1+y_2 \geq 13 \\ y_2+y_3 \geq 21 \\ y_3+y_1 \geq 25 \end{cases} \Rightarrow y_1+y_2+y_3 \geq 29{,}5$$

, значит $y_1+y_2+y_3 \geq 30$ (т.к. сумма – натуральное число).

~~Значение~~ А значит abc делится хотя бы на 3^{30}. Это значение достигается при $y_1=9$, $y_2=4$, $y_3=17$

Пусть для 5 это z_1, z_2 и z_3 соотв. Тогда:

$$\begin{cases} z_1+z_2 \geq 11 \\ z_2+z_3 \geq 13 \\ z_3+z_1 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow z_1+z_2+z_3 \geq 26$$

, ~~значит~~. Но $z_3+z_1 \geq 28$, значит abc делится хотя бы на 5^{28}. Достигается при $z_1=14$, $z_2=0$, $z_3=14$.

Значит abc делится хотя бы на 2^{18}, 3^{30} и 5^{28}, значит его минимальное значение:

$$abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}.$$

Достигается при:

$$a = 2^4\cdot 3^9\cdot 5^{14}$$
$$b = 2^2\cdot 3^4\cdot 5^0$$
$$c = 2^{12}\cdot 3^{17}\cdot 5^{14}.$$

Значит это и есть минимальное значение.

Ответ: $abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$.

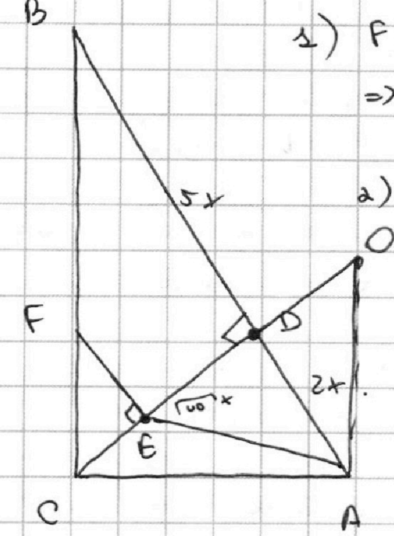
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Для начала найдём отношение площадей треугольников ACD и COB:



1) $FE \parallel BD \Rightarrow \angle FED + \angle BDE = 180° \Rightarrow \angle FED = 90°$.

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ по двум углам.

2) $\frac{AB}{BO} = 1{,}4 = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{5}{2}$.

Пусть $BD = 5x$, $DA = 2x$. $CO = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$.

~~$\Rightarrow$ из теоремы Пифагора в $\triangle COA$ и $\triangle COB$:~~

~~$CA =$~~

$$\frac{S_{CDA}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot 2x}{\frac{1}{2}CD \cdot 5x} = \frac{2}{5}. \Leftrightarrow S_{CDA} = \frac{2}{5}S_{CDB}.$$

3) Найдём отношение $\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}}$.

Рассмотрим т. O - центр окружности. $\triangle OEA$ - р/б.

Пусть $\angle CBA = \alpha$. $\Rightarrow \angle DCA = \alpha$. $\Leftrightarrow \angle CDA = 90° - \alpha$, т.к. $\triangle CDA$ - прямоугольник/ OA - радиус к касат.)

$\angle OAE = \frac{90+\alpha}{2} = 45° + \frac{\alpha}{2}$, $\angle OAD = \cancel{90}\ \alpha$ (из $\triangle OAD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAE = 45° - \frac{\alpha}{2}$.

Но $\angle DAC = 90° - \alpha \Rightarrow \angle EAC = \cancel{2} \cdot 45° - \frac{\alpha}{2} = \angle DAE$. Значит AE - бис. угла.

4) $CD = \sqrt{10}x \Rightarrow$ из т. Пифагора в $\triangle DAC$: $CA = \sqrt{6}x$.

Значит по с-ву бис. $\frac{\sqrt{6}x}{2x} = \frac{CE}{ED} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

5) $\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{5+2\sqrt{6}} = \cancel{3(5-2\sqrt{6})}. \Rightarrow S_{COB} = \frac{(5+2\sqrt{6})}{3}$

6) $S_{ACD} = \frac{2}{5}S_{CDB} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5+2\sqrt{6}}{3}S_{CEF} = \frac{10+4\sqrt{6}}{15} \cdot S_{CEF}$.

Ответ: $\frac{10+4\sqrt{6}}{15}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos t = \frac{\pi}{2} - \arcsin t$.

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow -10\arcsin(\sin x) = 4\pi - 2x$.

Заметим, что $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin t \geq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -5\pi \leq 4\pi - 2x \leq 5\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{\pi}{2} \\ x \leq \frac{9}{2}\pi = 4\pi + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Случаи:

I. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $\arcsin(\sin x) = x$.

$-10x = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$. Подходит.

II. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Тогда $\arcsin(\sin x) = \pi - x$.

$-10(\pi - x) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 14\pi \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi$. Подходит.

III. $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$. Тогда $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$.

$-10(x - 2\pi) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 16\pi \Leftrightarrow x = 2\pi$. Подходит.

IV. $\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$. Тогда $\arcsin(\sin x) = \pi - (x - 2\pi) = 3\pi - x$.

$-10(3\pi - x) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 34\pi \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}\pi$. Подходит.

V. $\frac{7\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$. Тогда $\arcsin(\sin x) = x - 4\pi$. ~~Подхо~~.

$-10(x - 4\pi) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 36\pi \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}\pi$. Подходит.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6};\ 2\pi;\ \frac{17}{6}\pi;\ \frac{9}{2}\pi\right\}$.

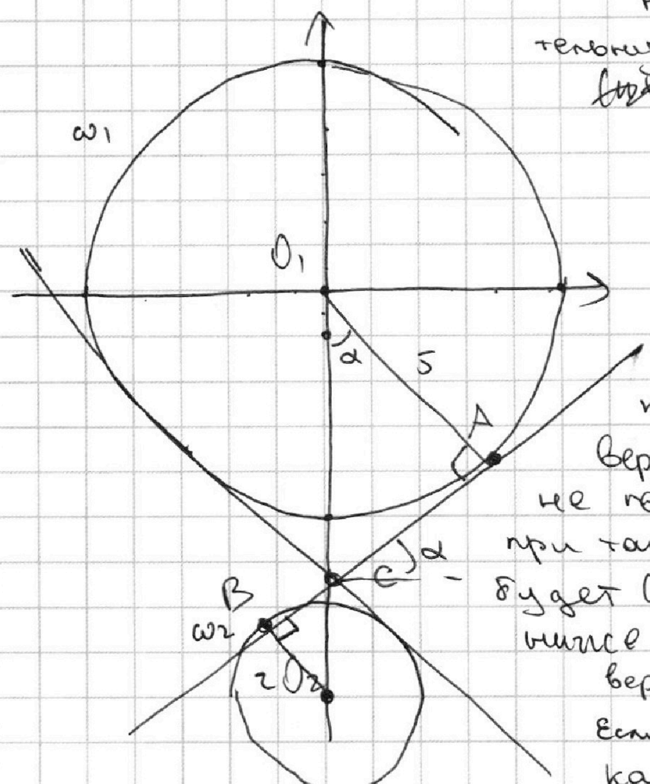
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Рассмотрим второе ур-е. Первая скобка - окружность с центром $O_1(0;0)$ и радиусом 5, вторая - с центром $O_2(0;-9)$ и радиусом 2. (т.к. это $(x^2+(y+9)^2-4)$).



Рассмотрим общую касательную к этим окружностям ~~бык~~ - внутренние (их 2).

Рассмотрим с положит. коэф. обозначим её коэф за k_1.

Заметим, что если взять ~~$a>k_1$~~ $a<k_1$ ~~, то~~ и провести касательную к верхней окружности, то она не пересечёт нижнюю, а значит при таких a 4 решения не будет (т.к. опустив такую прямую ниже она уже не пересечёт верхнюю окружность).

Если же взять $a>k_1$, то касательная к верхней окруж. будет ~~касаться~~ пересекать нижнюю окружность (при b_1), касат. к нижней окр. будет пересекать верхнюю окружность (при b_2) $\Rightarrow$ при $\frac{b_1+b_2}{2}$ точно будет 4 решения.

Аналогично, если коэф. прямой с отр. ~~углом~~ коэф. наклона k_2, то не подходят все a: $a>k_2$ $(k_2=-k_1)$. Значит неподходят $a\in[-k_1;k_1]$.

Найдём k_1:

Возьмём прямую с полож. коэф. пусть она касается окружностей ω_1 и ω_2 в точках A и B соотв. (ось ординат в т. C)

$\triangle O_1AC \sim \triangle O_2BC$ по двум углам ($O_1A\perp AB$, т.к. радиус к касат.) коэф. подобия $=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2}=\frac{5}{2}$; $O_1C+CO_2=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1C=\frac{5}{7}\cdot 9$; $O_2C=\frac{2}{7}\cdot 9$. Пусть $\angle CO_1A=\alpha$.

$k_1=tg\alpha$. Из т. Пифагора в $\triangle O_1AC$: $CA=\sqrt{\frac{25\cdot 81}{49}-25}=5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

значит:

$$tg\alpha = \frac{CA}{O_1A} = \frac{\frac{5\cdot 4\sqrt{2}}{7}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{7} = k_1.$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.

Рассмотрим первое ур-е. Пусть $\log_{11} x = t$, $x>0, x\neq 1$.

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}\frac{1}{t} - 5 \Leftrightarrow \frac{3t^5 - 16 + 15t}{3t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 15t - 16 = 0 \\ t \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе ур-е: Пусть $0{,}5y = a$. $\log_{11} a = b$.

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3}\frac{1}{b} - 5 \Leftrightarrow \frac{3b^5 + 16 + 15b}{3b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^5 + 15b + 16 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Заметим: $\log_{11} y + \log_{11} x = \log_{11} xy$, значит найти все возможные значение $xy \Leftrightarrow$ найти всевозможные значения $\log_{11} y + \log_{11} x$. т.е. и $b_0 + t_0$, где b_0 и t_0 - корни 1-ого и второго ур-й.

$$\begin{cases} 3t_0^5 + 15t_0 = 16 \\ 3b_0^5 + 15b_0 = -16. \end{cases}$$ Но $f(x) = 3t_0^5 + 15t_0$ - нечётная $\Rightarrow$

$\Rightarrow b_0 = -t_0 \Leftrightarrow \underline{b_0 + t_0 = 0}$.

Значит:

$$\log_{11} x + \log_{11} 0{,}5y = 0 = \log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right) \Rightarrow xy = 2.$$

Ответ: $xy = 2$.

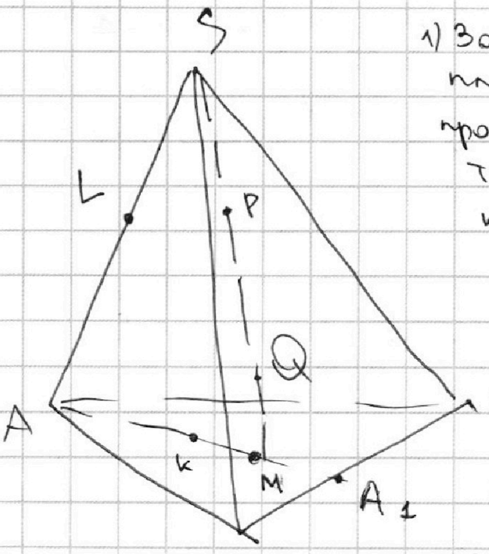
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

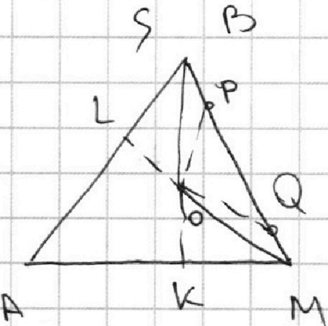
МФТИ

№7.



1) Заметим, что центр сферы O лежит в плоскости ASM. Докажем от противного. Пусть это не так. Тогда опустим перпендикуляр OH к плоскости ABC. Но тогда в $\triangle OHK$: HK – гипотенуза. $OK = R > OH \Rightarrow OH \neq R$. Противоречие, т.к. это и есть точка касания плоскости. Значит $O \in (AMS)$.

2) Рассмотрим плоскость AMS.



$OP = OQ = R$.

$SP = QM$.

$\angle OPQ = \angle OQP \Rightarrow \triangle OPS = \triangle OQM$ по 1-ому пр-р-ва $\triangle$.

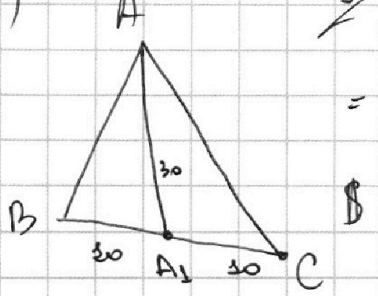
$SO = OM$.

Тогда $\triangle OSL = \triangle OMK$ по 4-ому пр-ку р-ва $\triangle$ ($OK = OL = R$; $OM = OS$ и $\angle OLS = \angle OKM = 90^\circ$)

Значит $\angle OMK = \angle OSL \Rightarrow \angle ASM = \angle AMS \Rightarrow AM = AS = 20$.

$\Rightarrow AA_1 = 30$.

3)



~~пусть $\sin\angle AA_1B = \alpha$.~~

~~$2 \cdot 30 \cdot 10\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

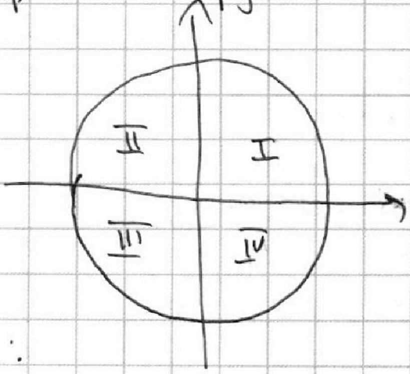
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.

$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos t = \frac{\pi}{2} - \arcsin t$.

Тригоном окружность!



$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$

$\Rightarrow -10\arcsin(\sin(x)) = 2(2\pi - x)$.

Случаи:

I. $x \in I \Leftrightarrow 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

тогда $\arcsin(\sin x) = x$.

$-10x = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = -4\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$. Не подходит.

II. $x \in II \Leftrightarrow 2\pi k + \frac{\pi}{2} \le x < \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$: $(\arcsin(\sin x) = \pi - x)$.

$-10(\pi - x) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 14\pi \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi$. Не подходит.

III. $x \in III \Leftrightarrow 2\pi k + \pi \le x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$:

тогда $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi k$.

$-10(x - 2\pi k) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$.

Найдём подходящие x.

$k=1$: $x = 2\pi$ (+)

$k=2$: $x = 4\pi + \frac{\pi}{2}$ (+). $\Rightarrow$ период 8π.

$k=3$: $x = 6\pi + \pi$ подходят x вида:

$k=4$: $x = 8\pi + \frac{3\pi}{2}$ $x = 8\pi k + 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$k=5$: $x = 8\pi + 2\pi$. $x = 8\pi k + \frac{9}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. $x \in II \Leftrightarrow 2\pi k + \frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

тогда $\arcsin(\sin x) = \pi - (x - 2\pi k) = \pi + 2\pi k - x$.

$-10(\pi + 2\pi k - x) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 14\pi + 20\pi k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k$.

$k=0$: $\frac{7}{6}\pi$ ~~$-\frac{\pi}{3} + 2\pi$~~

$k=1$: $\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi$ (+) период 10π.

$k=2$: $\frac{7}{6}\pi - \frac{2\pi}{3} + 4\pi = 4\pi + \frac{\pi}{2}$ (+). подходят x вида:

$k=3$: $\frac{7}{6}\pi - \pi + 6\pi$ $x =$

$k=4$: $\frac{7}{6}\pi - \frac{4\pi}{3} + 8\pi$

$k=5$: $\frac{7}{6}\pi - \frac{5\pi}{3} + 10\pi$

$k=6$: $\frac{7}{6}\pi - 2\pi + 12\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1 + 48.$

$\log_{x^3} \cdot 11^{-2} = -2\log_{x^3} 11.$

$\log_{11} 11^2 = 2$ $\quad \log_{11^3} 11 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\log_{11} 11.$

$\log \quad \log^4_{11} x \cdot \log_x 11 = 1.$ $\cancel{x \neq 0}$ $\boxed{\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}}.$

$\cancel{\log^4_{11} x - 6}$ $\quad -2\frac{1}{3}\log_x 11.$ $\quad \log_2 \frac{1}{4} = -2.$

$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}\frac{1}{t} - 5.$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{6}6 = \frac{20}{3}.$ $\quad \frac{2}{3} - 6 = \frac{16}{3}.$

$\frac{3t^5 - 16 + 15t}{3t} = 0.$ $\quad 3t^4 + 15t -$

$\log^4_{11} t + \log_x 11 = -\frac{13}{3}\log_t 11 - 5.$ $\quad \frac{1}{2}y = t.$ $\quad f(x).$ $g(x).$

$a^4 + \frac{1}{a} + \frac{13}{3a} + 5 = 0.$

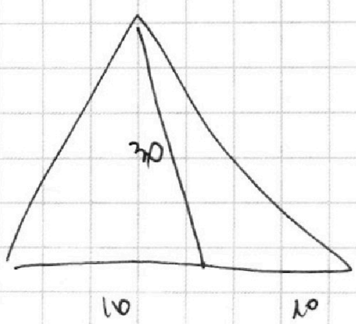
$a \neq 0.$ $\boxed{a > 0}.$

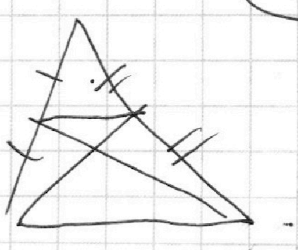
$\frac{3a^5 \quad 16 \quad + 15a}{3a} = 0.$ $\quad \log_{11} x + \log_{11} y = xy.$

$\Leftrightarrow$ найти всевозм. знач. суммы $\boxed{t_0 + b_0}.$ $\quad g(x) - f(x) = \underline{32}.$

$180.$ $\quad \overset{1}{\cancel{3}0} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{2} \cdot \sin = \overset{3}{\cancel{180}}$

$\sin = \frac{3}{10}.$





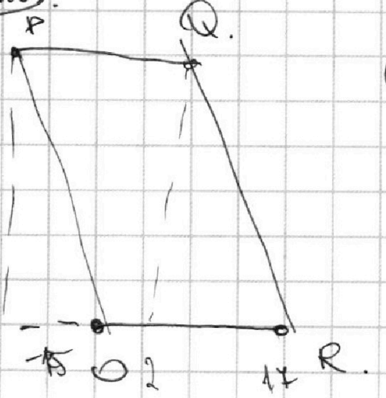
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

стороны 90 и 17.
целые.



$\boxed{6\,dx + dy = 48}$

~~$dx \in (0;17)$~~

$dx \in (-17;17)$

~~$dy \in$~~

$6 \cdot 17$.

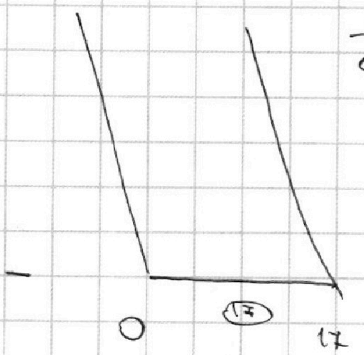
пусть

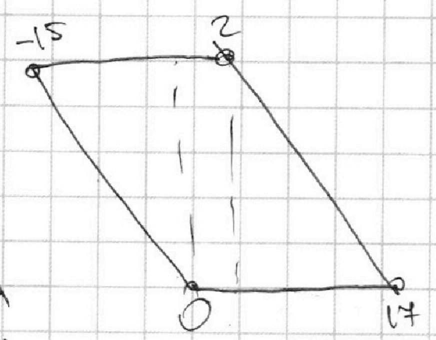
17 ...

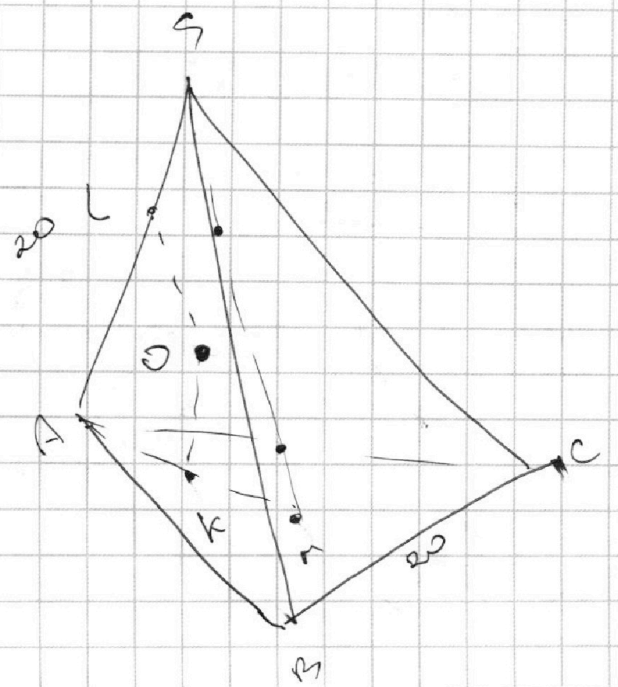
~~$f(x)$~~

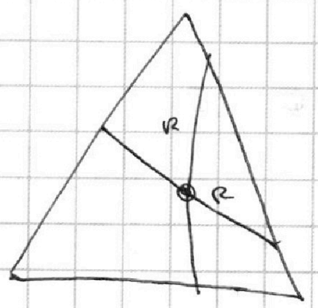
$y = 6x$.

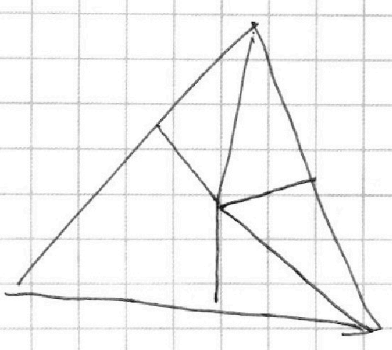
$6x - y = 0$











На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = k_1 \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$.
$bc = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$. $\Rightarrow$ $abc = \sqrt{k_1 k_2 k_3}$.
$ac = k_3 \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$x+y=6$
$y+z=14$ $\Leftrightarrow$ $x+y+z=18$. $\boxed{z=12 \\ y=2 \\ x=4}$
$z+x=16$

$\begin{array}{r} 46 \\ +14 \\ \hline 60 \end{array}$

$\begin{cases} x+y=13 \\ y+z=21 \\ z+x=25 \end{cases}$ суммарная степень тройки хотя бы $\underline{30}$.

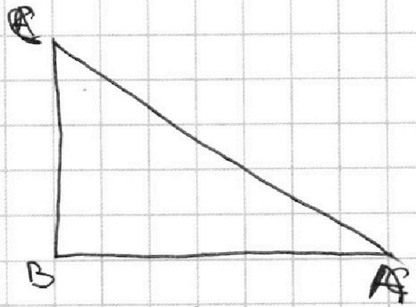
$z=17$
$y=4$
$x=9$

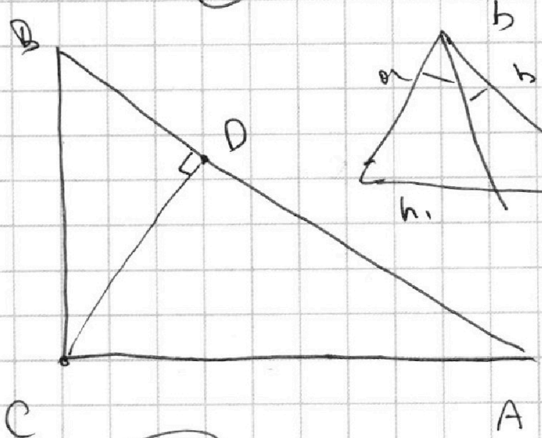
26

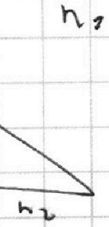
$\cancel{52}$

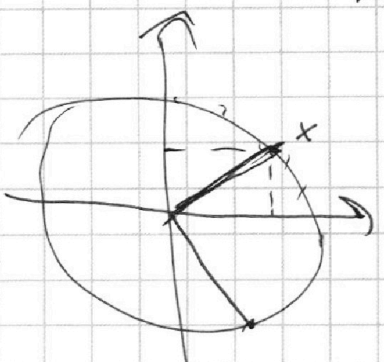
$\begin{array}{r} 39 \\ +13 \\ \hline 52 \end{array}$

$\frac{a}{b} = \frac{h_1}{h_2}$.









пусть $x \in I$.

$\arccos \sqrt{1-\cos^2 x}$. $= \boxed{const}$.

$\arccos t + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

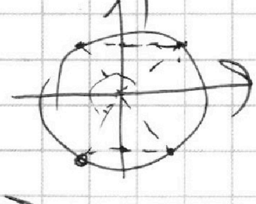
~~$\arccos x =$~~

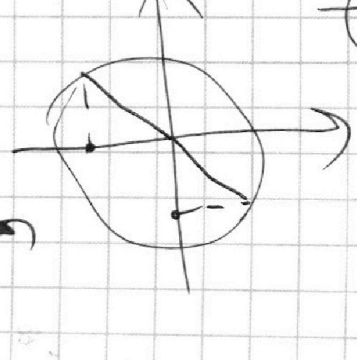
$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$.

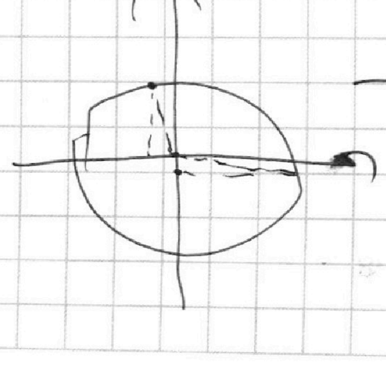
$\boxed{\alpha + \beta = \pi. \\ \pi - \arcsin.}$

$10 \arccos t = 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin t\right)$.

при $t>0$ ☺. при $t<0$?



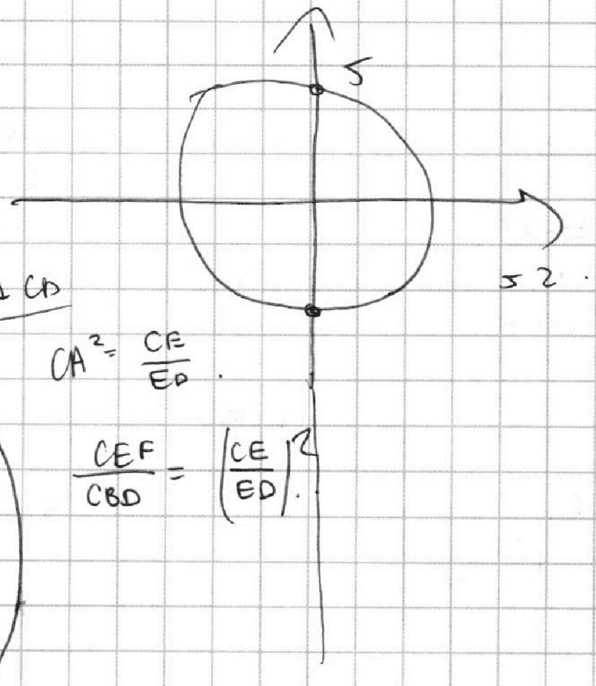




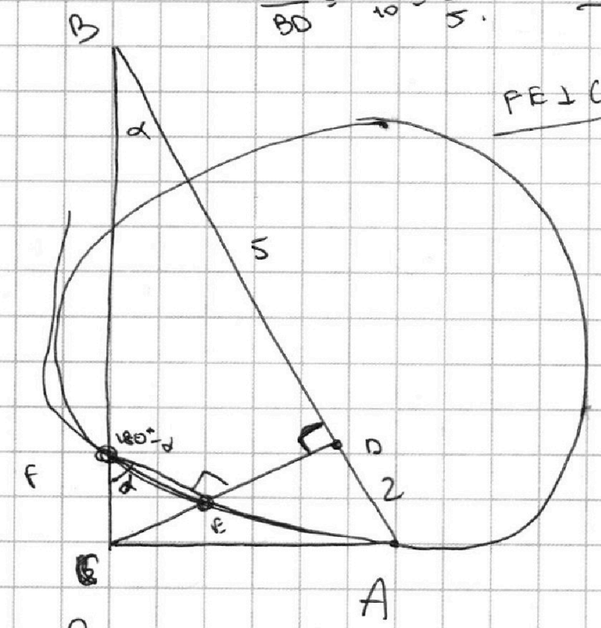
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



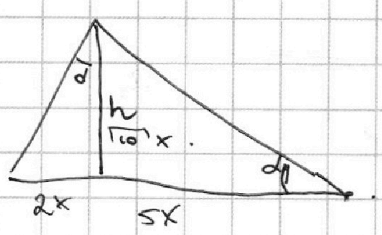
$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}.$



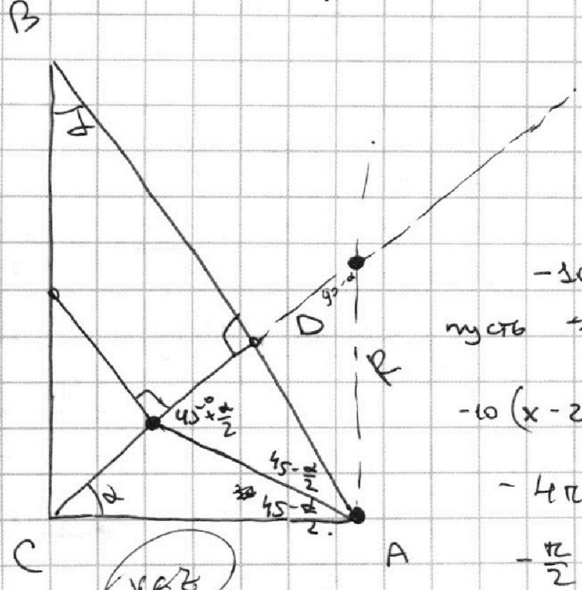
FE ⊥ CD

$CA^2 = \frac{CE}{ED}.$

$\frac{CEF}{CBD} = \left(\frac{CE}{ED}\right)^2.$



$\frac{2x}{h} = \frac{h}{5x} \Leftrightarrow h^2 = 10x^2.$



$-10\arcsin(\sin x) = \cancel{9\pi - 2x} \cdot \underline{4\pi - 2x}.$

пусть $\cancel{2x}$.

$-10(x - 2\pi k) = 4\pi - 2x.$

$-4\pi - 20\pi k = 8x$

$-\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k = x.$

КВЗ.

$(x^2 + (y+9)^2 - 4)$

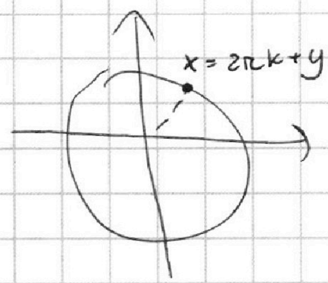
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2}$.



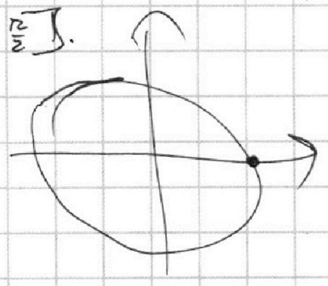
$4\pi - 2x = -10\arcsin(\sin x)$

$4\pi - 2x = -10(x - 2\pi k)$

$8x = 20\pi k - 4\pi$.

$x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$.

arcsin. $\arcsin \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



$\cancel{2\pi k}$

2π.

$4\pi + \frac{\pi}{2}$.

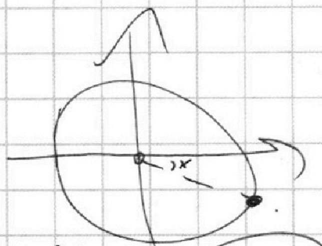
$6\pi + \pi$.

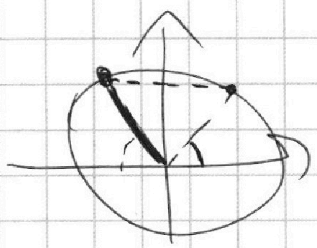
1 $-5\pi \le 4\pi - 2x \le 5\pi$

$2x \le 9\pi$

$x \le 4\pi + \frac{\pi}{2}$.

$-\frac{\pi}{2} \le x$

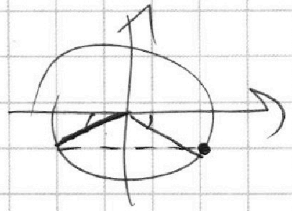




$x + \arcsin(\sin x) = \pi$. $\Leftrightarrow$ $\pi - x$

$\frac{9}{2}\pi$?

2π



0 $\frac{5}{2} < \frac{17}{3} < \frac{7}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{6}$.

$= 5\pi$

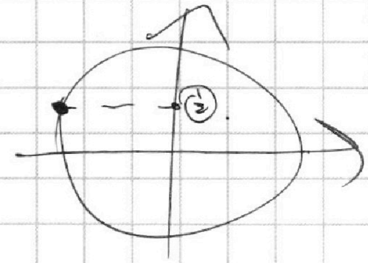
$\frac{7\pi}{6}$. $-\frac{1}{2}$. $\frac{17\pi}{6} = 3\pi - \frac{\pi}{6}$.

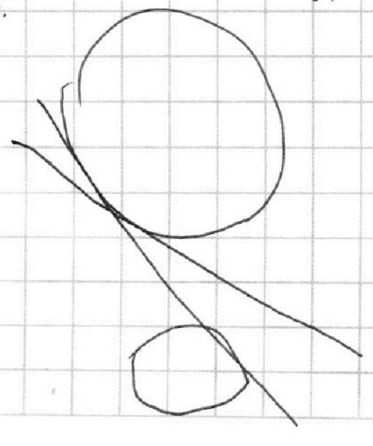
10. $\frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$. 9. 27. $\frac{7}{3}$

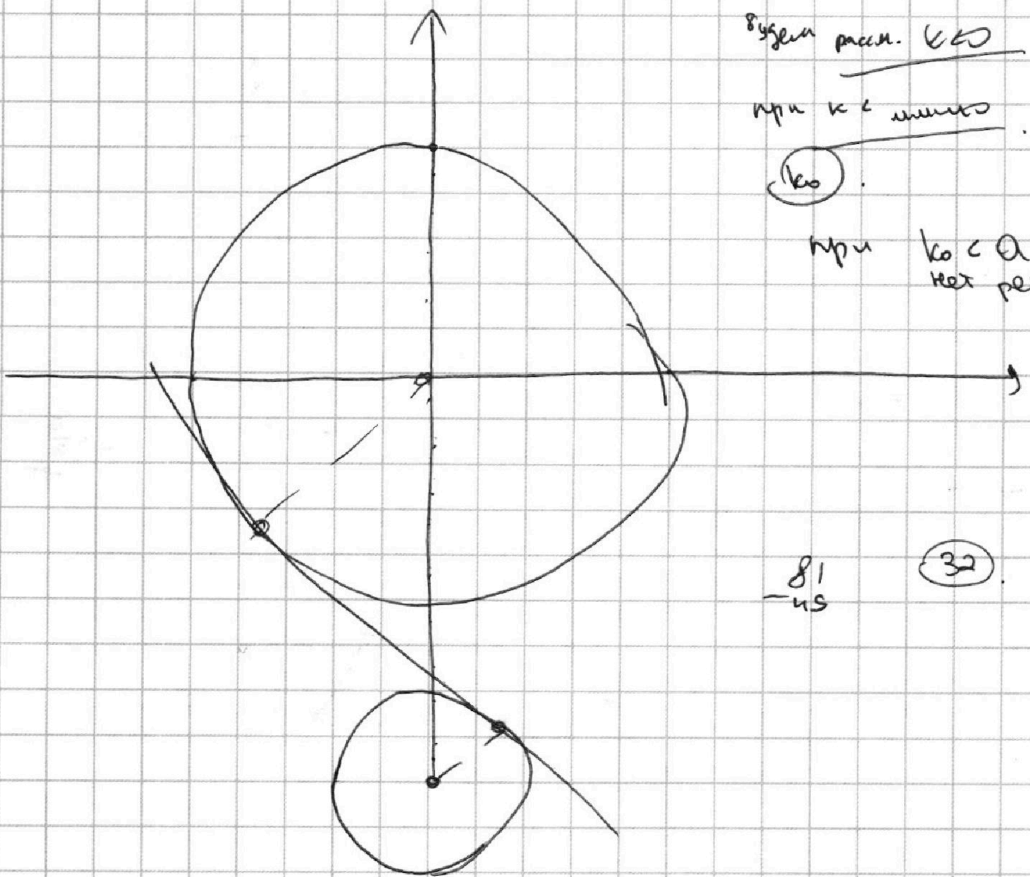
$\frac{17\pi}{6}$.

$27 - 17 = \frac{10\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$







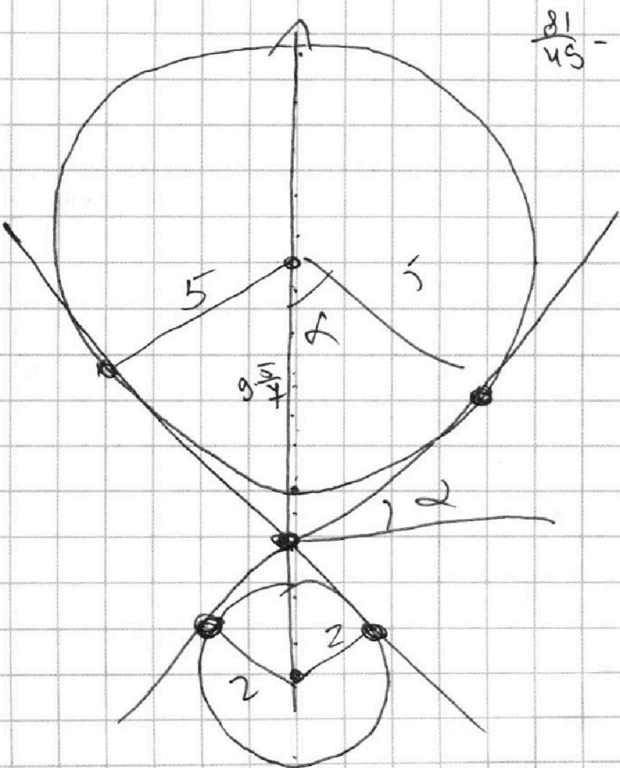
будем рассм. $k<0$.

при $k<$ мини0.

k_0.

при $k_0 < a < 0$
нет решений.

$\frac{81}{45}$ (32).



$\frac{81}{45} - 1 = \frac{32}{45}$.

$\frac{\cancel{8} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{7}}{\cancel{8}}$