МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Из условия: $(1)\begin{cases} ab = 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}\cdot n \\ bc = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot k \\ ac = 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}\cdot m \end{cases}$ где $n, k, m \in \mathbb{N}$

Перемножая уравнения: $(abc)^2 = 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}\cdot nkm$

т.к. $abc \in \mathbb{N}$ и $abc \vdots 5^{30}$, то $(abc)^2 \vdots 5^{60}$ и $(abc)^2 \vdots 3^{42}$

(3 должно входить в чётной степени)

тогда минимально возможное $(abc)^2 = 2^{42}\cdot 3^{42}\cdot 5^{60}$

откуда $\min abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

Если положить $k = 3\cdot 5^7$ и $m = n = 1$, то получаем

из (1) $b^2 = \frac{ab\cdot bc}{ac} = \frac{2^{23}\cdot 3^{24}\cdot 5^{30}}{2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}} = 2^4\cdot 3^6$ откуда $b = 2^2\cdot 3^3 \Rightarrow a = 2^7\cdot 3^7\cdot 5^{10}$ и $c = 2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{20}$

Эти a b c полностью удовлетворяют условию и при них достигается минимум abc

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

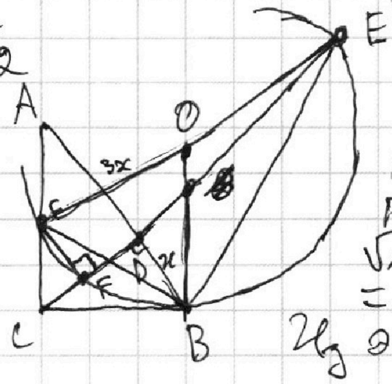
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Пусть O – центр. данной окружности. Т.к. $FE \parallel FD$ $\angle EFD = 90^\circ \Rightarrow EO$ и FD пересекаются на диаметрально противоположной точке E т. E'

Пусть $DB = x$, тогда $AD = 3x$, тогда $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3}x$ и $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = 2\sqrt{3}x$ и $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

Из этого следует, что $\angle CAB = 30^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5(\arcsin(\cos x)) = x + \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin(\cos x) \le \frac{5\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$$

$$-5\arccos(\cos x) = x - 2\pi \qquad -2\pi \le x \le 2\pi \quad (1)$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{2\pi - x}{5}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi - x}{5}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n \\ x = \frac{x - 2\pi}{5} + 2\pi k \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{6x}{5} = \frac{2\pi}{5} + 2\pi n \\ \frac{4}{5}x = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \end{array}\right. \quad \text{с учётом (1)} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2}, 2\pi \end{array}\right.$$

Проверка: $5\arcsin(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = 5\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos\frac{\pi}{3}) = 5\arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos 2\pi) = 5\arcsin 1 = \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos -\frac{\pi}{2}) = 5\arcsin 0 = 0 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

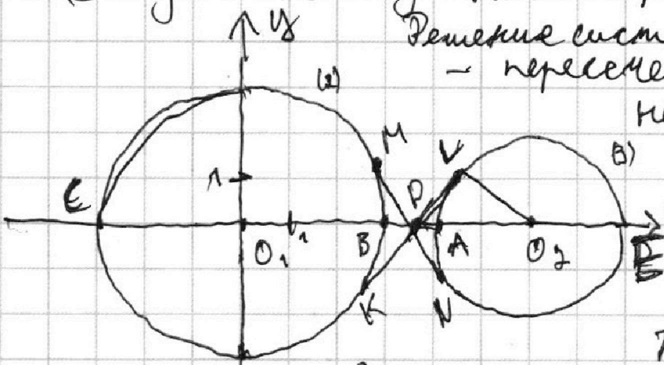
Ответ: $\{-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 $\begin{cases} ax+2y+3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-(12x+32))=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{3b}{2}-\frac{a}{2}x \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \quad (2) \\ (x-6)^2+y^2=4 \quad (3) \end{array}\right. \end{cases}$



Решение системы – пересечение прямой (1) с окружностями (2) и (3)

Требуется найти все a при которых угол наклона прямой (1) позволит при каком-то b пересечь обе окружности

Заметим, что если наклон прямой (1) больше наклона общих внутр. касательных к (2) и (3), то пересечь обе окружности прямая не может

MN и KL – общие касательные, $D = MN \cap KL$ $D \in Ox$; $O_2L \perp KL$

Воспользуемся тем, что D лежит на радикальной оси к окр. (2) и (3);

$DA \cdot DE = DB \cdot DC$ $DA(DA+4)=(1-DA)(1-DA+6)$ $DA^2+4DA = DA^2-8DA+7$ $DA=\frac{7}{12}$ $tg(\angle LDO_2)=\frac{O_2L}{DL}=$

$=\frac{2}{\sqrt{(2+\frac{7}{12})^2-2^2}}=\frac{24}{\sqrt{385}}$ В силу симметрии $tg\angle O_1DM=\frac{24}{\sqrt{385}}$

Если тангенс угла наклона прямой (1) по модулю меньше $\frac{24}{\sqrt{385}}$, то (1) может пересечь обе окружности ($\frac{3b}{2}$ можно сделать т.ч. (1) будет проходить через D)

$-\frac{24}{\sqrt{385}}<-\frac{a}{2}<\frac{24}{\sqrt{385}}$ $\left[\begin{array}{l} a>-\frac{48}{\sqrt{385}} \\ a<\frac{48}{\sqrt{385}} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(-\frac{48}{\sqrt{385}}; \frac{48}{\sqrt{385}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ $\quad \log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 + 8 = 0$

$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8\log_3 x = 0$ $\quad 2\log_3^5 x + 16\log_3 x = -7$ (1)

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$ $\quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y}(3) - \frac{11}{2}\log_{5y}(3) + 8 = 0$

$\log_3^5(5y) + 2 - \frac{11}{2} + 8\log_3(5y) = 0$ $\quad 2\log_3^5(5y) + 16\log_3(5y) = 7$ (2)

Рассмотрим $f(t) = 2t^5 + 16t$ $\quad f(t)$ – нечётно и возрастает

Из (1) и (2) следует, что $\log_3 x = -\log_3 5y$, т. к.
(1) и (2) явл. уравн. $f(\log_3 x) = 7$ и $f(\log_3 5y) = -7$
соответственно $f(\log_3 x) = 7 = f(-\log_3 5y)$ и $f(t)$ возрастает как сумма возрастающих $2t^5$ и t

$\log_3 x = -\log_3 5y$ $\quad \log_3(5xy) = 0$ $\quad 5xy = 1$ $\quad xy = \frac{1}{5}$

Уравнения (1) и (2) однозначно определяют x и y в силу возрастания $f(t)$ и логарифма, т.е. других xy не может быть

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ $\quad y_2 = 33 + y_1 + 3x_1 - 3x_2$

Пусть ~~...~~ $y_1 + 3x_1 = a$

Заметим, что у данного параллелограмма PO и QR параллельны прямым с коэф. наклона -3 (1)

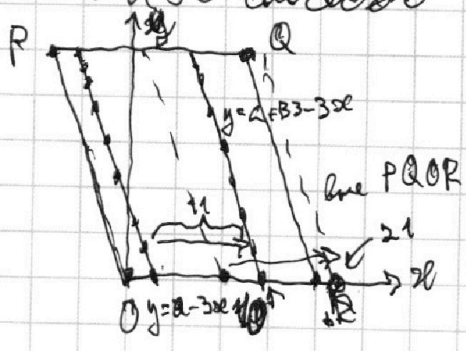
$y_2 = 33 + a - 3x_1$ Если $(x_1; y_1)$ принадлежит прямой $y = a - 3x$, то $(x_2; y_1)$ обязательно принадлежит прямой $y = 33 + a - 3x_1$ — параллельно перенесённой на 11 вдоль оси Ox. Т.е. при фикс. $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ можно выбрать на любой целой точке этой прямой внутри параллелограмма.

Рассмотрим пересеч. прямой $y = a - 3x$, которой принадлежит $(x_1; y_1)$ с осью Ox. Координата x этого пересечения принадлежит мн-ву $\{0, 1, 2, \dots 20\}$. Если она меньше 10, то прямая на которой лежит $(x_2; y_2)$ пересекает параллелограмм (если пересеч. при $x = 9$, то эта прямая ~~совпадает с~~ содержит QR), т.е. всего 10 прямых на которых можно выбрать $(x_1; y_1)$, чтобы существ. такая $(x_2; y_2)$.

В силу (1) каждая прямая вида $y = a - 3x$ содержит в фигуре 15* точек, и к тому же не существ. целой точки внутри не принадл. такой прямой. Прямую содерж. A можно выбрать 10 способами, точку A на ней 15ю и тогда т. B на аналогичной прямой тоже 15ю способами

Итого всего $10 \cdot 15 \cdot 15 =$ ~~2025 способов~~ 2250 способов

Ответ: 2250



*: $\frac{42}{3} + 1 = 15$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

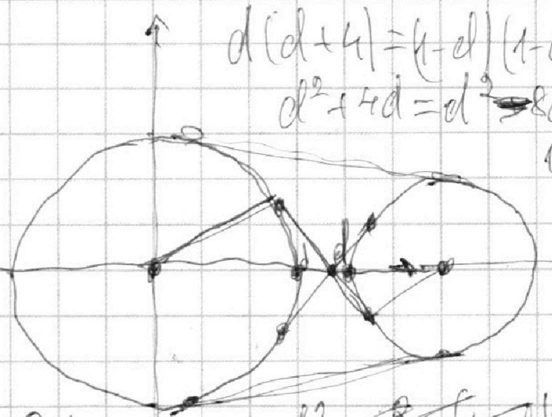
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y = \frac{3b}{2} - \frac{ax}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-b)^2 + y^2 = \cancel{4}\ \frac{3b}{2} \end{array}\right.$



$d(d+4) = (1-d)(1-d+\cancel{7})$ $(d-1)(d+7)$

$d^2 + 4d = d^2 - 8d + 7$

$12d = 7$

$d = \frac{7}{12}$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{3^5 x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 243 + 8 = 0$

$\cancel{49 - 9 \cdot 4} = 37$

$\cancel{d^2 - 3^2 = (1-d)^2 - 2^2}$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{3\log_3 x} + 8 = 0$

$\cancel{9 = d^2 - 2d + 1 - 4}$

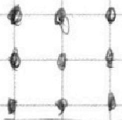
$\cancel{d(3+d) = (1-d)(4+1-d)}$

$\cancel{d^2 + 3d = d^2 - 4d + 3}$

$\cancel{7d = 3}$ $\cancel{d = \frac{3}{7}}$

$\log_3^5 x + 6 - \frac{5}{2} + 8\log_3 x = 0$

$\log_3^5 x + 8\log_3 x = -\frac{7}{2}$



$\frac{25}{4} - 16 = -\frac{39}{4}$

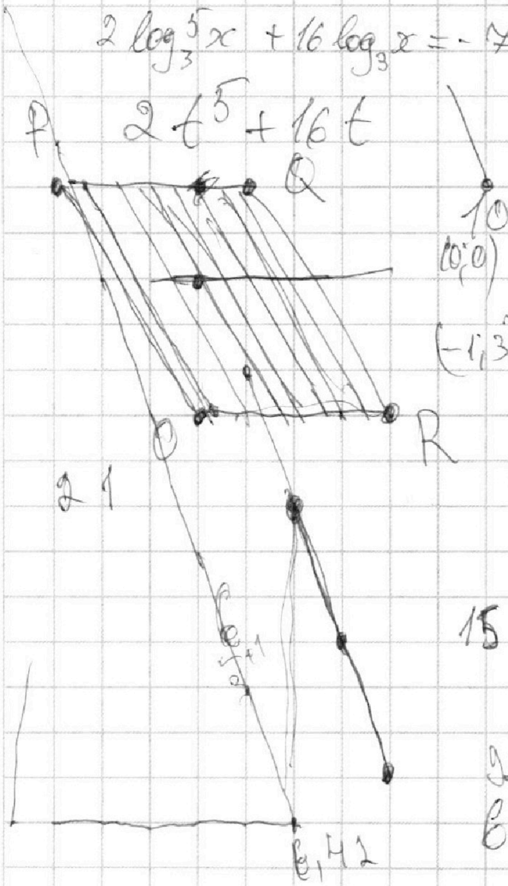
15 15 75 15 225 350 385

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x = -7$

$\left(7 + \frac{7}{12} - 2\right)\left(4 + \frac{7}{12}\right)$

$2t^5 + 16t$

$\frac{7}{12}\left(\frac{55}{12}\right)$ $\frac{7 \cdot 55}{144}$



$\cancel{3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1}$

10

(0;0)

(−1;3)

$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

$3\Delta x + \Delta y = 33$

2250 − 225

2025

$y_2 - y_1 = 33 - 3(x_2 - x_1)$

$(x_1; y_1)$

$y_2 = 33 + y_1 + 3x_1 - 3x_2$

$y_1 \neq 33 - 3x_1$

$y_1 - 33 - 3x_1 \neq 0$

$y_2 = 6 - 3x_2$

$-y_1 + 33 + 3x_1 = y_2 + 3x_2$

15

$\cancel{21 \cdot 18 \cdot (18 - 1)}$

$y_1 - 33 - 3x_1 = y_2 + 3x_2$

$y_2 = 33 + a - 3x_2$

$y_2 = 93 - 3x_2$ $y_2 = 33 - 3x_2$

60

$y_1 = a - 3x_1$

$\cancel{[0; 60)}$ $0, 3, 6, \ldots, 60$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \quad 2^{9}\,3^{10}\,5^{10}$

$bc \quad 2^{14}\,3^{13}\,5^{13}$

$ac \quad 2^{19}\,3^{18}\,5^{30}$

$\cancel{ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2}$

$(abc)^2$

$-\frac{8\pi}{6} \quad \frac{3\pi}{6}$

$2^{9}3^{10}5^{10}$

$ab \cdot c$

$a \cdot bc \quad 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}$

$b \cdot ac \quad 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

$-\frac{1}{2}$

$a \quad 5^{15} \quad 3^{9} \quad 2^{9}$

$c \quad 5^{15} \quad 3^{9} \quad 2^{10}$

$b \quad 2^{4} \quad 3^{4}$

$ab = 2^{9}\,3^{10}\,5^{10}\,n$

$bc = 2^{14}\,3^{13}\,5^{13}\,k$

$ac = 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}\,m$

$(abc)^2 = 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}\cdot nmk$

$abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27} \quad nmk = 3\cdot 5$

$2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}\; ab$

$2^{14}\cdot 3^{14}\cdot 5^{20}\; bc$

$2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}\; ac$

$mnk = 3\cdot 5^{7}$

$abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

$k = 3\cdot 5^{7}$

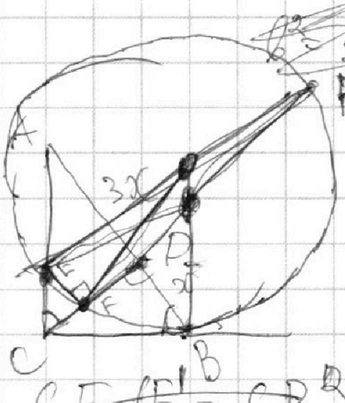
$\frac{7\pi}{3}$

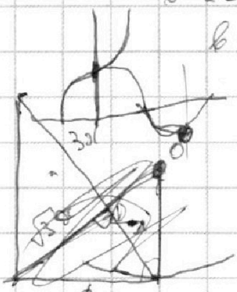
$b^2 = 2^{4}\cdot 3^{6}$

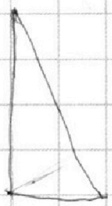
$b = 2^{2}\cdot 3^{3}$

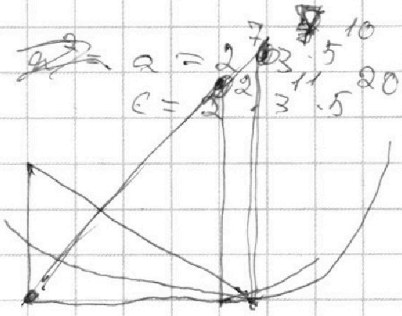
$a = 2^{7}\cdot 3^{7}\cdot 5^{10}$

$c = 2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{20}$







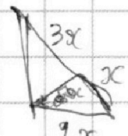


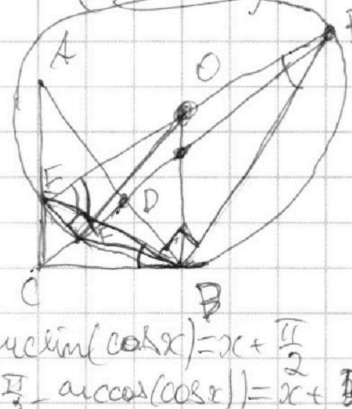
$CF \cdot CF' = CB^2$

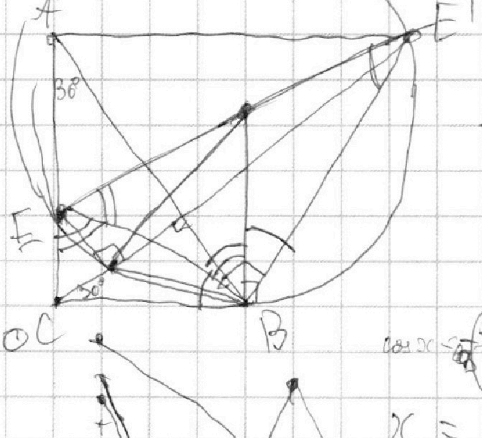
$CF \cdot (2R + CF) = 4x^2$

$\frac{DO}{\sqrt{3}x} = \frac{x}{3x} \quad DO = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\sqrt{\frac{1}{3}x^2 + xR} = \frac{2}{\sqrt{3}}x$







$\frac{EB}{EE'} = \frac{CB}{BE'}$

$= \frac{2x}{BE'}$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

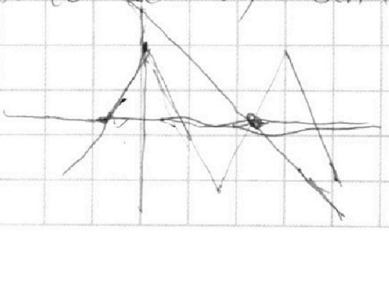
$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

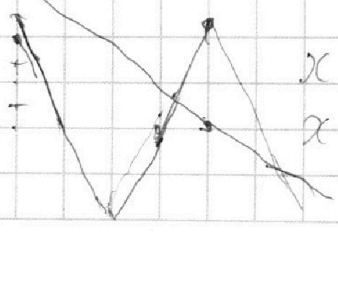
$5\arccos(\cos x) - 2\pi + x = 0$

$\cos x = \cos\left(\frac{x + 2\pi}{5}\right)$

$x = \frac{2\pi - x}{5} + 2\pi n$

$x = \frac{-2\pi + x}{5} + 2\pi k$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!