МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Из условия:
$$\begin{cases} ab = 2^{8}3^{14}5^{12}k_1 \\ bc = 2^{12}3^{20}5^{17}k_2 \\ ca = 2^{14}3^{21}5^{39}k_3 \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

За $\|x\|_p$ будем обозначать кол-во вхождений простого числа p в разложении числа x.

Тогда наше условие можно переписать так:

$$① \begin{cases} \|a\|_5 + \|b\|_5 \geq 12 \\ \|b\|_5 + \|c\|_5 \geq 17 \\ \|c\|_5 + \|a\|_5 \geq 39 \end{cases} \quad ② \begin{cases} \|a\|_3 + \|b\|_3 \geq 14 \\ \|b\|_3 + \|c\|_3 \geq 20 \\ \|c\|_3 + \|a\|_3 \geq 21 \end{cases} \quad ③ \begin{cases} \|a\|_2 + \|b\|_2 \geq 8 \\ \|b\|_2 + \|c\|_2 \geq 12 \\ \|c\|_2 + \|a\|_2 \geq 14 \end{cases}$$

а) ~~Из ① $\|a_5\| \geq 12 - \|b_5\|$~~ Чтобы добиться минимального значения abc, нам нужно, чтобы $\|abc\|_5$, $\|abc\|_3$ и $\|abc\|_2$ были минимальны возможными (Понятно, что $\min(abc)$ не будет содержать других простых чисел в разложении, иначе мы их можем выкинуть, уменьшив abc и сохранив св-во).

1) $\min \|abc\|_5 = \|a\|_5 + \|b\|_5 + \|c\|_5 \geq \|a\|_5 + \|c\|_5 \geq 39 \Rightarrow$
$\min \|abc\|_5 = 39$ (Он достигается при $\|a\|_5 = 20$; $\|c\|_5 = 19$; $\|b\|_5 = 0$ тогда нер система ① будет верна).

2) $\|abc\|$ из ② (сложив все нер-ва и поделив на 2)

$\|a\|_3 + \|b\|_3 + \|c\|_3 \geq 27,5 \Rightarrow \|abc\|_3 = \|a\|_3 + \|b\|_3 + \|c\|_3 \geq$
≥ 28 (т.к. $\|a\|_3, \ldots \|c\|_3 \in \mathbb{N}$) ~~28 дает~~ Этот минимум достигается при $\|c\|_3 = 13$; $\|a\|_3 = 8$; $\|b\|_3 = 7$ (~~нет~~ тогда система ② верна и $13+8+7=28$)

3) Из ③ (сложив нер-ва и поделив на 2): $\|a\|_2 + \|b\|_2 +$
$+ \|c\|_2 \geq 17 \Rightarrow \boxed{\|abc\|_2 \geq 17}$ (17 достиг при $\|a\|_2 = 5$; $\|b\|_2 = 3$; $\|c\|_2 = 9$. Тогда ③ верна и $5+3+9=17$)

4) Из п.1-3 получаем, что $\min abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ $\Rightarrow$ Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$
(достигается он, например, при $a = 2^{5} \cdot 3^{8} \cdot 5^{20}$; $b = 2^{3} \cdot 3^{7}$
$c = 2^{9} \cdot 3^{13} \cdot 5^{19}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

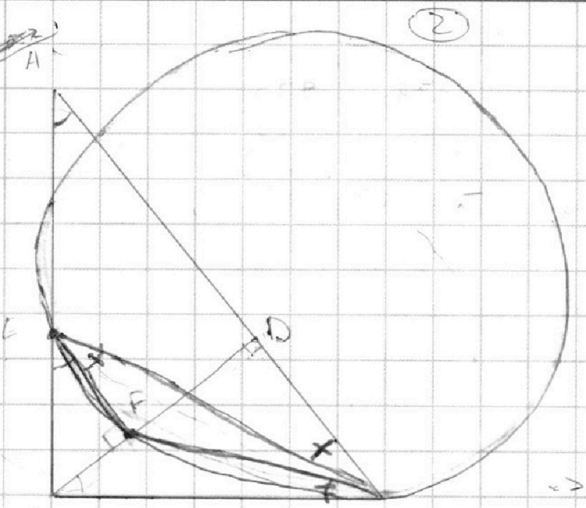
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

②

~~AD:DB~~



Дано: $EF \parallel AB$; $AD:DB = 5:2$

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ - ?

1) $EF \parallel AB$, $CD \perp AB$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF \perp CF \Rightarrow \triangle CFE$ - прямоуг. $\triangle$

2) Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

Из $AD \parallel EF$ и секущей AC:

$\angle CEF = \angle CAD = \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle EFC \sim \triangle ACB$ т.к. это два прямоугол $\triangle$ с равными углами при гипотенузе.

3) Из подобия получаем: $\frac{EF}{AC} = \frac{CF}{CB} = \frac{EC}{AB} = k$. $\boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{1}{k^2}}$

4) ~~т.к. CD - высота прямоугол $\triangle ABC$~~
~~$BC^2 = BD \cdot AB \Rightarrow$~~ ~~Получаем:~~

5) $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ (т.к. $\angle DCB = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha = \angle CAD$) $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC} = tg\alpha$

Пусть $BD = 2x$. Тогда $AD = 5x$. Получим $\frac{2x}{CD} = \frac{CD}{5x} = tg\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\frac{\frac{2}{5}}{tg\alpha} \cdot \frac{CD}{2x} \cdot \frac{2}{5} =$~~ $\frac{1}{tg\alpha} \cdot \frac{2}{5} = \frac{CD}{2x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{CD}{5x} = tg\alpha \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ $\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$; $\cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$ (т.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$)

6) Проведем EB и FB. $\angle CBF = \angle FEB$, т.к. окр EFB кас. BC

$\angle FEB = \angle EBA$, т.к. $EF \parallel AB$ $\Rightarrow \angle FBC = \angle EBA \Rightarrow \triangle EBA \sim \triangle FBC$

(т.к. $\angle FCB = \angle CAD = \alpha$) $\Rightarrow \frac{CF}{AE} = \frac{FB}{EB} = \frac{CB}{AB} = \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{7}} \Rightarrow CF = \sqrt{\frac{2}{7}} AE$

~~7) Из т. Фалеса для $\angle ACD$ и секущих $EF \parallel AD$:~~ ~~$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{FD}$~~

~~8) $\frac{EF}{AB}$ $\frac{EF}{AC} = k = \frac{EF}{AC} = \frac{EF}{AD} \cos\alpha = \frac{EC}{AC} \cos\alpha$~~

7) Пусть стороны $AB = 7$ (просто ~~сделаем~~ если они $7x$ сделаем гомотетию с коэф $\frac{1}{x}$ в т. C и задача останется прежней) Тогда $AD = 5$, $DB = 2$, $CB = \sin\alpha \cdot AB = \sqrt{14}$; $AC = \cos\alpha \cdot AB = \sqrt{35}$

8) Из п. 6: $CF = \sqrt{\frac{2}{7}} AE$. из п. 3: $k = \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{2}\, AE}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}} = \frac{AE}{7} \Rightarrow AE = 7k$

9) ~~$CE = AC - AE$~~ из п. 3: $k = \frac{EC}{AB} = \frac{AC - AE}{AB} = \frac{\sqrt{35} - 7k}{7} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{35}}{14}$

10) Из п. 3: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{1}{k^2} = \frac{14^2}{35} = \frac{28}{5}$ $\Rightarrow$ Отв: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(3)

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

~~$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$~~

~~ОДЗ: $\frac{\pi - 2x}{10} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$~~

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$

$\arccos(\cos x) = \frac{x + 2\pi}{5}$

т.к. arccos принимает знач. от 0 до π

$\frac{x+2\pi}{5} \in [0; \pi] \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$

1) If $x \in [0; \pi]$: $\arccos(\cos x) = x = \frac{x+2\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

2) If $x \in [-\pi; 0]$: $\arccos(\cos x) = -x = \frac{x+2\pi}{5} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

3) If $x \in [\pi; 2\pi]$: $\arccos(\cos x) = 2\pi - x = \frac{x+2\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi$

4) If $x \in [-2\pi; -\pi]$: $\arccos(\cos x) = 2\pi + x = \frac{x+2\pi}{5} \Rightarrow x = -2\pi$

5) If $x \in [2\pi; 3\pi]$: $\arccos(\cos x) = x - 2\pi = \frac{x+2\pi}{5} \Rightarrow x = 3\pi$

Мы перебрали все возможные значения x ~~и получили~~ ~~[illegible]~~. :)

Ответ: -2π; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; 3π

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4)

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \quad (2) \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \quad (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

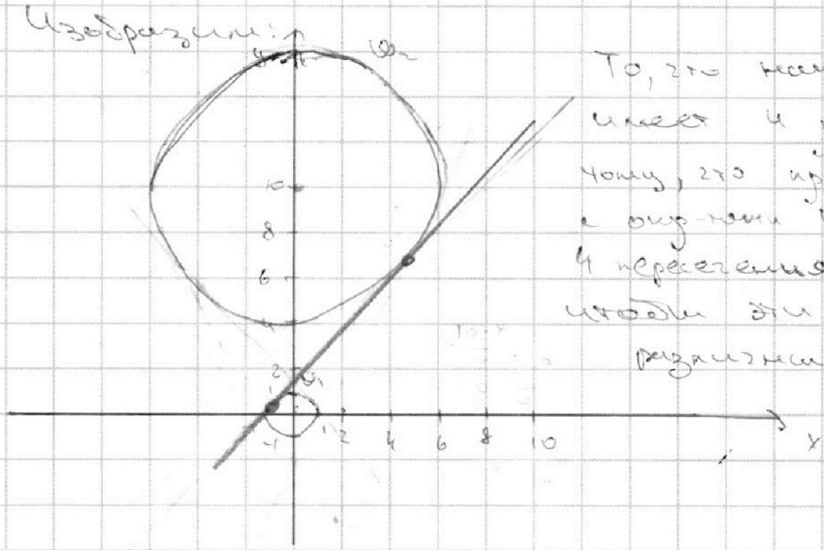
Рассмотрим эти мн-ва точек на пл-ти

(1) задает прямую. Назовем ее прямой ℓ.

(2) задает окруж с центром $(0;0)$ и радиусом 1. Пусть будет ω_1

(3) Задает окруж с центром $(0;10)$ и радиусом 6. (ω_2)

Изобразим:



То, что наша система имеет 4 решения равносильно тому, что прямая ℓ имеет с окр-тями ω_1 и ω_2 ровно 4 пересечения. (Если нас просят, чтобы эти 4 решения были различны).

1) Если $a=0$, то $\ell: y=\frac{4}{3}b$ — горизонтал. прямая. Она не может иметь 4 пересечения с ω_1, ω_2 (см. рис)

2) ~~Если $a\neq 0$~~ Проведем внутренние касательные к ок-тям ω_1 и ω_2. ~~Можно убедиться, что они задаются ур-ями: $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ и $y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$~~

~~(Подставив в (1): $9y^2+16(x^2+1)^2=9 \Rightarrow 25x^2+32x+7=0 \quad \frac{D}{4}=16^2-25\cdot 15$~~

Найдём ур-е касательной с положительной производной (~~—~~

~~Кор~~ Пусть оно имеет вид $y=\alpha x+\beta$. Тогда если $\frac{a}{3}>\alpha$, то мы всегда сможем выбрать b, чтобы было 4 решения (просто подвигав прямую). Если $0<\frac{a}{3}<\alpha$, то ни при каком b не получится, чтобы было ровно 4 пересеч. Если $\frac{a}{3}=\alpha$, то имеем тоже max 2 пересечения $\Rightarrow$ из прямых с полож. производ. будут подходить только прямые, где $\frac{a}{3}>\alpha$. Случай с отриц. произв. водной рассматривается аналогично, т.к. наши окружности симметричны относ Oy. (только знаки поменяются)

Найдем тогда α, это решит нам задачу.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение №4

$(\alpha > 0)$

3) Получаем, нужно найти прямую $y = \alpha x + \beta$, что
каса нас ω_1 и ω_2, т.е.: ④ и ⑤ имеют ровно одно реш.

$$\begin{cases} x^2 + (\alpha x + \beta)^2 = 1 & (4) \\ x^2 + (\alpha x + (\beta - 10))^2 = 6^2 & (5) \end{cases}$$ ~~имеет ровно одно~~

④: $(\alpha^2+1)x^2 + 2\alpha\beta x + (\beta^2 - 1) = 0$

$\frac{D}{4} = \alpha^2\beta^2 - (\alpha^2+1)(\beta^2-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta^2 = \alpha^2 + 1}$

⑤: $(\alpha^2+1)x^2 + 2\alpha(\beta-10)x + ((\beta-10)^2 - 6^2) = 0$

$\frac{D}{4} = \alpha^2(\beta-10)^2 - ((\beta-10)^2 - 6^2)(\alpha^2+1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2+1)6^2 - (\beta-10)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 6^2\beta^2 - \beta^2 + 20\beta - 100 = 0 \Rightarrow 35\beta^2 + 20\beta - 100 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7\beta^2 + 4\beta - 20 = 0$ $\frac{D}{4} = 4 + 20 \cdot 7 = 144 = 12^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_{1,2} = \frac{-2 \pm 12}{7} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ \frac{10}{7} \end{array}\right. \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 - 1 = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{51}{49} \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{51}{49}} \end{array}\right.$

Заметим, что $\beta > 0$, т.к. мы пересекает Oy выше т. $(0, 9)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$. Из этого следует ~~Ответ~~.

Ответ: $a \in \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty\right) \cup$ ~~$\left(-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)$~~ $\cup \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 & (1) \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3 & (2) \end{cases}$$

xy - ?

ОДЗ: $x>0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $y>0$, $y \neq 1$

1) Преобразуем (1): $\log_5^4 2x - 3\frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\frac{1}{\log_5 2x} - 3$

Пусть $t = \log_5 2x$

Тогда получим, домножив на $3t$ ($t \neq 0$ по ОДЗ)

$P_1(t) = 3t^5 + 9t - 13 = 0$ Получаем, что $x = \frac{1}{2}5^{t_i}$, где t_i - корни $P_1(t)$

2) Преобразуем (2): $\log_5^4 y + 4\frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\log_5 y} - 3$

Пусть $t = \log_5 y$

Тогда, домножив на $3t$, получим:

$P_2(t) = 3t^5 + 9t + 13 = 0 \Rightarrow P_2(t) = P_1(t) + 26$

3) Получаем, что $\log_5 2x$ - ~~кор~~ какой-то корень $P_1(t)$, $\log_5 y$ - какой-то корень $P_2(t) = P_1(t) + 26$

$\log_5 2xy = \log_5 2x + \log_5 y$. ~~Все возможные знач xy~~

4) $P_1'(t) = P_2'(t) = 15t^4 + 9 > 0 \Rightarrow$ Эти ф-ции строго возраст. на $(-\infty; +\infty) \Rightarrow$ В силу их непрерывности они имеют ровно один корень. Пусть a - корень $P_1(t)$, b - корень P_2

5) Имеем $3a^5 + 9a - 13 = 0$; $3b^5 + 9b + 13 = 0$. Сложив, получим:

$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3) = 0$ (3)

Заметим, что $a > 0$, $b < 0$ (т.к. если $a \le 0$, то $P_1(a) < 0$. Если $b \ge 0$, то $P_2(b) > 0$), значит $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 > 0$

$\Rightarrow$ из (3) следует, что $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$.

6) $\log_5 2xy = \log_5 2x + \log_5 y = a + b = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$

(Этот случай возможен при данном ОДЗ. ~~Например~~, т.к. следует $y = 1$ и $x = \frac{1}{2}$ $P_1(\log_5 2x) \neq 0$, $P_2(\log_5 y) \neq 0$ и значит они не могут быть решением)

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

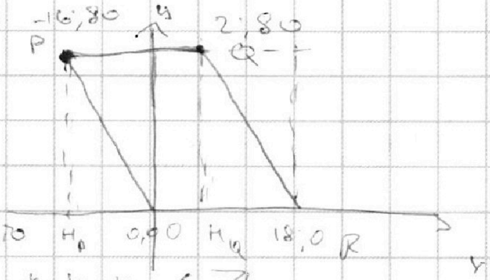
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6

Дано:
$O(0;0)$ $Q(2;80)$
$P(-16;80)$ $R(18;0)$



Найти кол-во $A(x_1;y_1)$
$B(x_2;y_2)$

(1) $5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

1) (1) по модулю 5: $y_2-y_1 \equiv_5 0 \Rightarrow y_2-y_1=5k$

2) Для точек ~~X~~ ~~внут~~ $M(x;y)$ внутри параллелограмма:

$x\in[-16;18]$; $y\in[0;80]$

3) Всего в параллелогр. $OPQR$ столько же целых точек, сколько в прямоугол. PQH_QH_P (H_Q, H_P - проекции Q и P на Ox)
А в нем их: $(2+16+1)\cdot(80+1)=19\cdot 81$. Получаем, что

кол-во способов выбрать A и B: $C^2_{19\cdot 81}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

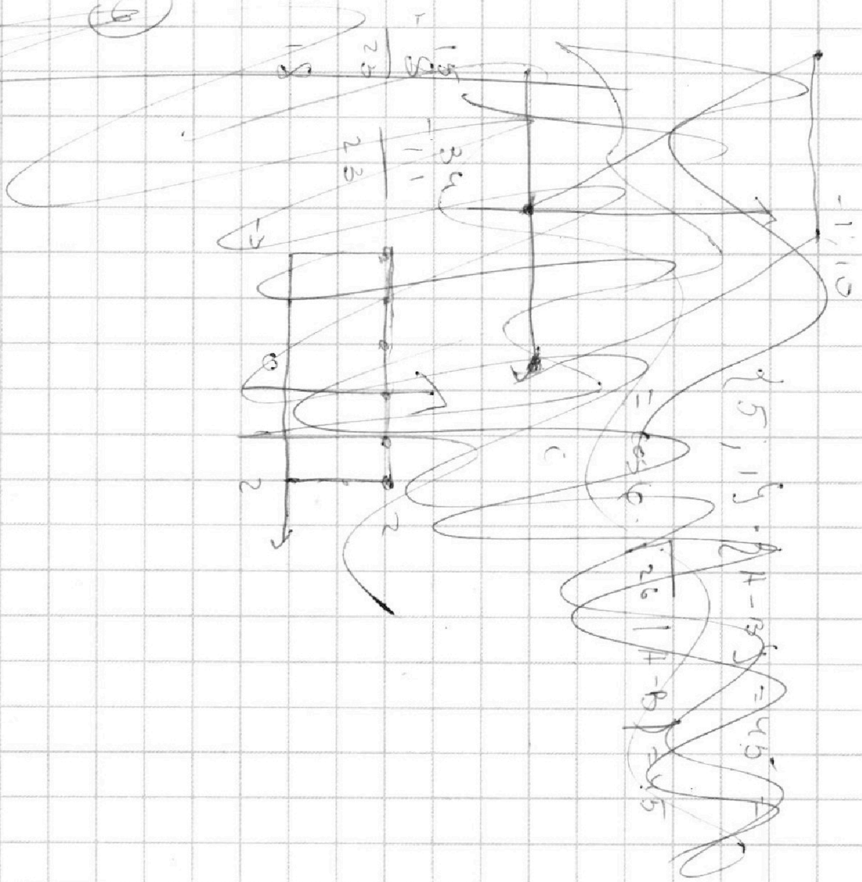
МФТИ

Дано:

6

O(0;0) Q(2;80)

P(-18;80) R(-18;0)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + (\alpha x + \beta)^2 = 1 \\ x^2 + (\alpha x + (\beta - 10))^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(1+\alpha^2) + 2\alpha\beta x + (\beta^2 - 1) = 0 \\ x^2(1+\alpha^2) + 2\alpha(\beta-10)x + (\beta-10)^2 - 6^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = \alpha^2\beta^2 - (1+\alpha^2)(\beta^2-1) = -\alpha - \beta^2 + \alpha^2 + 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1 + \beta^2$$

$$\frac{D}{4} = \alpha^2(\beta-10)^2 - (1+\alpha^2)((\beta-10)^2 - 6^2) =$$

$$= -(\beta-10)^2 + (\alpha^2+1)6^2 = 0$$

$$(2+\beta^2)6^2 - (\beta-10)^2 = 0$$

$$2\cdot 36 + 36\beta^2 - \beta^2 + 20\beta - 100 = 0$$

$$35\beta^2 + 20\beta - 28 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100 + 28\cdot 35 = (\sqrt{5}\cdot 14)^2$$

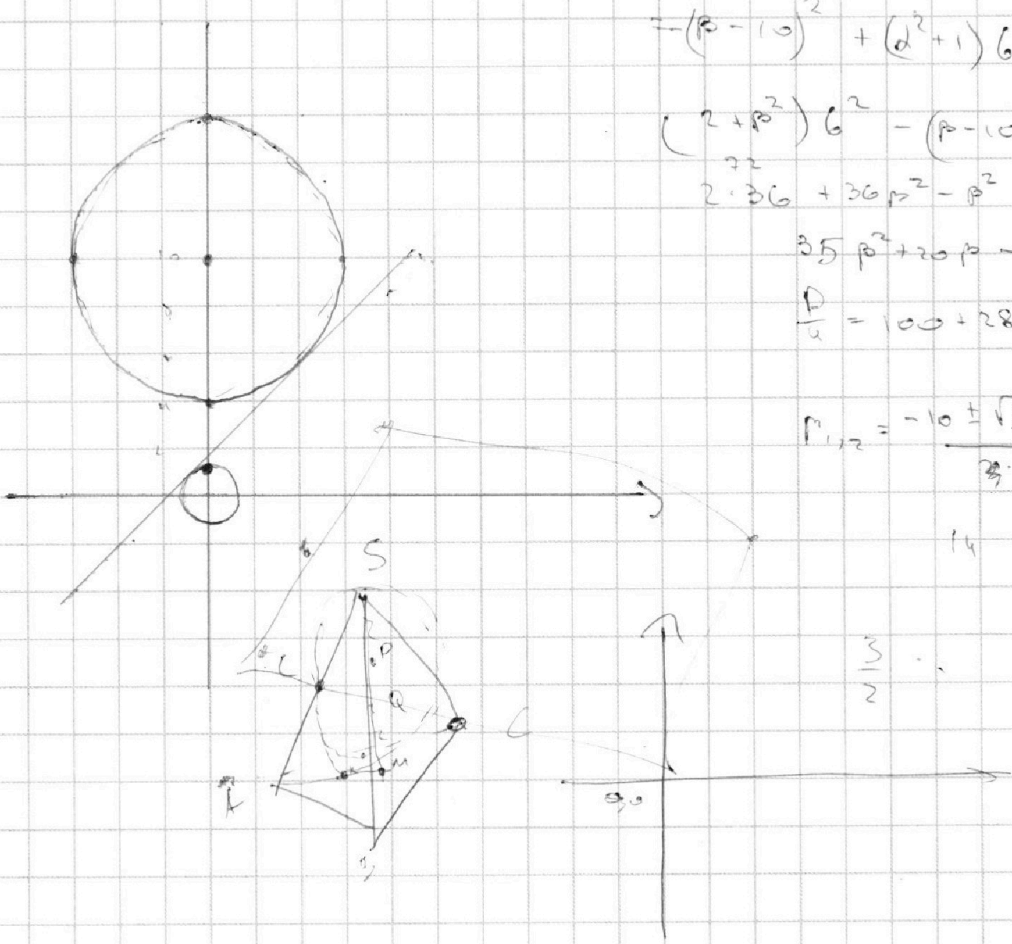
$$\cancel{28\cdot 35} = 35\cdot 28 = 10\cdot 7\cdot 14 = (70)^2\cdot 2$$

$$7^2\cdot 2 \cdot 14^2 \cdot 5$$

$$\beta_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{5}\cdot 14}{35} = \frac{-10+\sqrt{5}\cdot 14}{35}$$

14

$$\alpha = \sqrt{1+\beta^2} = \frac{1}{35}\sqrt{35^2 + 10^2 + 5\cdot 14^2 - 20\sqrt{5}\cdot 14}$$



$\frac{3}{2}$

a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

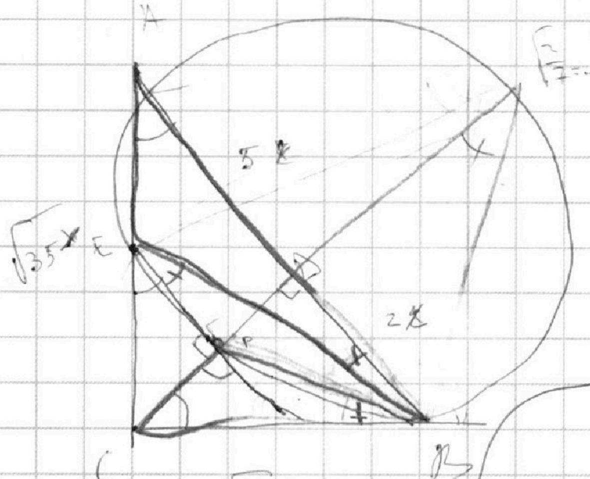
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$P_1(t) = 3t^5 + 9t - 13 =$ $AD : DB = 5 : 2$ $\frac{14^2}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5} =$

$3t^4 + 1$ $49 - 14 = 35$



$\frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{CB}{AB} = \frac{CP}{AE} - CP$

$\frac{CP}{BC} = \frac{\sqrt{\frac{2}{7}}\,AE}{\sqrt{14}} = \frac{AE}{7} = k$

$\frac{CP}{BC} = 7$ $= \frac{AC - EC}{7} = k$

$\frac{CP}{EC} = \frac{CP}{\ }$ $= \sqrt{35} - EC = 7k$

$EC = 7k + \sqrt{35}$

$(10 - \beta^2)6^2 - \beta^2 - 20\beta + 100$

$37\beta^2 - 20\beta + 28 = 0$

$\frac{D}{4} = 100 - 28 \cdot 37$

$CP = \frac{\sqrt{2}\,AE}{\sqrt{7}}$ $k = \frac{EC}{AB} = \frac{7k + \sqrt{35}}{7}$

$k = \frac{CP}{CB} = \frac{\sqrt{2}\,AE}{\sqrt{7}\sqrt{14}} = \frac{AE}{7}$ $100 - 36 - 64 - 36 - 28$

$CE = AC - AE = \sqrt{35} - AE = \sqrt{35} - 7k$

$6^2(1 + \sin^2\alpha) = 80g^2\alpha$ $\frac{CE}{AB} = \frac{\sqrt{35} - 7k}{7} = k$

$x^2 + (\alpha x + \beta)^2 = 1$

$(\alpha^2 + 1)x^2 - 2\alpha\beta x + (\beta^2 - 1) = 0$

$\frac{D}{4} = \alpha^2\beta^2 - (\alpha^2\beta^2 + \beta^2 - \alpha^2 - 1) = 1 - (\alpha^2 + \beta^2)$

$\frac{4}{8}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$

$2 - \beta^2$

$x^2 + (\alpha x + (\beta - 10))^2 = 6^2$

$(1 + \alpha^2)x^2 + 2\alpha(\beta - 10)x + (\beta - 10)^2 - 6^2 = 0$

$\frac{D}{4} = \alpha^2(\beta - 10)^2 -$

$- (\beta - 10)^2\alpha^2 - (\beta - 10)^2 + 6^2(1 + \alpha^2)$

$6^2(1 + \alpha^2) = (\beta - 10)^2$

$\{ \alpha^2 + \beta^2 = 1$