



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

✓ 3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

✓ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

✓ 5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

✓ 7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

✓ а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

✓ б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть  $a$  при разложении на простые множ. имеет степени при 2  $\alpha_1$ , при 3  $\beta_1$ , при 5  $\gamma_1$ ;

аналог.  $\Rightarrow a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot p_1$ ,  $p_1$  не дел на 2, 3, 5;

аналог.  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot p_2$ ;  $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

тогда  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 4$ ,  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 11$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 14$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 4 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 14 \end{cases}$$

аналог.  $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$ ,  $\beta_2 + \beta_3 \geq 15$ ,  $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$  ;  $\alpha_3 + \alpha_1 \geq 14$ ,  $\beta_3 + \beta_1 \geq 14$ ,  $\gamma_3 + \gamma_1 \geq 14$  ; тогда

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{13 + 14 + 14}{2} = 20,5$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{11 + 15 + 14}{2} = 20,5$ , т.к.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N} \geq 0$ , то

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \frac{14 + 18 + 14}{2} = 23,5$ , т.к.  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{N} \geq 0$ , то

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 24$  ; т.к.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 21$  ;  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21$  ;  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 24$  ;

тогда  $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$

Пример:  $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^4$ ;  $b = 2^3 \cdot 3^5$ ;  $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^9$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle EFC \sim \angle ABE$  по  
соотв

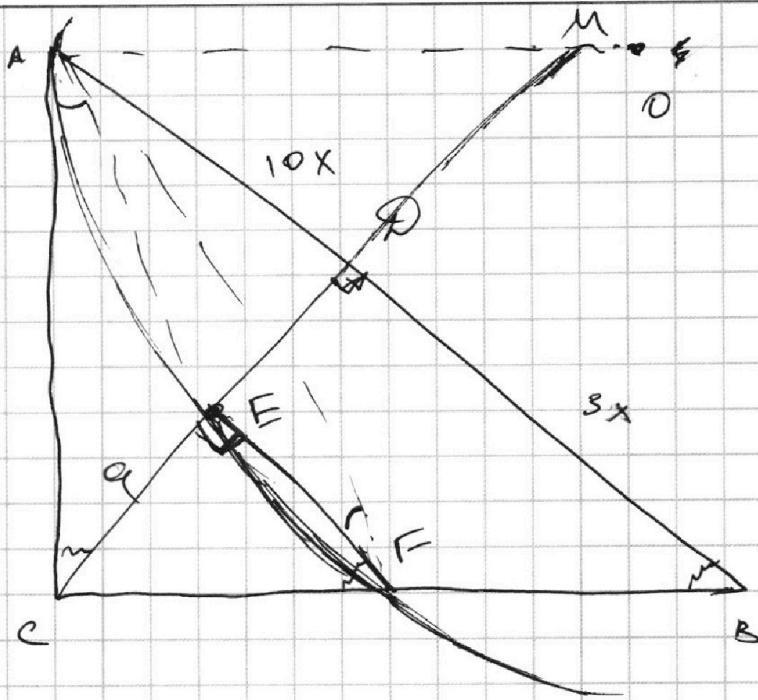
$\angle CAE = \frac{1}{2} \angle ABE$   
 $\angle AFE = \frac{1}{2} \angle ABE$  |  $\rightarrow$

$\rightarrow \angle CAE = \angle AFE$

$$CD = \sqrt{30}x$$

$$AC = \sqrt{150}x$$

$$CD \cdot DM = 100x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

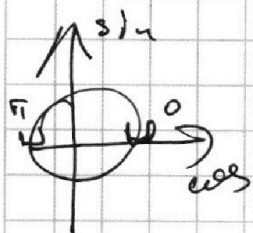
$$\sqrt{3} \operatorname{arccos}(\sin x) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$x \in [0; 5\sqrt{11}] \Rightarrow x + \frac{3\sqrt{11}}{2} \in [0; 5\sqrt{11}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [-2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$$

$$\begin{aligned} 5 \operatorname{arccos}(\sin x) &= 5 \operatorname{arccos}\left(\sin\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) \sim \\ &= 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha = x - \frac{\sqrt{11}}{2}$ ; тогда  $\operatorname{arccos}(\cos \alpha)$   
при  $\alpha \in [-2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$  может принимать след. значения:



~~$\alpha$ ,  $\alpha + 2\sqrt{11}$ ,  $\alpha - 2\sqrt{11}$~~

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\sqrt{11}; -\alpha; \alpha; 2\sqrt{11} - \alpha; \alpha - 2\sqrt{11} \\ &(\text{I}) \quad (\text{II}) \quad (\text{III}) \quad (\text{IV}) \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

$$\text{I)} \quad 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(x + \frac{3\sqrt{11}}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x + \frac{15\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow 4x = -12\sqrt{11}$$

$$\text{Проверка } 5 \operatorname{arccos}(0) = \frac{3\sqrt{11}}{2} - 3\sqrt{11} \quad x = -3\sqrt{11}$$

$\geq 0$                        $\leq 0$                       - неверно

$$\text{II)} \quad 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2} - x\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$4\sqrt{11} = 6x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{6}, \text{ Проверка: } 5 \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$10\sqrt{11} = 10\sqrt{11} \text{ - верно}$$

$$\text{III)} \quad 5 \operatorname{arccos}\left(\cos\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow 4x = 4\sqrt{11} \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверка:  $5 \arccos(0) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \sqrt{11}$

$$\frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{2} - \text{верно}$$

IV) ~~5~~  $5 \left( \frac{5\sqrt{11}}{2} - x \right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + 1$

$$\frac{25\sqrt{11}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$6x = 11\sqrt{11} \quad x = \frac{11\sqrt{11}}{6}; \text{ Проверка:}$$

$$5 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$5 \cdot \frac{2\sqrt{11}}{3} = \frac{5\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$\frac{10\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$20\sqrt{11} = 9\sqrt{11} + 11\sqrt{11} = 20\sqrt{11} - \text{верно}$$

V) ~~5~~  $5 \left( x - \frac{5\sqrt{11}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$$5x - \frac{25\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$4x = 14\sqrt{11} \quad x = \frac{7\sqrt{11}}{2}$$

Проверка:  $5 \arccos(-1) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{7\sqrt{11}}{2}$

$$5\sqrt{11} = 5\sqrt{11} - \text{верно}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{11}}{6}; \sqrt{11}; \frac{11\sqrt{11}}{6}; \frac{7\sqrt{11}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

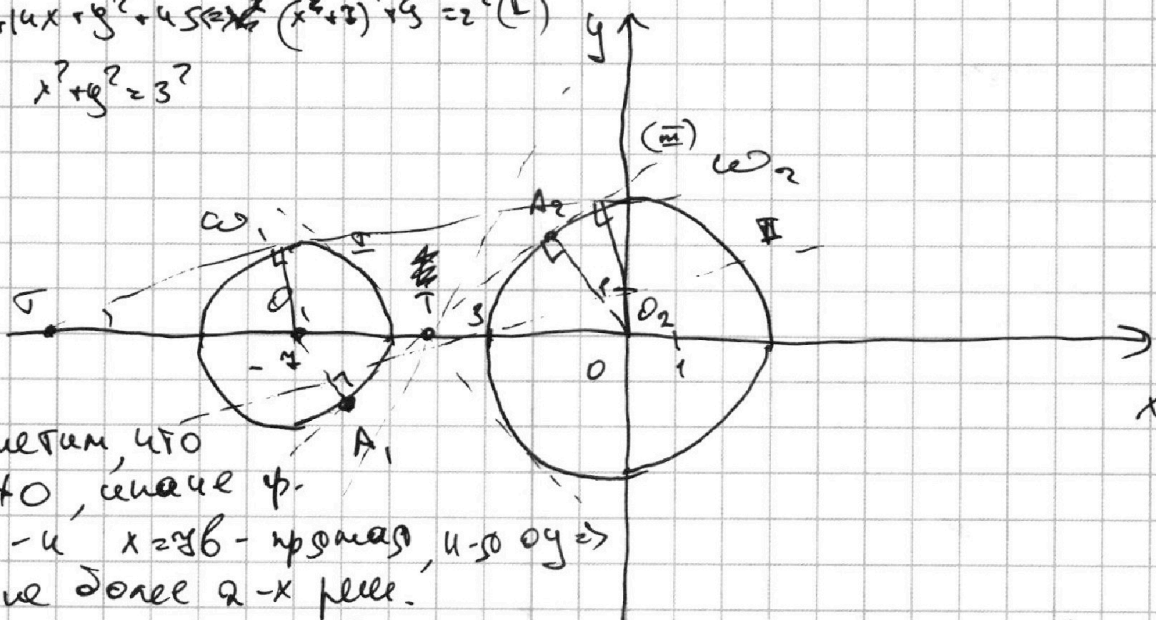
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x + 3ay - 3b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

~~4 1 стр~~

$$x^2 + 14x + y^2 + 45 = (x^2 + 7)^2 + y^2 = 2^2 \quad (I)$$

$$(II) \quad x^2 + y^2 = 3^2$$



Заметим, что  $O_1 \neq O_2$ , иначе  $\varphi = 0$  и  $x = 3b - 3a$  - прямая, и-то  $O_1 O_2 \Rightarrow$  не более 2-х решений.

Тогда (II):  $y = \frac{y_0}{3a} - \frac{x}{3a}$ , найдем, когда  $a < 0$  и пр. пр.  $y = \frac{3b}{3a} - \frac{x}{3a}$  имеет решение на  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (6 точек)

пусть  $\angle$  - г. пер. (II)  $\in O_1 A_1$ ;  $\angle O_1 T A_1 = \angle A_2 T O_2$  или верт  $\angle$ , тогда из того  $O_1 A_1 T \sim O_2 A_2 T \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{O_2 T}{O_1 T}$ , пусть  $T O_2 = t$ , тогда

$$\frac{3}{2} = \frac{t}{3-t} \Rightarrow 2(1-3t) = 2t$$

$$t = \frac{21}{5}$$

$$A_2 T = \sqrt{T O_2^2 - A_2 O_2^2} = \sqrt{\frac{441}{25} - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{\sqrt{216}}{5}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}}{5}; \quad \angle \varphi \leftarrow A_2 T O_2 = \frac{A_2 O_2}{T A_2} = \frac{3}{\frac{6\sqrt{6}}{5}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

4 стр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда общ. нас при  $a < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3a} = \pm g < A_1, \Gamma_2 =$

$= \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow 3a = -\frac{12}{5\sqrt{6}} \Rightarrow a = -\frac{4}{5\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{30 \cdot 15} =$

$= -\frac{2\sqrt{6}}{15}$ ; при  $a \geq 0$  аналог.  $a$  общ. нас  
 Случай  $a < 0$  / случай  $a < 0$   
 при  $a = \frac{2\sqrt{6}}{15}$ ; тогда если  $\pm g < A_2, \Gamma_2$

узн. порядок  $-\frac{1}{3a} \geq \pm g < A_2, \Gamma_2$  то будет  
 не более 2 решений, при узн. порядок  $<$   
 $\pm g < A_2, \Gamma_2$   $\exists b$ , при которых будет 4 реш.

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3a} < \frac{6}{2\sqrt{6}} \\ a < 0 \end{cases}, a < 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{6} > 15a \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2\sqrt{6}}{15} > a \\ a < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a \in (0; -\frac{2\sqrt{6}}{15})$  где  $a \geq 0$  аналог

$a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; 0)$

~~$a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; 0) \cup (0; -\frac{2\sqrt{6}}{15})$~~

Проверка с помощью ~~...~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a < 0$   
 Там же рассмотрим граничные случаи  
 (1) нае внешн и  $\omega_1, \omega_2$   
 Тогда  $\frac{A_1 \theta_1}{A_2 \theta_2} = \frac{3z}{3} = \frac{0, \tau}{0, 2\tau}$ ,  $\theta_1, \tau = t$

Тогда  $\frac{2}{3} = \frac{4}{y+t} \Rightarrow 14 + 2t = 3t \Rightarrow t = 14$

$A_2 \tau = \sqrt{21^2 - 3^2} = \sqrt{441 - 9} = \sqrt{432} \Rightarrow t_9 < A_2 \theta_2 = \frac{3}{\sqrt{432}}$

аналог  $z$  для внутр-нае, и  $\exists b$  когда  $a$  реш  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{1}{3a} < \frac{3}{\sqrt{432}} \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0 \\ -\sqrt{432} > 3a \end{cases} \Rightarrow a \in \left( -\frac{\sqrt{432}}{3}; 0 \right)$$

Сравним:  $-\frac{2\sqrt{6}}{15} \stackrel{?}{>} -\frac{\sqrt{432}}{9}$

$\frac{2\sqrt{6}}{15} < \frac{\sqrt{432}}{9}$ , тогда при  $a < 0$

$\exists b$ , когда первая система имеет и реш при  $a \in \left( -\frac{\sqrt{432}}{9}; 0 \right)$ , аналог  $a > 0$   $a \in \left( 0; \frac{\sqrt{432}}{9} \right)$

Ответ:  $\left( -\frac{\sqrt{432}}{9}; 0 \right) \cup \left( 0; \frac{\sqrt{432}}{9} \right)$

$\frac{\sqrt{432}}{9} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{9} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Ответ:  $\left( -\frac{4}{\sqrt{3}}; 0 \right) \cup \left( 0; \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$  и все



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$NS \quad \log_3^4(6x) - 2 \log_{6x}^4 = \log_{36x^2}^4 \quad | \text{чз} - 4$$

$$с.ч. \quad 6x > 0, \quad 6x \neq 1 \rightarrow 36x^2 > 0, \quad 36x^2 \neq 1$$

$$I) \quad \log_3^4(6x) - \frac{2}{\log_3(6x)} = \frac{3}{2 \log_3(6x)} - 4$$

$$\frac{\log_3^5(6x) + 4 \log_3(6x) - \frac{7}{2}}{\log_3(6x)} = 0$$

$$II) \quad \log_3^4 y + 6 \log_3 y = \log_{y^2}^4(y^5) - 4 \quad \text{аналог } y > 0 \rightarrow y \neq 1 \rightarrow y^2 > 0, y^2 \neq 1$$
$$\log_3^4 y + \frac{6}{\log_3 y} = \frac{5}{2} \frac{\log_3^5 y}{\log_3 y} - 4$$

$$\frac{\log_3^5 y + 4 \log_3 y - \frac{7}{2}}{\log_3 y} = 0$$

$$\text{При } y < 1 \quad \log_3^5 y + 4 \log_3 y - \frac{7}{2} < 0$$

$$\text{При } y \geq 1 \quad \log_3^5 y + 4 \log_3 y - \frac{7}{2} \text{ не имеет корней} \rightarrow$$

$\Rightarrow$  не более 1-го решения.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{aligned} SL^2 &= SP \cdot SQ \\ MK^2 &= MQ \cdot MP \\ MK &= SP \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = SL, \text{ т.к. } AL = AK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SA = AM = 10$$

$$\text{т.к. } AK = 6 \text{ см, } AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15,$$

$$S = \frac{h \cdot BC}{2} \Rightarrow h = 12 = AK$$

$$AK^2 = AA_1^2 - A_1K^2 \Rightarrow A_1K = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KB = 4$$

$$\cos \angle AA_1K = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$BM^2 = MA_1^2 = BA_1^2 - 2A_1M \cdot BA_1 \cdot \cos \angle MA_1B$$

$$BM^2 = 25 - 25 - 2 \cdot 25 \cdot \frac{3}{4} = 25 \left( -2 - \frac{3}{2} \right) = 25 \cdot \frac{1}{2}$$

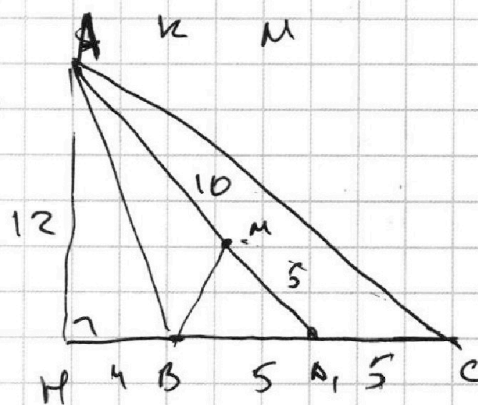
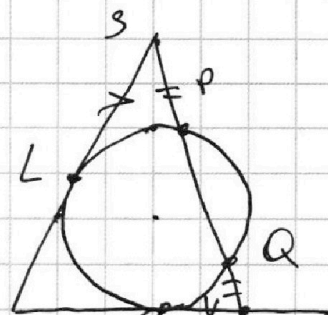
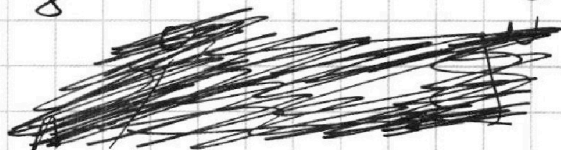
$$BM = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} BM = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$CM^2 = 25^2 - 25^2 + 2 \cdot 25 \cdot \frac{3}{4} = 25 \left( 2 + \frac{3}{2} \right) = 25 \cdot \frac{7}{2}$$

$$CM = 5 \sqrt{\frac{7}{2}}; \quad CC_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{15^3 \cdot \sqrt{7}}{8} = \frac{3445 \sqrt{7}}{8} \quad \text{Ответ: } \frac{3445 \sqrt{7}}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



б) Пусть  $O$  - центр сферы

$\vec{KO}$ ,  $\vec{NO}$  - векторы нормалей

к  $(ABE)$ ,  $(SBE)$  соотв  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle(\vec{SO}, \vec{NO}) =$$

$$= \angle(\vec{NO}, \vec{KO})$$

$ON \perp (SBE) \Rightarrow ON \perp BE$

$AK \perp BE$

$\Rightarrow ON \parallel AK \Rightarrow \angle(SBE)A =$

$$= \angle(NO; KO) = \angle(AK; KO)$$

$$SO = \sqrt{ON^2 + OS^2} = 5; \quad SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 3 = KM \text{ к } (SBE)$$

Две прямые  $AK$  и  $KL$  и проб прямая  $KL$ , они пересекут  $BE$  в  $W$ ,

тогда  $AK \perp KW \Rightarrow KW \perp BE \Rightarrow \angle(AK; KO) =$

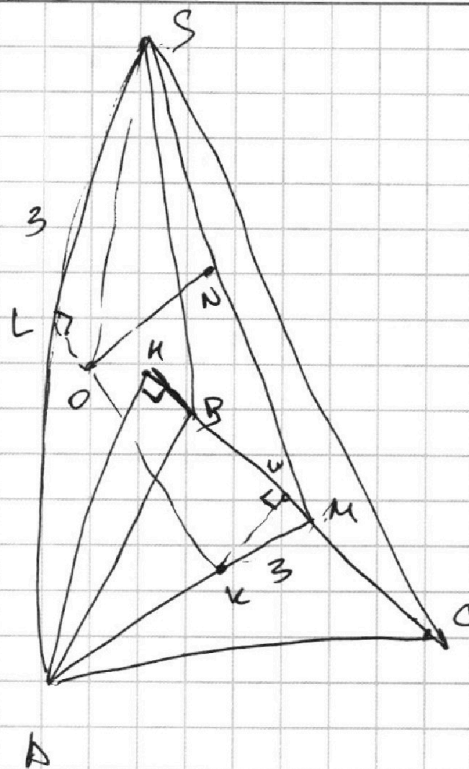
$= \angle(KW; KO) = \angle OKW$ , т.к.  $OK \perp (ABE)$ , тогда

$$\triangle OKM \sim \triangle KWM \Rightarrow WK = \frac{KM}{AK} \cdot AK = \frac{3}{5} \cdot 12 = \frac{36}{5}$$

$$OW = \sqrt{OK^2 + KW^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^2} =$$

$$= 4 \sqrt{1 + \frac{9}{25}} = 4 \sqrt{\frac{34}{25}} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5}$$

Ответ:  $\frac{24}{5}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 432 \\ 216 \\ 108 \\ \hline 8 \\ 59 \\ 27 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Пусть  $O$  - центр сферы  
 $\vec{KO}, \vec{NO}$  - векторы нормали

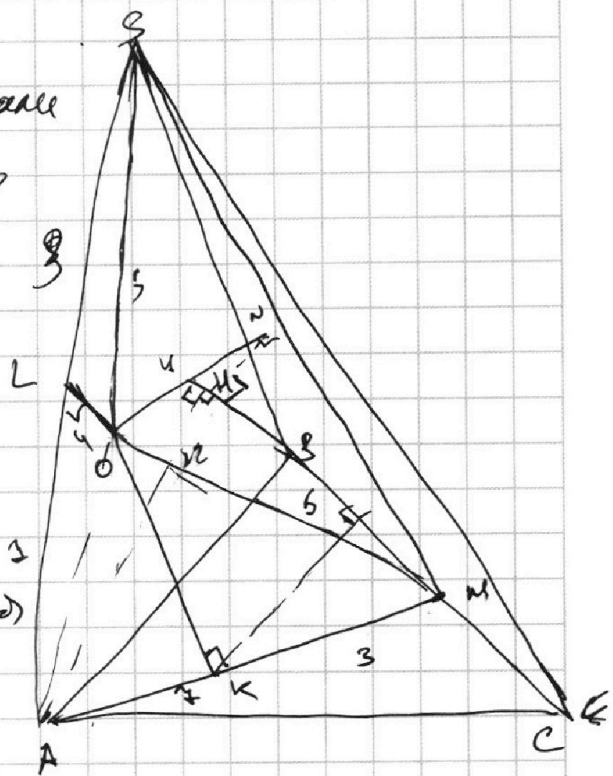
к  $(ABE), (SBE)$  - сфера  $\rightarrow$   
 $\rightarrow \angle(S(BE)A) =$

$= \angle(NO; KO)$

в) Пусть  $O$  - ц. сферы

а)  $AK \perp BC$   
 $OK \perp (ABE) \rightarrow OK \perp BC$  по  
 $\Delta \nabla \Pi$

б)  $OK \perp BC$   
 $ON \perp (SBE) \rightarrow NK \perp BC$  по  
 $\Delta \nabla \Pi$



$\rightarrow \angle AKN = \angle S(BE)A$

$OK \perp SO \Rightarrow SO = \sqrt{SN^2 + ON^2} = 5 \Rightarrow OL = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Delta \nabla \Delta \Rightarrow AL = 4, KM = 3; OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$\Rightarrow \sqrt{65}; OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ т.к. } OK \perp BC,$

$\Delta \nabla \Delta OK = \sqrt{OM^2 - KM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} =$

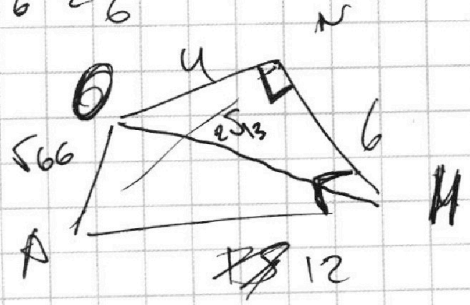
$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4; NK =$

$= \sqrt{OK^2 - ON^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$ON \perp (SBE) \rightarrow ON \perp BC \rightarrow$

$AK \perp BC$

$\rightarrow ON \parallel AK \Rightarrow \angle AKN =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^{14}$ ,  $bc: 2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ ,  $ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$\min(abc)?$   $abc: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$ ,  $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

~~$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$~~

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$

$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 14$

$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$

$\beta_2 + \beta_3 \geq 15$

$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$

$\alpha_3 = \alpha_1 \geq 14$

$\beta_3 = \beta_1 \geq 17$

$\gamma_3 = \gamma_1 \geq 43$

$\frac{11}{12}$   $\frac{11}{3}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{8+13+14}{2} = 17.5$

$\frac{10}{5} = 2$ ,  $\frac{81}{243} = \frac{3}{9}$ ,  $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$\frac{32}{243} + \frac{8}{3} = \frac{32 + 648}{243} = \frac{680}{243}$

$c = 10$ ,  $a = 4$ ,  $b = 5$

$\frac{680}{243}$

$43$ ,  $21,5$ ,  $\frac{20}{6}$

$28$ ,  $20$ ,  $\frac{216}{4520}$

$S_{аркус}(\sin x) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$ ,  $a = 14$

$S_{аркус}(\cos(x + \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2})) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$S_{аркус}(\cos(x - \frac{\sqrt{11}}{2})) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$

$4x = \frac{8\sqrt{11}}{2} \rightarrow x = \sqrt{11}$

$x - y = y^5 - x^5$

$x - y = (y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4)$

$(y - x)(-1 + 1) = 0$

$(y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4) + (y - x)$

$\log_3 y = \log_3 6x$

$y = 6x$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{1296}{216} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

$\frac{216}{36} = 6$ ,  $\frac{216}{36} = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$x \in [0; \sqrt{11}] \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\sqrt{11}}{2}; \frac{3\sqrt{11}}{2}\right]$$

$$\frac{5\sqrt{11} - \frac{3\sqrt{11}}{2}}{10\sqrt{11} - 3\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{11}}{7\sqrt{11}} = 1$$

$$5 \arcsin\left(\cos\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [0; \sqrt{11}]$$

$$x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [-2\sqrt{11}; 4\sqrt{11}]$$

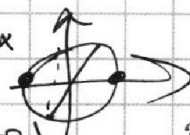
$$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

$$x \in [0; \sqrt{11}]$$

$$-5x = \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$-6x = -\sqrt{11}$$

$$x = \frac{\sqrt{11}}{6}$$



$$5\left(2\sqrt{11} - x + \frac{\sqrt{11}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$10\sqrt{11} + \frac{5\sqrt{11}}{2} - 5x - \frac{3\sqrt{11}}{2} = x$$

$$11\sqrt{11} = 6x \Rightarrow x = \frac{11\sqrt{11}}{6}$$



$$x - \frac{\sqrt{11}}{2} \in [2\sqrt{11}; 3\sqrt{11}]$$

$$5\left(x - \frac{\sqrt{11}}{2} - 2\sqrt{11}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 10\sqrt{11} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$4x = 10\sqrt{11} + 4\sqrt{11} = 14\sqrt{11}$$

$$x = \frac{14\sqrt{11}}{4} = \frac{7\sqrt{11}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$10\sqrt{11} = 9\sqrt{11} + \sqrt{11}$$

$$\frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$\alpha = 2\sqrt{11} - \alpha \quad \frac{10\sqrt{11}}{3} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + \frac{11\sqrt{11}}{6}$$

$$\alpha = 2\sqrt{11}$$

$$20\sqrt{11} = 9\sqrt{11} + 11\sqrt{11}$$

$$x \in [3\sqrt{11}; 4\sqrt{11}]$$

$$\alpha + 2\sqrt{11}; -\alpha; \alpha; 2\sqrt{11} - \alpha; \alpha - 2\sqrt{11}$$

$$5\left(4\sqrt{11} - x + \frac{\sqrt{11}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$20\sqrt{11} - 5x + \frac{5\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2} + x$$

$$6x = 21\sqrt{11}$$

$$x = \frac{21\sqrt{11}}{6} = \frac{7\sqrt{11}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a tetrahedron and its projections.

**Top Left:** A small triangle with side lengths 5, 5, and 12. The angle between the two sides of length 5 is labeled  $\alpha$ . A calculation shows  $\alpha \approx 15^\circ$ .

**Top Middle:** A larger triangle with side lengths 15, 15, and 25. The angle between the two sides of length 15 is labeled  $\alpha$ . A calculation shows  $\alpha \approx 22.5^\circ$ .

**Top Right:** A triangle with side lengths 12, 12, and 25. The angle between the two sides of length 12 is labeled  $\alpha$ . A calculation shows  $\alpha \approx 22.5^\circ$ .

**Center:** A large tetrahedron with vertices A, B, C, S. The base is triangle ABC with side lengths 5, 5, 12. The height from A to BC is 12. The slant edges are 15. The angle between the two slant edges is  $\alpha$ . The height from S to the base is 10. The distance from the center of the base to the height from S is 3. The distance from the center of the base to a vertex is 5.

**Bottom Left:** A diagram showing the projection of the tetrahedron onto a plane. The base is a circle with radius 5. The height from S to the base is 10. The distance from the center of the base to the height from S is 3. The distance from the center of the base to a vertex is 5. The angle between the two slant edges is  $\alpha$ .

**Bottom Middle:** A diagram showing the projection of the tetrahedron onto a plane. The base is a circle with radius 5. The height from S to the base is 10. The distance from the center of the base to the height from S is 3. The distance from the center of the base to a vertex is 5. The angle between the two slant edges is  $\alpha$ .

**Bottom Right:** A diagram showing the projection of the tetrahedron onto a plane. The base is a circle with radius 5. The height from S to the base is 10. The distance from the center of the base to the height from S is 3. The distance from the center of the base to a vertex is 5. The angle between the two slant edges is  $\alpha$ .

**Calculations:**

$SABP \approx 6$

$MQ \cdot QR \cdot P = SP \cdot SQ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow MQ = 18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4(6x) - 2 \log_{36x} 3 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$4 | \log_3(6x) | - 2 \log_{36x} 3 = \frac{3}{2} \log_{36x} 343 - 4$$

$$\frac{4}{|\log_{36x} 3|} = -\frac{4}{2} \log_{36x} 3 = -4$$

$$\frac{4}{2} \log_{36x} 3 - \frac{4}{|\log_{36x} 3|} = 4 \rightarrow \log_{36x} 3 = 0$$

$$\frac{4}{2} \log_{36x} 3 - \frac{4}{\log_{36x} 3} = 4$$

$$2 \log_{36x} 3 - \frac{8}{\log_{36x} 3} = 8$$

$$\frac{2 \log_{36x}^2 3 - 8 \log_{36x} 3 - 8}{\log_{36x} 3} = 0$$

$$8 - 56$$

$$y_1 = 4, y_2 = 4$$

$$\frac{2}{4} = 16 +$$

$$x^2 + 4x - \frac{7}{2}$$

$$x^2 + (4x) = \frac{7}{2}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

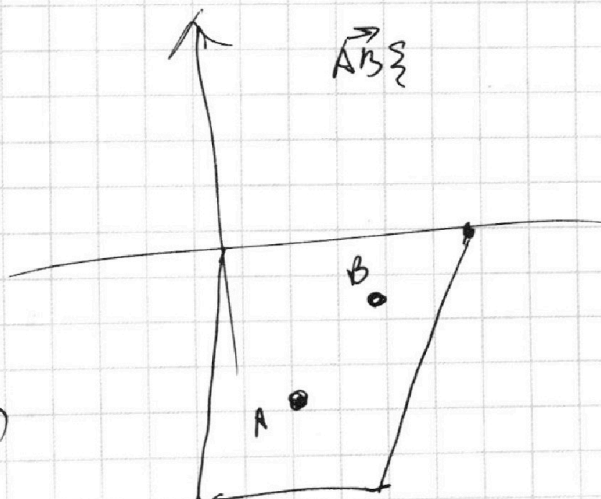
$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

$$4x_2 - 4x_1$$

$$+ y_2 - y_1 = 40$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$



$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

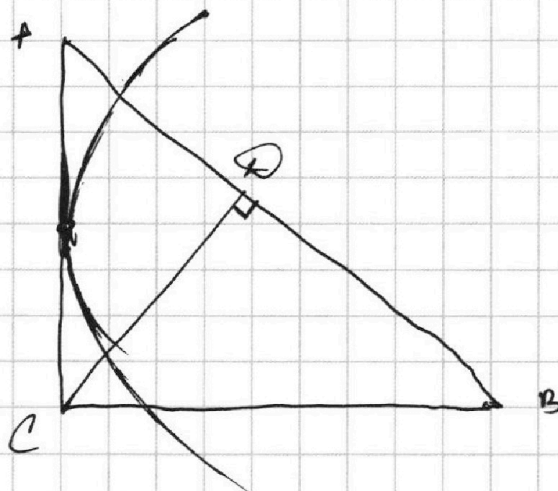
$$\log_3^4(6x) - 2 \operatorname{ctg} 6x^4 =$$

$$\downarrow 4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$\downarrow 5 - 2 = -\frac{3}{2} - 4t$$

$$\downarrow 5 - 4t = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow (\downarrow 4 - 4) = \frac{1}{2}$$

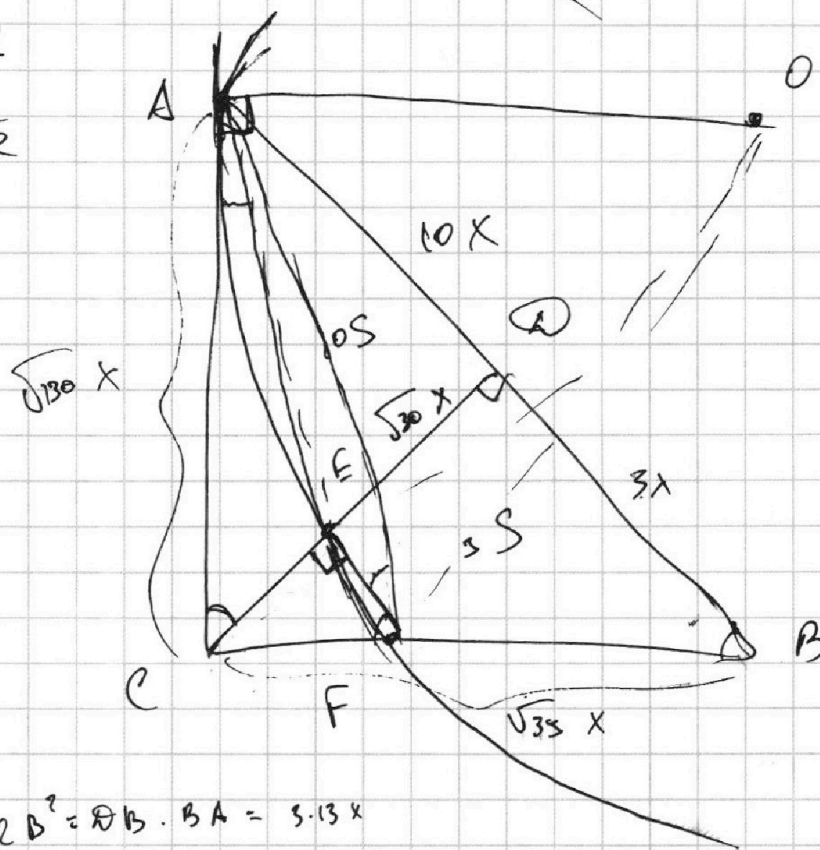


$AB \parallel EF$

AB:

$S_{AOD}$

$S_{CEF}$



$$EB^2 = EB \cdot BA = 5 \cdot 13x$$

$$\sqrt{33} \cdot \frac{10}{3} = \sqrt{10 \cdot 13} \cdot \frac{10}{3\sqrt{3}} = 100$$

$$\frac{CB}{BD} = \frac{AB}{CB}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②  $x + 3ay - 7b = 0$

①  $(x^2 + (4x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9)) = 0$

$\log_3^4 y + \log_3^6 y = 2 \log_3^5 y - 4$

$\log_3^5 y + 4 \log_3^4 y = -\frac{5}{2} - 6 = -\frac{17}{2}$

$\log_3^4 6x - 2 \log_3^3 = \frac{3}{2}$

$(x^2 + 7)^2 + y^2 = 9$

$a \neq 0$

$3ay - 7b - x$

$y = \frac{7b - x}{3a}$

$5 + 4 = \frac{7}{2}$

216	6
18	36
36	

$\log_7^5 a + \log_7^3 a - \frac{7}{2} = 0$

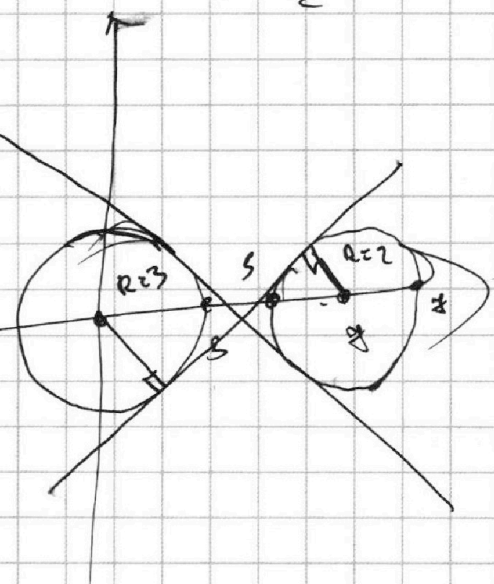
$\log_7^5 b + \log_7^3 b - \frac{7}{2} = 0$

$\log_7^5 a + \log_7^5 b + \log_7^3 a + \log_7^3 b - 7 = 0$

$\log_7^5 a + \log_7^3 a = \log_7^5 b + \log_7^3 b$

$\log_7^5 a - \log_7^3 b = \log_7^5 b - \log_7^3 a = \log_7$

$-2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$



$\frac{2}{3} = \frac{25}{9}$

$f(t) = 5t + 4t - \frac{7}{2} - 0$

$\frac{441}{25}$

$x^5 + y^5 + x + y - 7 = 0$

$\frac{441}{216} (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - 225$

$\log_7^4(ab)$

$(x+y)(x^4 + y^4)$

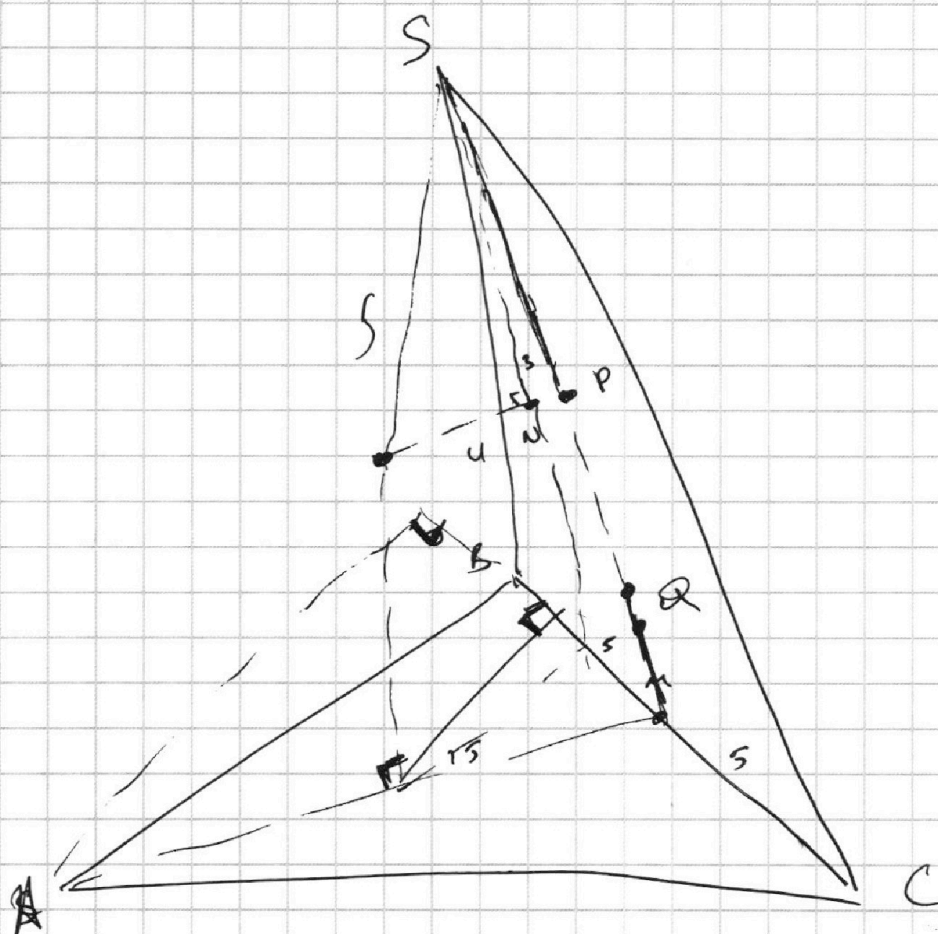
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



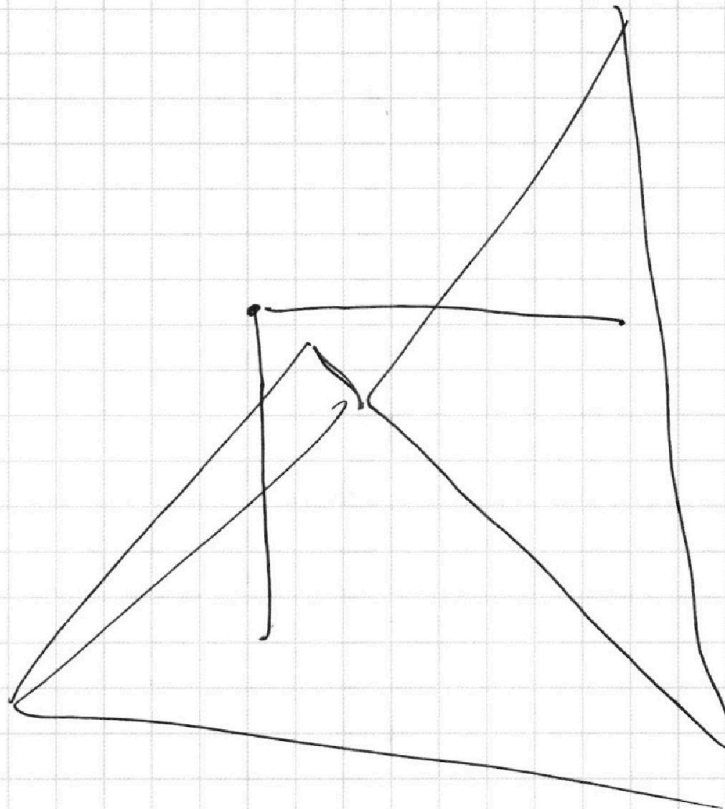
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



S

