



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за  $a_k$  - степень вхождения простого числа  $k$  в разложение числа  $a$  (аналогично и для других букв.). Тогда (процелившись в тройки неравий)

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \\ c_2 + a_2 \geq 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ c_3 + a_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ c_5 + a_5 \geq 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 26,5 \vee a_5 + c_5 \geq 30$$

Т.к.  $a_k \in \mathbb{Z}$ , получаем, что

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 21 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (abc)_2 \geq 21 \\ (abc)_3 \geq 21 \\ (abc)_5 \geq 30 \end{cases}$$

Т.е.  $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  (и это значение достигается

при  $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$ ;  $b = 2^2 \cdot 3^3$ ;  $c = 2^{11} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$ ).

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

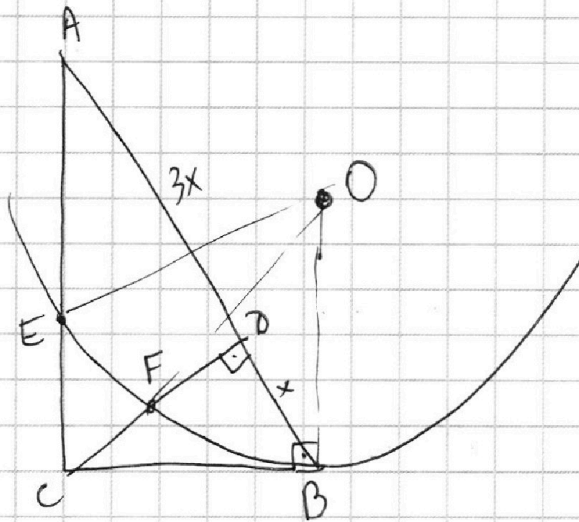
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



Пусть  $AD = 3x$   
 $DB = x$

$CD^2 = AD \cdot DB$  в прямоугол.  $\Delta$

$$CD = \sqrt{3}x ; CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{3}x)^2} = 2x$$

$$\frac{AB}{BC} = 2 \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

N3

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\sin t) = t \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x < \pi: \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-2\pi \leq x < -\pi: \arcsin(\cos(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi))) = -\frac{3\pi}{2} - x$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi: \arcsin(\cos(2\pi - x)) = \frac{\pi}{2} - (2\pi - x) = -\frac{3\pi}{2} + x$$

$$-\pi \leq x \leq 0: \arcsin(\cos(-x)) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$-3\pi \leq x < -2\pi: \arcsin(\cos(-2\pi - x)) = \frac{\pi}{2} + 2\pi + x = \frac{5\pi}{2} + x$$

Решим ур во всех 5 случаях.

$$1) 5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 2\pi = 6x; \quad x = \frac{\pi}{3} - \text{подходит}$$

$$2) 5(-\frac{3\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad -8\pi = 6x; \quad x = -\frac{4}{3}\pi - \text{подходит}$$

$$3) 5(-\frac{3\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = 8\pi; \quad x = 2\pi - \text{подходит}$$

$$4) 5(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -2\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2} - \text{подходит}$$

$$5) 5(\frac{5\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -12\pi; \quad x = -3\pi - \text{подходит}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

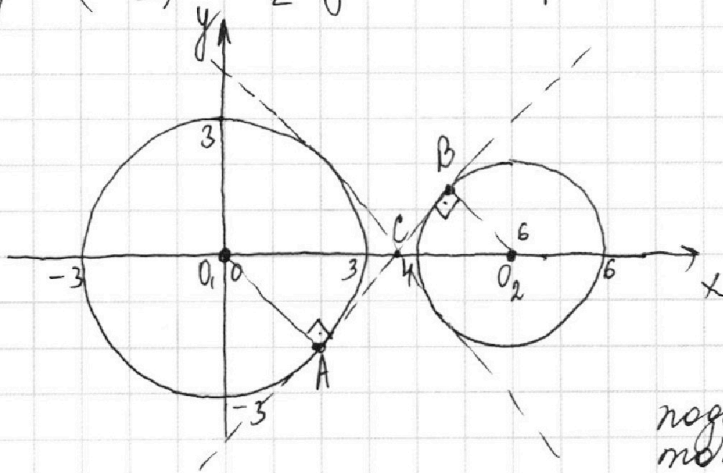
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 3^2)((x-6)^2 + y^2 - 2^2) = 0 \end{cases}$$

Решением первого ур. является прямая  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ .

Решением второго явл. объединение 2 окружностей:

с центром  $O_1(0;0)$  и  $R_1=3$  и с центром  $O_2(6;0)$  и  $R_2=2$ .

Найдём такие  $a$ , для которых найдётся  $b$ , чтобы сист. имела 4 решения. Т.к. прямая пересекает окружность не более, чем в двух точках и две заданные окружности не пересекаются, прямая  $y = (-\frac{a}{2})x + \frac{3b}{2}$  должна пересекать каждую в 2 точках.



Рассмотрим крайние положения прямой (с наиб. и наим. угловым коэф.) если угл. коэф. будет между крайними то можно будет подобрать  $b$  чтобы было 4 точки пересечения

Проведём касательную с наиб. угл. к. (касание в т. А и В). Пусть она пересекла ось  $Ox$  в т. С. Тогда  $\triangle ACO_1 \sim \triangle BCO_2$  (как прямодг. по острому углу)

Тогда  $\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{3}{2}$ ,  $O_1C + O_2C = 6 \Rightarrow$

$CO_1 = \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5}$ . Угл. коэф. равен  $\operatorname{tg} \angle BCO_2 = \operatorname{tg} \angle O_2CA = \frac{O_1A}{AC}$

По т. Пиф.:  $AO_1^2 + AC^2 = O_1C^2 \Rightarrow AC = \sqrt{(\frac{18}{5})^2 - 3^2} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$

$\operatorname{tg} \angle O_1CA = \frac{3}{\frac{3\sqrt{11}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$  Аналогично проделываем с кас. с

мин угл. коэф.:  $-\frac{5\sqrt{11}}{11}$  Итого,  $-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11}$ ;  $-\frac{10\sqrt{11}}{11} < a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$

Ответ:  $a \in (-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11})$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}; \quad \log_{x^2} 243 = \log_{x^2} (3^5) = \frac{5}{2} \log_x (3) = \frac{5}{2 \log_3 x}$$

$$\log_{5y} (3) = \frac{1}{\log_3 5y}; \quad \log_{25y^2} (3^{\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5}}{2} \log_{5y} (3) = \frac{\sqrt{5}}{2 \log_3 (5y)}$$

Пусть  $\log_3 x = a$ ; ~~пусть~~  $\log_3 (5y) = b$ . По условию

$$\begin{cases} a^4 + \frac{b}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{b}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2b} = -8 \end{cases} \Rightarrow a < 0 \text{ (так как } a^4 + \frac{7}{2a} > 0) \\ \Rightarrow b > 0 \text{ (так как } b^4 - \frac{7}{2b} < 0).$$

$$a^4 + \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$$

$$b^4 - a^4 = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}; \quad (a+b) \left( (b^2+a^2)(b-a) - \frac{7}{2ab} \right) = 0$$

Т.к.  $b^2+a^2 > 0$ ,  $b-a > 0$  и  $ab < 0$  ( $-\frac{7}{2ab} > 0$ ),  
вторая скобка  $> 0 \Rightarrow a+b=0$

$$\log_3 x + \log_3 (5y) = 0; \quad \log_3 (5xy) = \log_3 (1)$$

$$5xy = 1; \quad xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

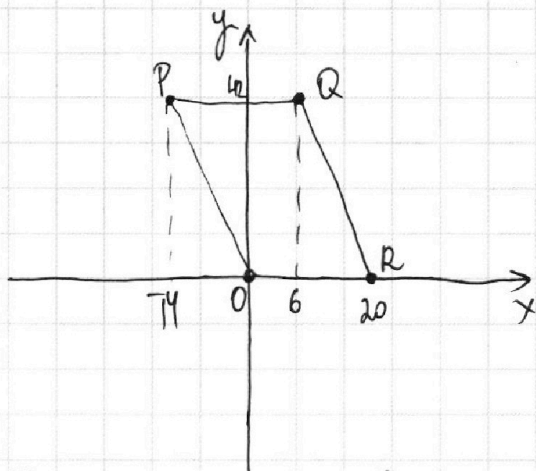
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6



Прямая PQ задается ур.

$$y = -3x.$$

QR пересекает ось Oy  
в т. 20 · 3 = 60  
(т.к. QR || OP и имеет  
угл. коэф. -3).

Область внутри n-ма задается:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ -3x \leq y \leq 60 - 3x \end{cases}$$

Т.к.  $0 \leq 3x + y \leq 60$

Найдем, сколько точек внутри n-ма таких, что  
 $3x + y = n$ , где  $0 \leq n \leq 60$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

Если  $n \div 3$ , то таких целых точек  $\frac{42}{3} + 1 = 15$   
(лежат на прямой || OP, где  $y \div 3$ ).

Если  $n \nmid 3$ , то таких точек 14.

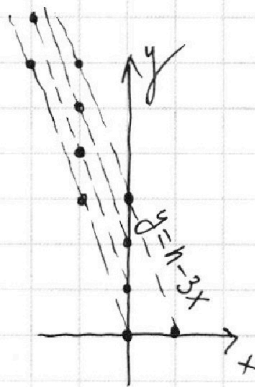
Теперь  $(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$ .

Если значение одной из скобок  $\div 3$ ,  
то и второе тоже (т.к.  $33 \div 3$ ).

Таких пар значений 10 шт.

- 33 и 0
- 36 и 3
- ⋮
- 60 и 27

Получается, пар таких точек всего  
 $15^2 \cdot 10$



Если значения скобок не делятся на ~~каждый~~ 3:

(Всего возм. пар значений  $60 - 33 + 1 = 28$ ).  
Значит, не дел. на 3 будет  $28 - 10 = 18$ .  
Пар точек таких будет  $18 \cdot 14^2$

Всего,  $15^2 \cdot 10 + 18 \cdot 14^2 = 2250 + 3528 = 5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

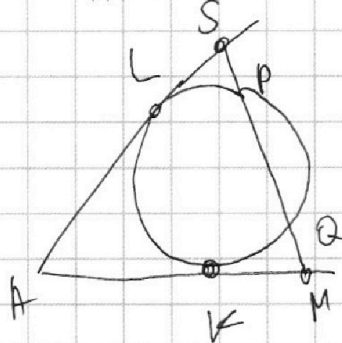
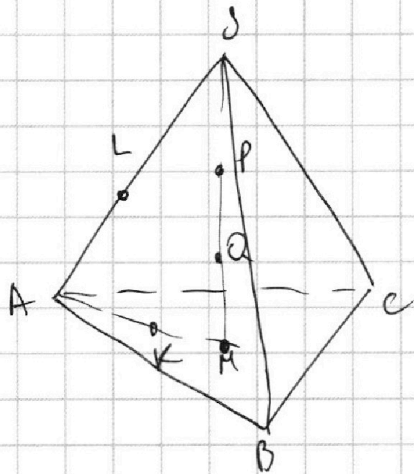
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7

Т.  $A, L, K, S, P, Q, M$  лежат в одной пл, причем окр. сечением сферы проходит через  $P$  и  $Q$  и кас.  $AS$  и  $AM$  в т.  $L$  и  $K$ .



$$\begin{aligned} LS^2 &= SP \cdot SQ \\ KM^2 &= MQ \cdot MP \\ SP &= QM \Rightarrow \\ SQ &= MP \Rightarrow \\ LS &= KM. \end{aligned}$$

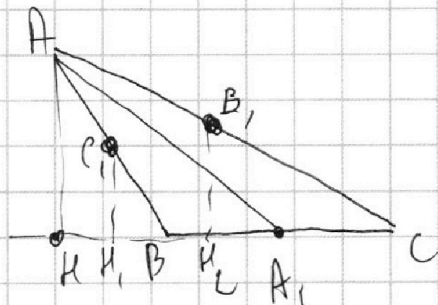
$$AL = AK \Rightarrow AM = AS$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_1; \quad AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 90$$

(H-осн. высоты  $AH$  к  $BC$ )

$$AH = \frac{90}{6} = 15$$



По Т. Пиф.  $A_1H = \sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}$

Опустим перпен  $C, H_1$  и  $B, H_2$  на  $BC$ .

$$BH_2 = CH_1 = \frac{AH}{2} = \frac{15}{2}; \quad BH_2 = BH + HH_2 = \left(\frac{6 + 3\sqrt{11}}{2}\right) - 3\sqrt{11} = \frac{6 - 3\sqrt{11}}{2}$$

$$BB_1 = \sqrt{BH_2^2 + B_1H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{6 - 3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$$

$$CH_1 = CB + BH_1 = 12 + \frac{3\sqrt{11} - 6}{2} = \frac{18 + 3\sqrt{11}}{2}$$

$$CC_1 = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{18 + 3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2} \cdot \sqrt{15^2 + (18 + 3\sqrt{11})^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \sqrt{225 + 36 - 36\sqrt{11} + 99} \cdot \sqrt{225 + 324 + 108\sqrt{11} + 99} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{2} \sqrt{360 - 36\sqrt{11}} \cdot \sqrt{648 + 108\sqrt{11}} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{36 \cdot 108} \cdot \\ &\cdot \sqrt{10 - \sqrt{11}} \sqrt{6 + \sqrt{11}} = \frac{9}{2} \cdot 36\sqrt{3} \sqrt{60 - 11 - 6\sqrt{11} + 10\sqrt{11}} = \\ &= 162\sqrt{3} \sqrt{49 + 4\sqrt{11}} \end{aligned}$$

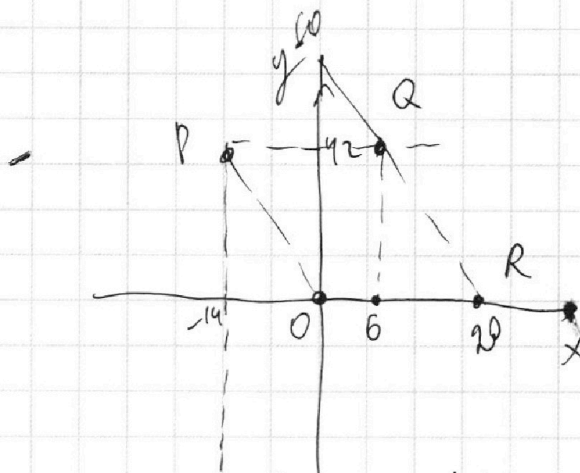
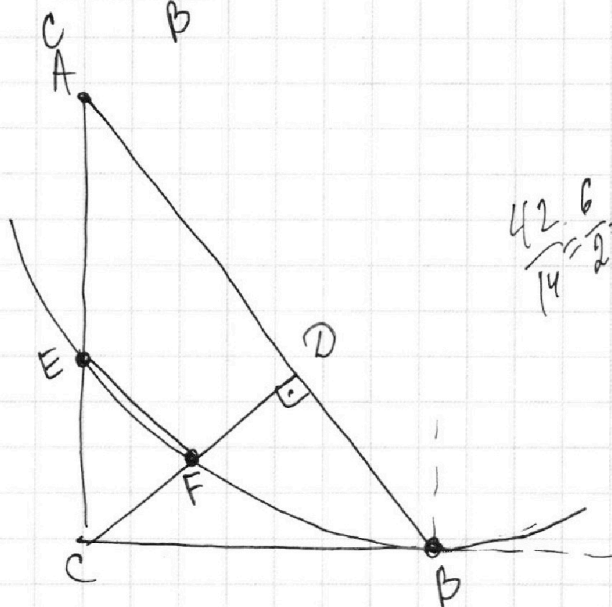
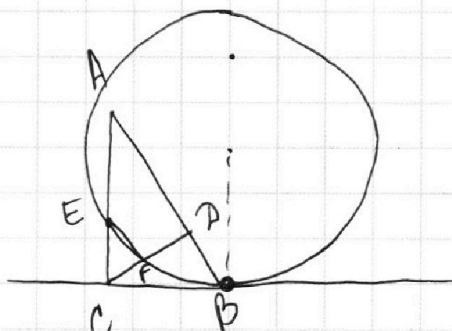
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



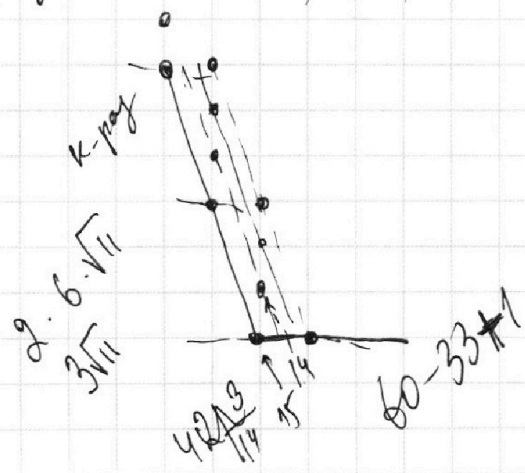
$$\frac{42 \cdot 6}{14} = \frac{252}{14} = 18$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ -3x \leq y \leq 60 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 3x + y \leq 60 \\ 0 \leq y \leq 42 \\ |(3x + y)_1 - (3x + y)_2| = 33 \\ 33 - 0 = 33 \\ 60 - 27 = 33 \end{cases}$$

$$3x + y = h, \text{ где } h = 0, \dots, 27, 33, \dots, 60$$

$$\frac{49 \cdot 3 = 147}{\sqrt{747 + 42\sqrt{11}}}$$



- 60
- 33 < 15 < 15
- 36 < 4 < 3
- ...
- 60 < 4 < 27
- 27 < 0 < ... < 9
- 15 < 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 2250 + \\ \times 14 \\ \hline 9000 \\ 9000 \\ \hline 31500 \\ + 2250 \\ \hline 33750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +7+4 \\ \times 196 \\ \hline +1118 \\ 1568 \\ 196 \\ \hline 3528 \end{array}$$

27

$$\log_x 243 = \log_{x^2} 3^5$$

$$243 = 3^5 = 3^6$$

$$\begin{aligned} \log_3 x &= a \\ \log_3 5y &= b \end{aligned}$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$(\log_3 5y)^4 + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3 5y} - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$$

$$a < 0, b > 0$$

$$a^4 - b^4 = \frac{7}{2}$$

$$b^4 - a^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{a+b}{ab} \right)$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{7}{2a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2b} = -8 \end{cases}$$

$$(b^2 + a^2)(b-a) = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}$$

$$\log_3 a + b = 0$$

$$(b^2 + a^2)(b-a) ab = \frac{7}{2}$$

$$(a+b) \left( (a^2 + b^2)(b-a) - \frac{7}{2ab} \right)$$

$a+b = ?$

$$6 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2 - \frac{11}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{12}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

4-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$\alpha \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$\sin \alpha = \cos x$$

выполн

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$y^2 + (x^2 - 12x + 36) - 4$$

$$y^2 = -x^2 + 12x - 36 + 4$$

$$225 + 135 = 360$$

$$225 + 99 + 108 = 432$$

$$225 + 99 + 108 + 108 = 540$$

$$15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2 = 15^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{11} + 9 \cdot 11$$

$$\frac{9}{2} \sqrt{15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2} \cdot \sqrt{15^2 + (18 + 3\sqrt{11})^2}$$

$$225 + 36 + 99 - 36\sqrt{11}$$

$$\sqrt{360 - 36\sqrt{11}} \cdot \sqrt{648 + 108\sqrt{11}}$$

$$= 9 \cdot \sqrt{180 - 9\sqrt{11}} \cdot \sqrt{108 + 12\sqrt{11}}$$

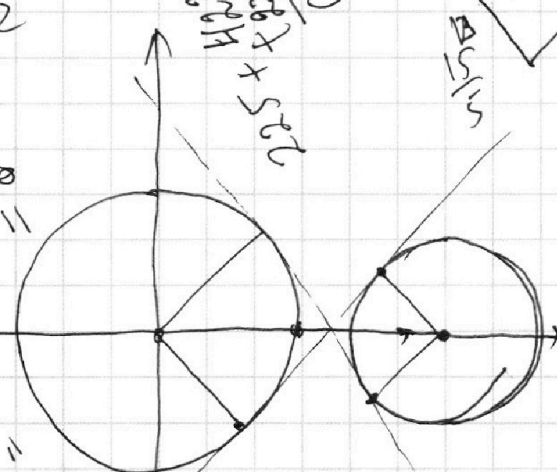
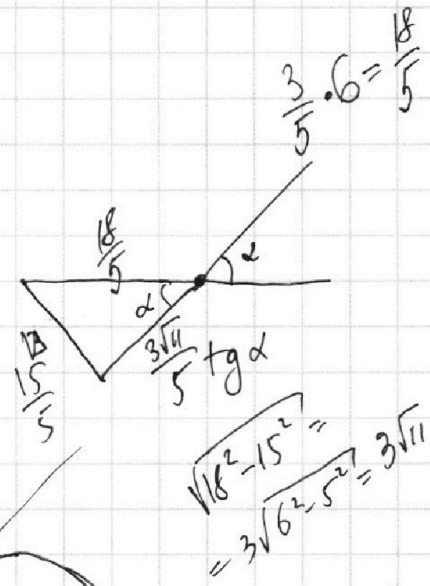
$$= 9 \cdot \sqrt{180 - 9\sqrt{11}} \cdot \sqrt{108 + 12\sqrt{11}}$$

$$= 9 \cdot \sqrt{180 - 9\sqrt{11}} \cdot \sqrt{108 + 12\sqrt{11}}$$

$$\frac{225}{8\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{6^2 - 5^2} = 3\sqrt{11}$$

6  
2.3.18 = 6.18  
x 6 / 108



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a_2, a_3, a_5$

$b_2, b_3, b_5$

$c_2, c_3, c_5$

$$abc : (2^{19} 3^{18} 5^{30})$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 9$$

$$b_2 + c_2 \geq 14$$

$$a_2 + c_2 \geq 19$$

$$a_2 c_2 = 12$$

$$a_2 = 7$$

$$b_2 = 2$$

$$10 + 13 + 18 =$$

$$= 30 + 11 = 41$$

$$20,5$$

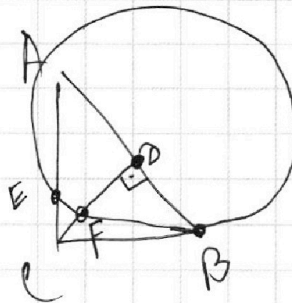
$$40 + 13 = 53$$

$$25,5$$

$$(abc)_2 \geq 21$$

$$(abc)_3 \geq 21$$

$$(abc)_5 \geq 27$$



$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\begin{array}{r} 19 + 9 = 28 \\ + 1 \\ \hline 29 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 + 19 = \\ = 29 + 20 \\ \hline \end{array}$$

$$c_2 = 11$$

$$a_2 = 7$$

$$b_2 = 2$$

$$c_3 = 10$$

$$a_3 = 8$$

$$b_3 = 3$$

$$a_5 = 13$$

$$a_5 = 17$$

$$b_5 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution for a geometry problem involving a pyramid  $SABC$  and a sphere.

**Initial Diagrams:**

- Pyramid  $SABC$  with base  $ABC$  and apex  $S$ . Edges  $SA, SB, SC$  are labeled 12.
- Right triangle  $AMC$  with  $\angle C = 90^\circ$  and  $AM = 12$ .
- Calculation:  $\sqrt{18^2 - 15^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} = 3\sqrt{11}$ .

**Geometric Construction:**

- A sphere is inscribed in the pyramid, touching the base  $ABC$  at points  $K, M$  and the lateral faces at points  $L, P, Q$ .
- The center of the sphere is  $O$ .
- The radius is  $R$ .
- The distance from the apex  $S$  to the center  $O$  is  $SO$ .
- The distance from  $S$  to the base  $ABC$  is  $SM = 18$ .

**Calculations:**

- $S_{ABC} = 90^\circ$
- $AM = 12$
- $AA_1 = 18$
- $6 \cdot h = 90 \implies h = \frac{9 \cdot 30}{3 \cdot 2} = 15$
- $6 - 3\sqrt{11} + \frac{6 + 3\sqrt{11}}{2} = \frac{9}{2}$
- $\frac{6 + 3\sqrt{11}}{2} + \frac{6 - 3\sqrt{11}}{2} = 6$
- $\frac{6 + 3\sqrt{11}}{2} = \frac{9 + 3\sqrt{11}}{2}$

**Final Diagrams:**

- Pyramid  $SABC$  with base  $ABC$  and apex  $S$ . Edges  $SA, SB, SC$  are labeled 12.
- Right triangle  $AMC$  with  $\angle C = 90^\circ$  and  $AM = 12$ .
- Right triangle  $SMC$  with  $SM = 18$  and  $MC = 6$ .
- Right triangle  $SMO$  with  $SM = 18$  and  $SO = 9$ .
- Right triangle  $SMK$  with  $SM = 18$  and  $SK = 15$ .
- Right triangle  $SMK$  with  $SM = 18$  and  $SK = 15$ .
- Right triangle  $SMK$  with  $SM = 18$  and  $SK = 15$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

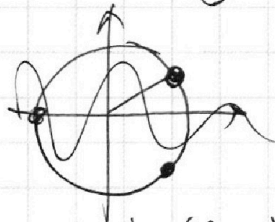


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}; \quad -3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \sqrt{1-x^2} \text{ не!}$$



$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi < -x < 0$$

$$0 < x < \pi$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-2\pi \leq x \leq -\pi$$

$$\arcsin(\cos(x+\pi)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - (x+\pi))) = -\frac{3\pi}{2} - x$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin(\cos(\pi - x)) \stackrel{\arcsin}{=} \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - 2\pi + x)) = -\frac{3\pi}{2} + x$$

$$-\pi \leq x \leq 0$$

$$\arcsin(\cos(\pi - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$-3\pi \leq x \leq -2\pi$$

$$\arcsin(\cos(-2\pi - x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi + x)) = x + \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

cos 1

$$2\pi = 6x$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} = -2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

arc

$$4x = \frac{\pi}{2} - \frac{25\pi}{2} = -12\pi$$

$$-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

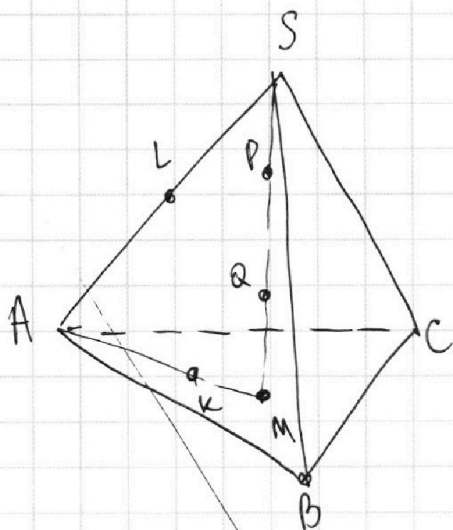
$$-8\pi = 6x \quad \frac{\pi}{2} + \frac{15\pi}{2} = 8\pi$$

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7



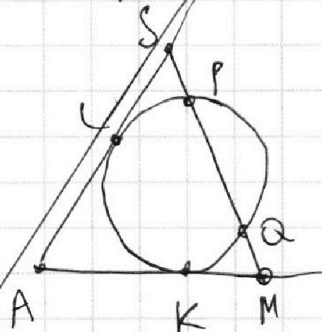
Т. А, L, K, а значит и S, P, Q, M лежат в одной плоскости, причем окружность сечение сферы проходит через P и Q и кас. AS и AM в Т. L и K.

$$LS^2 = SP \cdot SQ$$

$$KM^2 = MQ \cdot MP$$

Т.к.  $SP = QM$ , то и  $SQ = MP \Rightarrow$

$$LS = KM.$$



$b_2 = 2$   
 $a_2 = 4$   
 $c_2 = 12$

$$AL = AK \Rightarrow AM = AS$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 90$$

(H - осн. высота из A на BC)

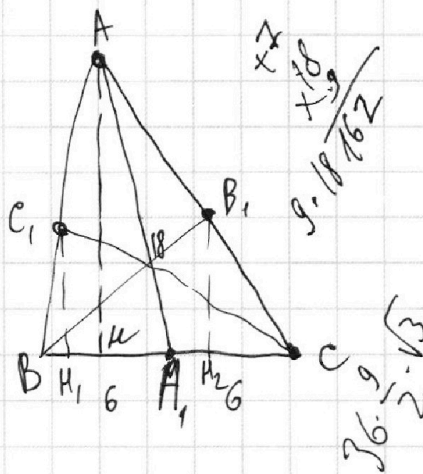
$$\Rightarrow AH = \frac{90}{\frac{1}{2} \cdot 12} = 15$$

$$\Rightarrow \text{По Т. Пиф. } AH = \sqrt{18^2 - 15^2} = 3\sqrt{11}$$

Опустим перпендикуляры  $C_1H_1$  и  $B_1H_2$  на BC.

$$B_1H_2 = C_1H_1 = \frac{AH}{2} = \frac{15}{2} \neq; BH_2 = BH + H_2B = BH + \frac{HC}{2} = 9 \cdot 6 \cdot 3$$

$$= 6 - 3\sqrt{11}$$



$324 + 36 = 360$   
 $3528 + 2250 = 5778$   
 $295 + 99 = 394$   
 $\frac{360}{2} = 180$   
 $\frac{5778}{2} = 2889$   
 $\frac{394}{2} = 197$   
 $180 + 197 = 377$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

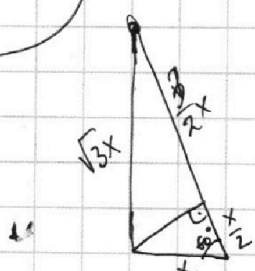
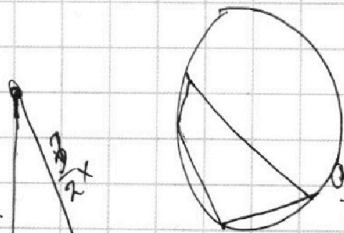
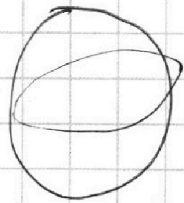
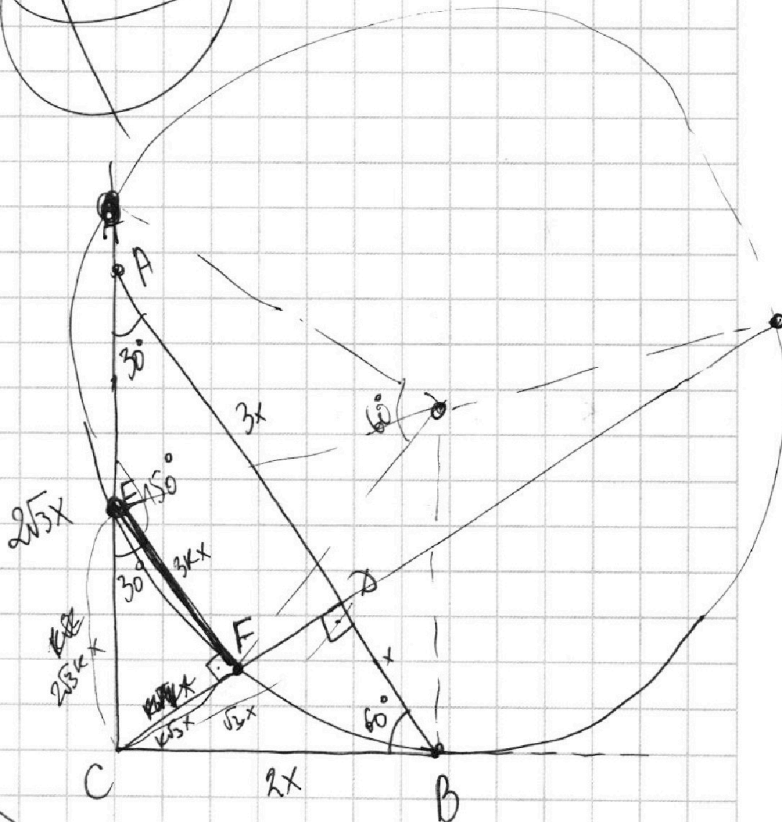
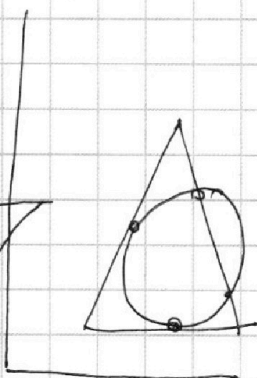
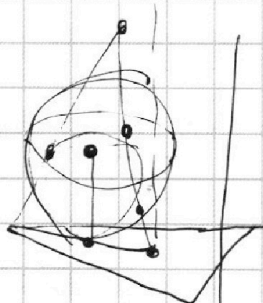
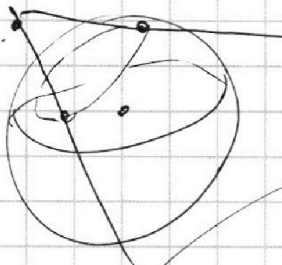
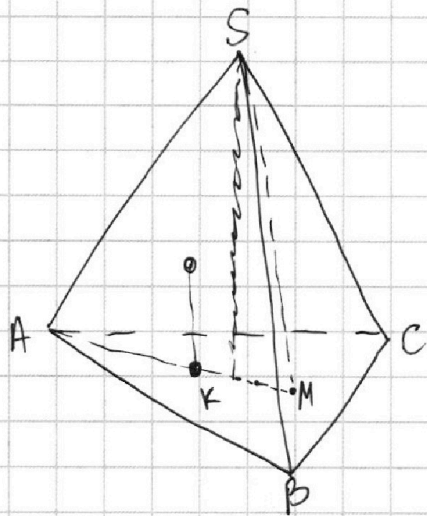
- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7.



$a + b = 2\sqrt{3}$

$(2x)^2$

$(2x)^2 = 2x \cdot S$   
 $S = \frac{2x}{K}$

$90:3 = 30$   
 $30:2 = 15$

