



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть $ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, $bc = n \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$
 $ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, где $k, n, m \in \mathbb{N}$.

Перемножим: $a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$.

Извлекаем корни ($abc > 0$,
т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$): $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \sqrt{kmn \cdot 3 \cdot 5}$

Поскольку $abc \in \mathbb{N}$, ~~$\sqrt{kmn \cdot 3 \cdot 5}$~~ $\sqrt{kmn \cdot 3 \cdot 5}$ тоже
 $\in \mathbb{N}$. Это в частности означает, что

$kmn : 3$, т.е. $kmn = 3t$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда

$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \sqrt{3 \cdot t \cdot 3 \cdot 5} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{37} \sqrt{5t}$.

Из этого следует $abc : 2^{17} \cdot 3^{22}$.

Из условия $ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43} \Rightarrow$

т.к. 2, 3, 5 взаимно просты

$\Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$. Значит $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Значение $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ достигается при
 ~~$a = 2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^{20}$
 $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^{23}$
 $c = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^{23}$
 $4+3+10=17, 12+5+23=22, 20+23+23=43$~~
Проверим начальное условие
 ~~$ab = 2^7 \cdot 3^{17} \cdot 5^{20} \cdot 2^3 \cdot 3^{11} \cdot 5^{18}$
 $bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Наименьшее возможное значение $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$
достигается при $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}$
 $b = 2^3 \cdot 3^5$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$

$$4+3+10=17, \quad 6+5+11=22, \quad 20+23=43.$$

степень для 2 для 3 для 5.

Проверим указанные условия:

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{23} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

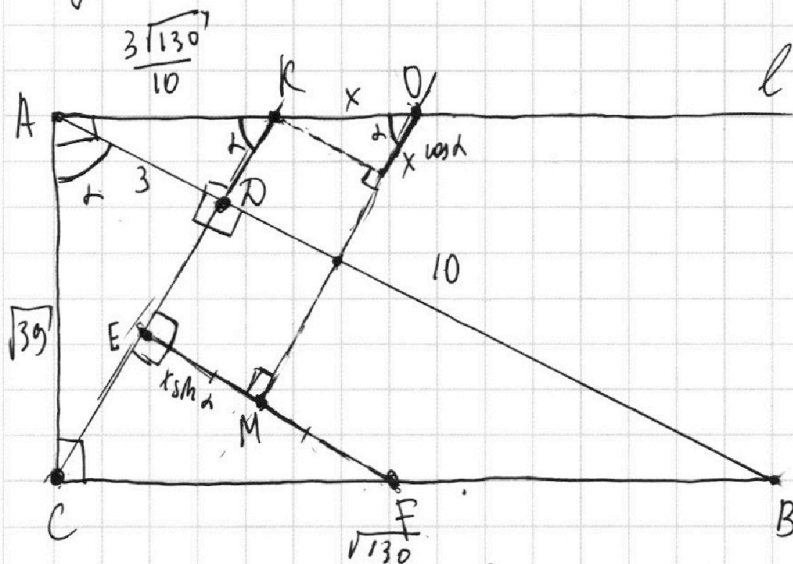
Выполнено.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



1. Поскольку CD - высота и гипотенуза, то AB - гипотенуза и $C \in [AB]$.
2. Поскольку нам известны лишь отрезки, и известно $AB : BD = \frac{13}{10}$, то пусть $AB = 13$, $BD = 10$. Тогда $AD = 3$.
3. Для высот CD и гипотенузы верно:
 $CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{3 \cdot 10} = \sqrt{30}$.
4. По теореме Пифагора в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$
 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9 + 30} = \sqrt{39}$ ($\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$)
 $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{100 + 30} = \sqrt{130}$
5. Через т. A проведем прямую $l \parallel BC$.
 Поскольку $(BC) \perp (AC)$, то и $l \perp (AC)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $(AO) \perp l = k$.

6. ~~Пусть~~ $(AK) \parallel (BC)$ ^{по зн о проп. отрезков} $\Rightarrow \frac{AK}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10} \Rightarrow AK = \frac{3}{10} BC =$
 $= \frac{3}{10} \sqrt{130}$

7. Пусть O - центр описанной в условии ок-ти.

Тогда $(AO) \perp (AC)$, как радиусе и касательная, значит $O \in l$.

8. Поскольку $(EF) \parallel (AB)$, (EF) , как и $(AB) \perp (AO)$.

Пусть M - середина EF . Тогда OM является средним перпендикуляром к EF (т.к.

O - центр, ок-ти), т.е. $(OM) \perp (EF)$, значит

$(OM) \parallel (EO) \Rightarrow \angle EOM = 90^\circ$, т.е. $(OM) \parallel (EK)$.

Получено, что $K \in [AO]$, а не как-то иначе.

9. Пусть $KO = x$. Тогда $AO = \frac{3\sqrt{130}}{10} + x$ - радиусе ок-ти.

10. Пусть $\angle CAB = \alpha$. Из $\triangle ABC$:
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{130}}{13}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{13} = \frac{\sqrt{3 \cdot 10}}{13 \cdot 13} = \sqrt{\frac{3}{13}}$
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{130}}{30} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

$$\angle AKC = 90^\circ - \angle OAK = 90^\circ - (90^\circ - \angle CAB) = \alpha.$$

$$\angle AOM = \angle AKC = \alpha.$$

(при \parallel -стве прямых)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11. EM - высота прямоугольного треугольника MEK ,

$$\text{т.е. } EM = KO \cdot \sin \alpha = x \cdot \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$EF = 2EM = 2x \cdot \frac{\sqrt{130}}{13} = 2x \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$$

2. Поскольку $(EF) \parallel (BO)$: $\frac{EF}{BO} = \frac{CE}{CO} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2x \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}}{10} = \frac{CE}{\sqrt{30}} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{30} \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}}{10} =$$

$$= \frac{x \cdot \frac{30 \cdot 10}{13}}{5} = \frac{x \cdot 10 \sqrt{3}}{5 \sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}}$$

13. Из $\triangle CAK$: $CK = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{130}}{13}} = 13 \sqrt{\frac{3 \cdot 13}{13 \cdot 10}} = 13 \sqrt{\frac{3}{10}}$

$$EK = CK - CE = 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}}$$

14. Опустив высоту QH на (OM) видно,

$$\text{что } QH = EK + x \cdot \cos \alpha = 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}} + x \cdot \frac{\sqrt{3}}{13} =$$

\uparrow из прямоугольного \triangle -ка $\quad \quad \quad \uparrow$ из прямоугольного \triangle -ка

$$= 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - x \sqrt{\frac{3}{13}}$$

15. По формуле Пифагора в $\triangle EOM$: $EO = \sqrt{EM^2 + OM^2}$

это равно радиусу OH -и, т.е. $AO = \frac{3\sqrt{130}}{10} + x$
 $= 3\sqrt{\frac{13}{10}} + x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17. Угол $\angle DAC = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{30}}{2}$
↑
прямоуг.

$$CE = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{13 \cdot 10}}{4}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$EF = 2x \cdot \sqrt{\frac{10}{13}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{130}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$$

$$S_{ECF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{5\sqrt{30}}{4}$$

$$S_{ACD} : S_{ECF} = \frac{3\sqrt{30}}{2} : \frac{5\sqrt{30}}{4} = \frac{3\sqrt{30} \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{30}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{5} = 6 : 5$$

Ответ: $6 : 5 = 1,2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16. \quad EO^2 = AO^2 \Rightarrow EM^2 + OM^2 = AO^2 \Rightarrow x^2 \cdot \frac{130}{169} +$$

$$+ \left(13\sqrt{\frac{3}{10}} - x\sqrt{\frac{3}{13}} \right)^2 = \left(3\sqrt{\frac{13}{10}} + x \right)^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{10}{13}x^2 + 169 \cdot \frac{3}{10} + x^2 \cdot \frac{3}{13} = 9 \cdot \frac{13}{10} + x^2 + 2 \cdot 3x \cdot \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$- 2x \cdot 13 \cdot \frac{3}{\sqrt{130}} = 9 \cdot \frac{13}{10} + x^2 + 2 \cdot 3x \cdot \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$x^2 \left(10 + \frac{3}{13} - \frac{1}{13} \right) + 2x \left(\frac{13 \cdot 3}{\sqrt{130}} - \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{10}} \right) + \frac{169 \cdot 3 - 9 \cdot 13}{10} = 0$$

$$\frac{120}{13}x^2 + 0 \cdot x + \frac{13 \cdot 3 \cdot 10}{10} = 0$$

$$x^2 \cdot \frac{10}{13} + \frac{13 \cdot 13 \cdot 3}{10} + x^2 \cdot \frac{3}{13} - 2 \cdot x \cdot 13 \cdot \frac{3}{\sqrt{130}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 13}{10} + x^2 +$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$x^2 \left(\frac{10}{13} + \frac{3}{13} - 1 \right) - 2x \frac{3 \cdot (13+13)}{\sqrt{130}} + \frac{13 \cdot 3 \cdot (13-3)}{10} = 0$$

$$12x \cdot \frac{13}{\sqrt{130}} = 13 \cdot 3$$

$$x = \frac{13 \cdot 3 \cdot \sqrt{130}}{13 \cdot 12} = \frac{\sqrt{130}}{4} \dots \text{напопеч-то.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. $\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

~~$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$~~

$$5 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

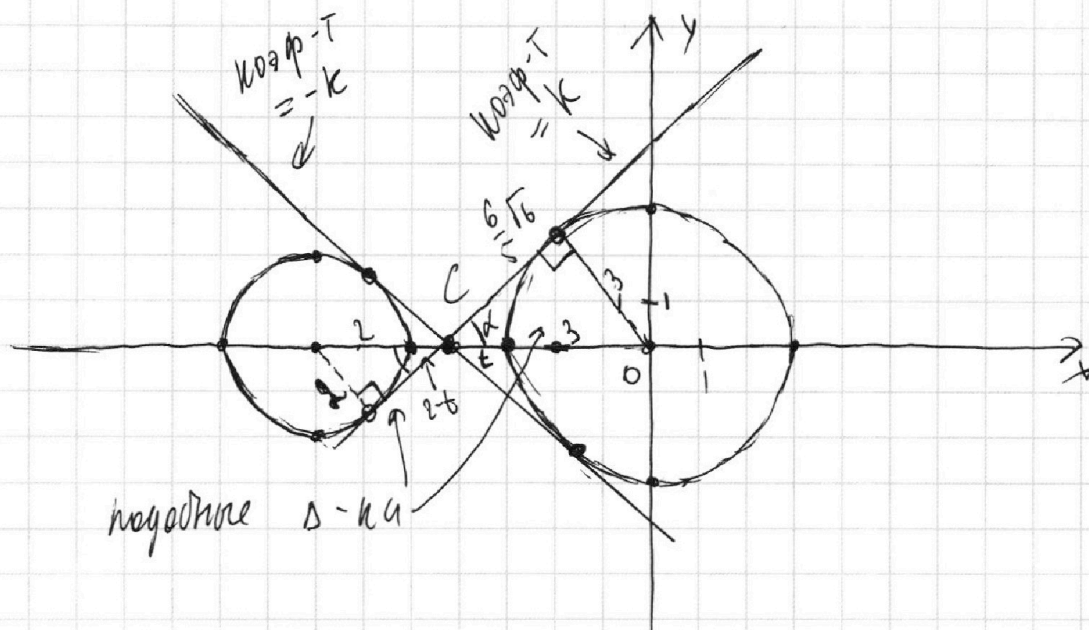
Задача 4.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (1) \\ (x + 7)^2 + y^2 = 2^2 & (2) \end{cases}$$

Вывести на координатной плоскости изображения
объектов, задаваемых системой уравнений.

Сначала (1) - окружность с центром $(0; 0)$,
радиуса 3, (2) - окружность с центром $(-7; 0)$
радиуса 2. (3) - это какая-то прямая.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

точку между центрами. Пусть та, что с
положительным наклоном имеет коэффициент

k . Вторая, очевидно, ей симметрична
относительно Ox , так что имеет ^{угл.} коэф-т $-k$.

Понятно, что нам подойдут все ~~значения~~
угловые коэффициенты $\in (-k; k)$, и мы

сумеем найти a для всех значений,

кроме $k = 0$, так что на деле

нам будут просты $(-k; 0) \cup (0; k)$.

Удовольствие целовому пересечению с четвертым
точками \star для подобранных a будет прямая
через точку C_3 (например) с данной маллюгой.
Видно, что прямые с другими маллюгами
(смилом вольным по подурю) могут пересекать
лишь одну ок-ть.

Найдем точку C .

см. рисунок

Рассмотрим подобные треугольники, образованные
центрами ок-тей, точкой C и точками

касания с ~~прямой~~ общей касательной с коэф-том

k . Пусть C делит отрезок между окружностями
на Ox (он дает $2; [-5; -3]$) на

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы хотим, чтобы каскама имела ~~два~~ ^{несколько} решений.

То есть, чтобы прямая пересекала ок-ги суммарно в 4х точках. То есть каскама - в 2 точки.

При $a=0$ ур-е прямой $x=7b$.

Ок-ги не имеют точек с одинаковым ординатой, так что решений существует не более 2.

Не подходит. Так что считаем, что $a \neq 0$.

Тогда $x + 3ay - 7b = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x}{3a} + \frac{7b}{3a}$

Итак, a задаст ~~уровень~~ ^{наклон} прямой.

Так что если при данном угле наклона

$-\frac{1}{3a}$ в принципе дает 3 пересечения,

то мы хотим подобрать свободный

член $\frac{7b}{3a}$ так, чтобы они были,

т.к. при фиксированном $a \neq 0$ $\frac{7b}{3a}$ принимает

все значения на $(-\infty; +\infty)$ изменением b .

Осталось только найти подходящие координаты.

Поскольку ось Ox - линия уровней этих ок-гей,
то есть две одуны касательные через каждую - то
внутренние!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия $2-t$ и t . тогда отношение катетов гипотенузы и катетов подобной Δ -ков:

$$\frac{2+2-t}{3+t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 12-3t = 6+2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = 5t \Rightarrow t = \frac{6}{5} \text{ значит координата}$$

$$C - \left(-4\frac{1}{5}; 0\right)$$

На самом деле k - тангенс угла α наклона касательной. Второй катет b и сумма Δ -ки равен по $6t$ гипотенуза

$$\begin{aligned} & \sqrt{(3+t)^2 - 3^2} = \sqrt{9+t^2+6t-9} = \\ & = \sqrt{t^2+6t} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{6 \cdot 6}{5}} = \sqrt{\frac{36+36}{5}} = \frac{6\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Итак } k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{6\sqrt{6}}{5}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{3}{6\sqrt{6}} =$$

$$-\frac{1}{3\alpha} \in (-k; 0) \cup (0; k) = \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{2\sqrt{6}}\right) = \left[\frac{5}{2\sqrt{6}}\right]$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right).$$

$$\text{ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5. Решим (предложуем) ур-е из условия.

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$\uparrow x > 0$

ОДЗ: $x > 0$
 $6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6}$
 $36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

~~$\log_7^4(6x) - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$~~
 ~~$\log_7^5 6x + 4 \log_{6x} 7 - 7 = 0$~~

$$\log_7^4 6x - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$2 \log_7^5 6x + 8 \log_{6x} 7 - 7 = 0 \quad (1) \quad - \text{верно } > 0$$

Для второго ур-е аналогично получим:

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

ОДЗ:
 $y > 0$
 $y \neq 1$

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \log_7 y - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4 y + \frac{3,5}{\log_7 y} + 4 = 0$$

↑

- корень ≥ 0

$$2 \log_7^5 y + 8 \log_7 y + 7 = 0 \quad (2)$$

Система из условий $\Rightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ + \text{OДЗ} \end{cases}$

~~$(2) - (1)$~~
 ~~$(2) - (1)$~~

Сложим (1) и (2):

$$2 (\log_7^5 6x + \log_7^5 y) + 8 (\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$

$$2 (\log_7 6x + \log_7 y) (\log_7^4 6x - \log_7^3 6x \log_7 y + \dots + \log_7^4 y)$$

$$+ 8 (\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$

$$\log_7 6xy \left(2 (\dots) + 8 \right) = 0$$

$$\left[\log_7 6xy = 0 \quad (3) \right.$$

$$\left. \log_7^4 6x - \log_7^3 6x \log_7 y + \dots + \log_7^4 y = -4 \quad (4) \right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3) $\log_7 6xy = 0 \Leftrightarrow 6xy = 1 \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$. ~~$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ удовлетворяет~~
~~QR~~ запомним это.

Рассмотрим ~~(1) - (2)~~ (1) - (2):

$$2(\log_7^5 6x - \log_7^5 y) + 8(\log_7 6x - \log_7^5 y) = 14$$

$$\log_7^5 \frac{6x}{y} (2(\log_7^4 6x + \dots + \log_7^4 y) + 8) = 14$$

Ответ: $\frac{1}{6}$ - наверняка
возможно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

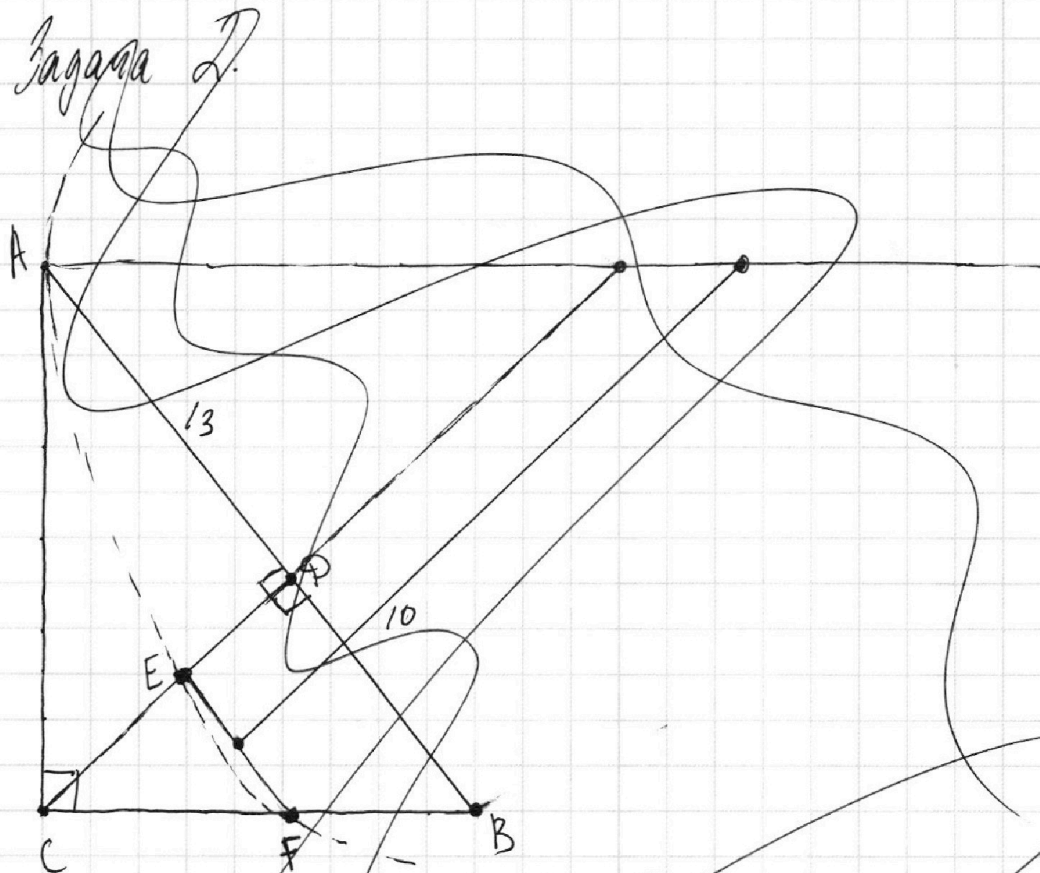
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



1. Раз высота CD — к гипотенузе, значит AB — гипотенуза и $D \in AB$.

2. Прямую в задаче нам даны лишь
отношения и известно $AB : BD = 13 : 10$,
то будем считать $AB = 13$, $BD = 10$.

3. Раз высота перпенд. к-ка CD верно
 $CD^2 = AD \cdot DB$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sqrt{130}}{10} = \sqrt{\frac{13 \cdot 10}{10 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{13}{10}}$$

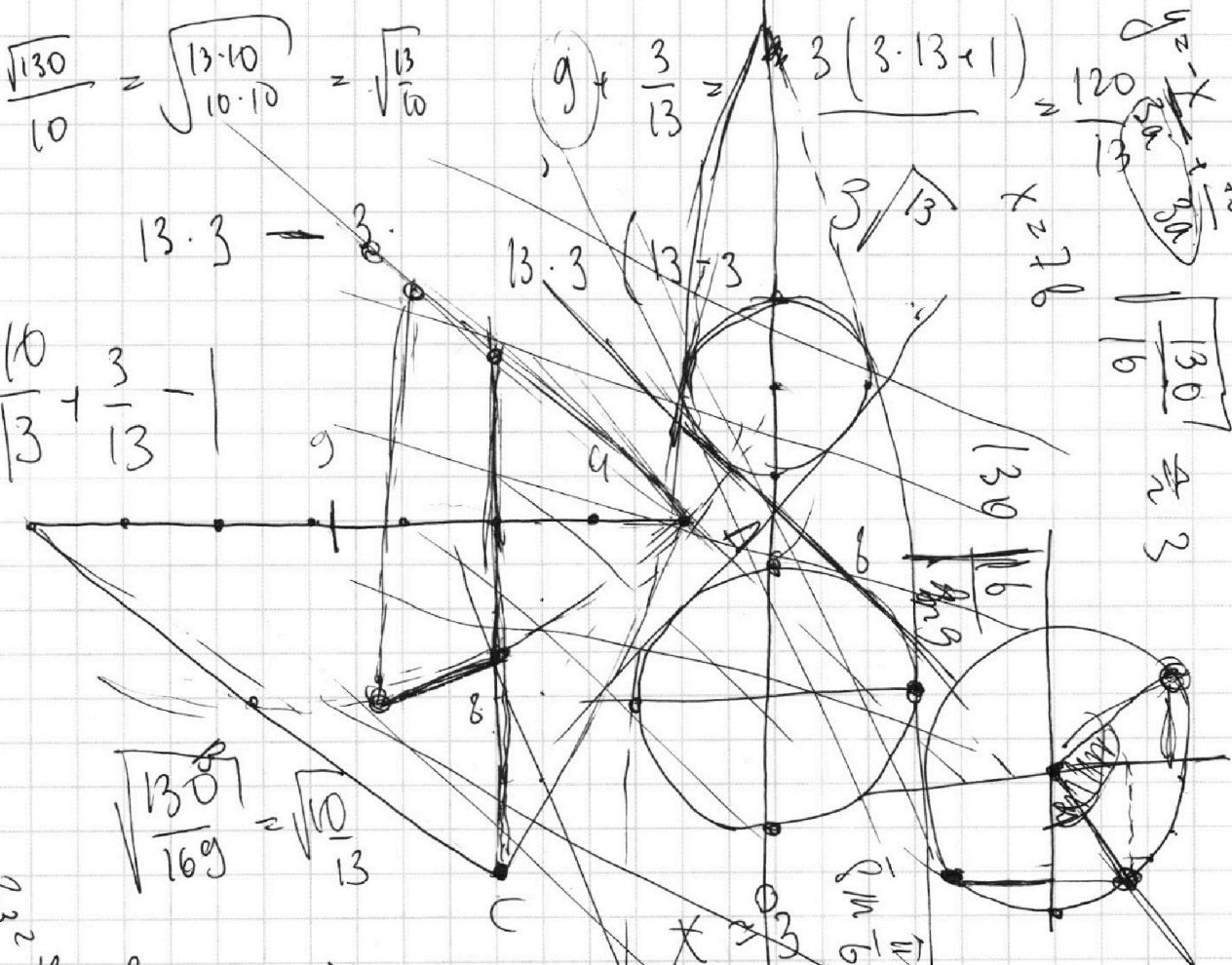
$$9 + \frac{3}{13} = 3(3 \cdot 13 + 1) = 120$$

$$\sqrt{\frac{130}{16}} \approx 2.8$$

$$\frac{10}{3} + \frac{3}{13}$$

$$13 \cdot 3 = 39$$

$$13 \cdot 3 (13 + 3)$$



$$\sqrt{\frac{130}{169}} = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$\frac{23^2}{8^2} - 9$$

$$\frac{23^2 - 9 \cdot 8^2}{5}$$

$$\frac{23^2 - 9 \cdot 8^2}{5} = \frac{529 - 324}{5} = \frac{205}{5} = 41$$

$$13 \cdot 13 \cdot 3$$

$$\frac{10}{13} + \frac{3}{13}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 13$$

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{46}{9} = \frac{460}{81}$$

$$\frac{23}{8}$$

$$\frac{10}{6}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$\arccos x (\sin b)$

$\arccos (\cos(\frac{\pi}{2} - x))$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

~~cos x = sin x~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

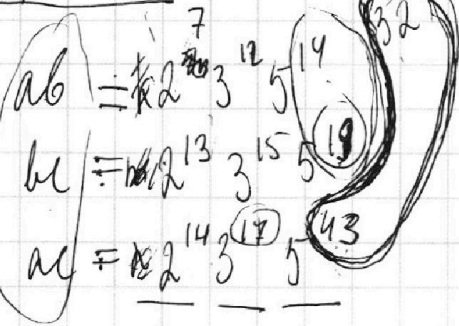
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$33 + 43 = 76 \rightarrow 38$$

$$a^2 b^2 c^2 = kmn \quad 2 \quad 3 \quad 5$$

$$abc = 2^{17} 3^{21} 5^{37}$$

$$abc = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \\ b &= 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5 \\ c &= 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 &= 5^2 \\ 2 &= 2 \\ 75 &= 3 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

$$\frac{25}{5} = 5$$

$$\frac{16 \times 5}{23} = \frac{80}{23}$$

Хоть 15

$$k = 3$$

$$m = 5$$

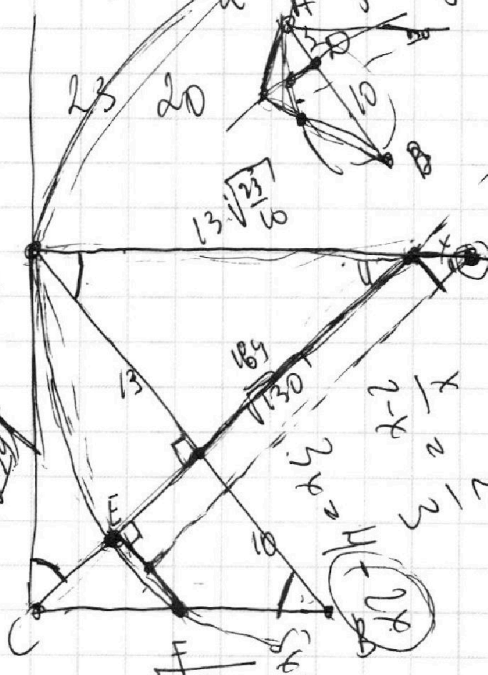
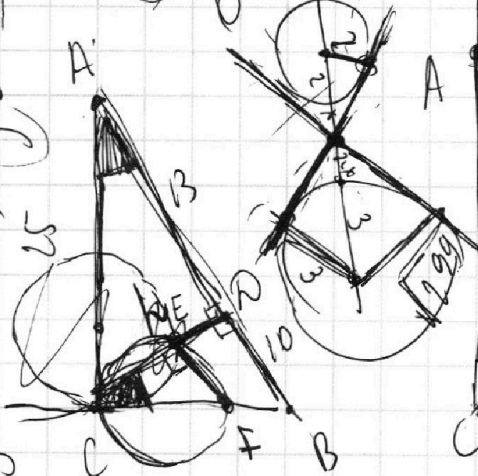
$$a + b = 43 \quad \frac{2,5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$b + c = 19 \quad 43$$

$$a + b = 14$$

$$d(a + b + c) = \dots$$

$$a + b + c = 43$$



$$22$$

$$\frac{2997}{230}$$

$$\frac{169}{\sqrt{130}}$$

$$x = \frac{169}{\sqrt{130}}$$

$$= 13 \sqrt{1 + \frac{169}{130}}$$

$$= 13 \sqrt{\frac{23}{10}}$$

$$\frac{26}{6} = 36.6$$

$$\frac{441}{25} = 17.64$$

$$\frac{441}{25} = 17.64$$

$$\frac{441}{25} = 17.64$$

$$h^2 = 10 \cdot 13$$

$$h = \sqrt{130}$$

$$\sqrt{169 + 130} = \sqrt{299}$$

$$13$$

$$\sqrt{169 + \frac{169^2}{130}}$$

$$= 13 \sqrt{1 + \frac{169}{130}}$$

$$= 13 \sqrt{\frac{23}{10}}$$