



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Запишем условия деления  $ab, bc, ac$  на данные числа.

$$ab = m \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$ac = k \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } abc &= \sqrt{mnk \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}} = \\ &= 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{mnk \cdot 3 \cdot 5} \end{aligned}$$

Т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$   $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow mnk = 15 \cdot l^2$ ,  $l \in \mathbb{N}$

а  $\min(abc)$  достигается при  $\min(mnk) \Rightarrow mnk = 15$

Тогда:  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ . Но заметим, что

$ac = k \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$  - кратно  $5^{30} \Rightarrow abc$  содержит

в своем составе степень 5  $\geq 30$

$$\Rightarrow \boxed{\min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}}$$

Это достигается при  $\begin{cases} a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15} \end{cases}$

И правда:  $2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} ; 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$   
 $2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда:  $CD$  - высота в прямоугольн.  $\Delta \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{3 \cdot 1} = \sqrt{3}, \quad \Rightarrow BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 2, \quad AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2\sqrt{3}$$

2)  $EF \cap BC = M$

~~Угол  $\angle FM \neq \angle E$~~

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \angle CAB = 30^\circ; \quad \angle CBA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

3)  $EF \parallel AB \Rightarrow \Delta CEM \sim \Delta CAB$  (угол  $\angle$  - общий).

$CD \perp AB \Rightarrow CD \perp EF$  }  ~~$\angle FEM = \angle E$~~

~~Угол  $\angle FM = \angle E$~~   $\Rightarrow \angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$

$\angle CME = \angle CBA = 60^\circ$ . Также  $\angle ECF = 90^\circ - \angle CEF = 60^\circ$ ;

~~$\angle FEM = \angle E$~~   $\angle CMF = 90^\circ - \angle FCM = 60^\circ$

Пусть  $FM = x$ . Тогда  $CM = 2x \Rightarrow CF = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$

$$\Rightarrow EM = 2CM = 4x \Rightarrow EF = 3x \Rightarrow EC = \sqrt{(3x)^2 - (\sqrt{3}x)^2} = 2\sqrt{3}x$$

4)  $MB$  - кас. к окружности  $\Rightarrow MB^2 = FM \cdot ME$

$$MB = BC - MC = 2 - 2x$$

$$(2 - 2x)^2 = x \cdot 4x \Rightarrow 4 - 4x + 4x^2 = 4x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AC}{\frac{1}{2} CF \cdot EF} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}x \cdot 3x} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}x^2} = \frac{4}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

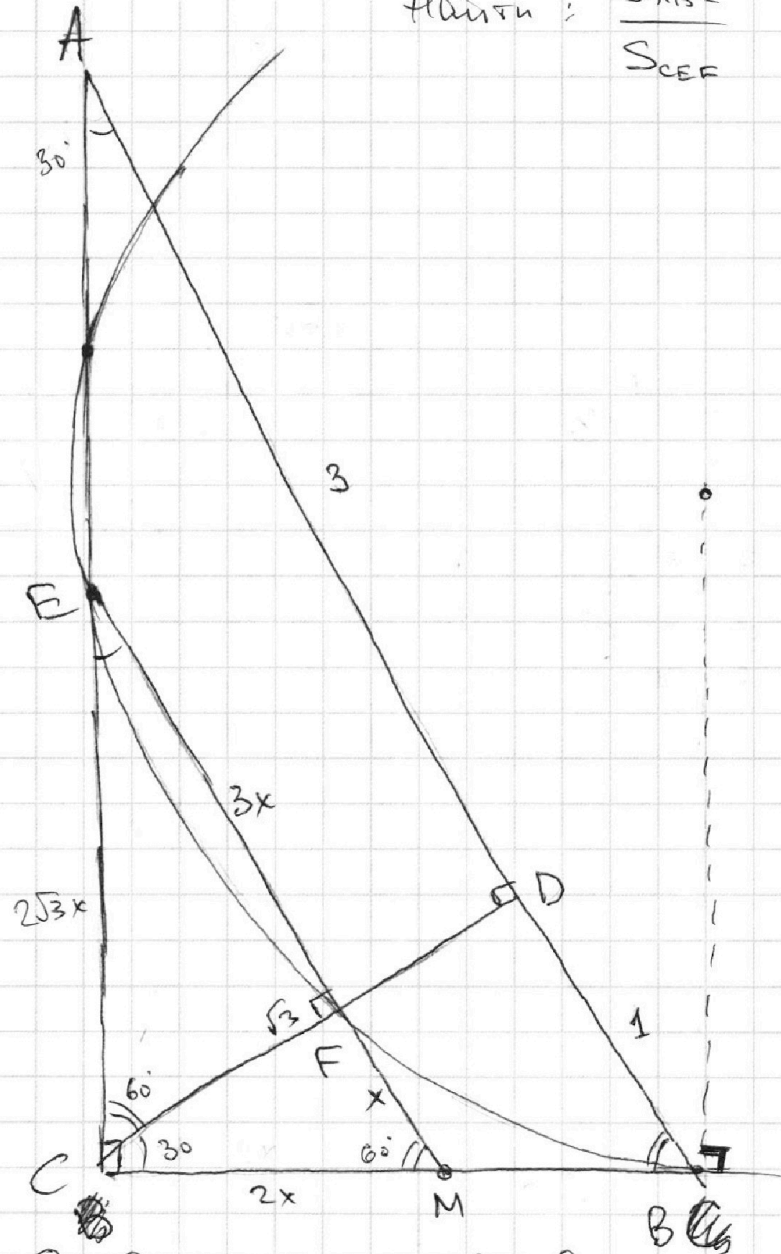
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Найти:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$



~~1) Задача решается введением в рассмотрение окружности~~

1) Т.к.  $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$  Пусть  $BD = 1$ ,  $AD = 3$

Т.к. в задаче найти отношение, можно ввести



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



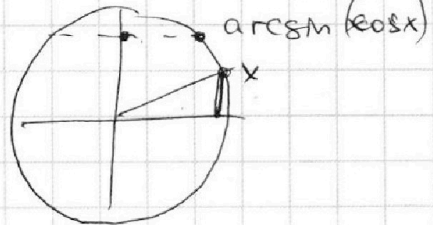
Задача №3

$$\sin \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

1)  $\cos x \geq 0$ , ~~else~~

$$\Rightarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

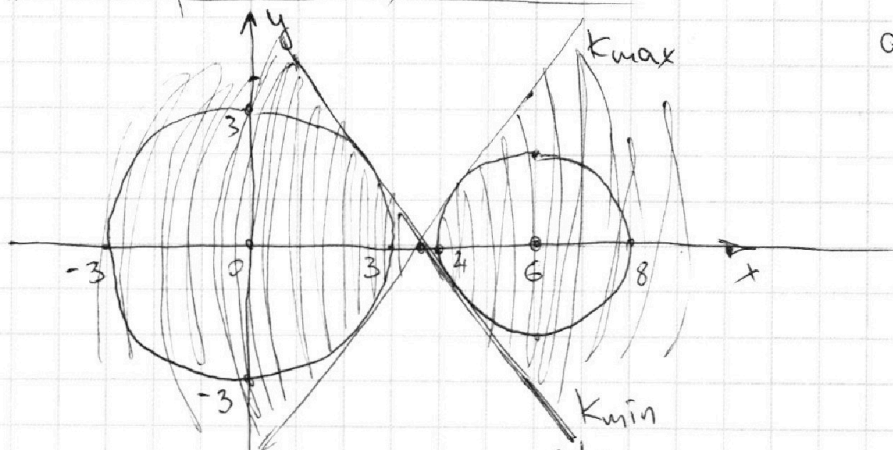
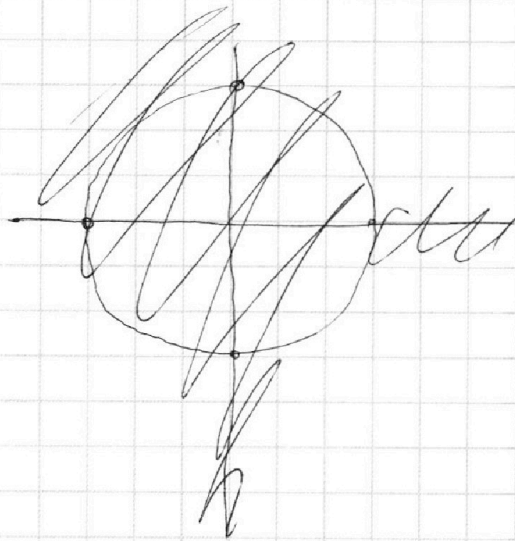
Задача №4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 9 = 0$  - уравнение окружности  
с центром  $(0; 0)$  и  $R = 3$

$$x^2 + y^2 + 12x + 32 = (x - 6)^2 + y^2 - 4$$

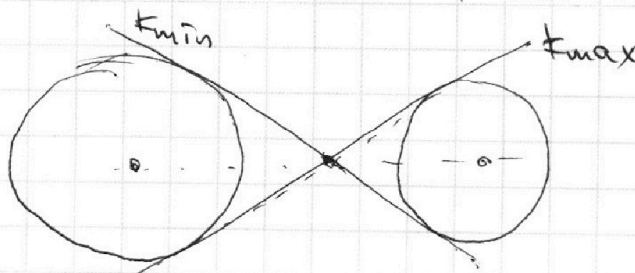
$(x - 6)^2 + y^2 - 4 = 0$  - уравнение окружности  
с центром  $(6; 0)$  и  $r = 2$



$$ax + 2y - 3b = 0 \\ \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

Нужно найти такие  $k$  (коэф. наклона прямой),  
чтобы её можно было двигать и пересекать  
эллипс в 4 точках.

Видно, что наибольшие  $k$  - это касательные  
к двум окружностям



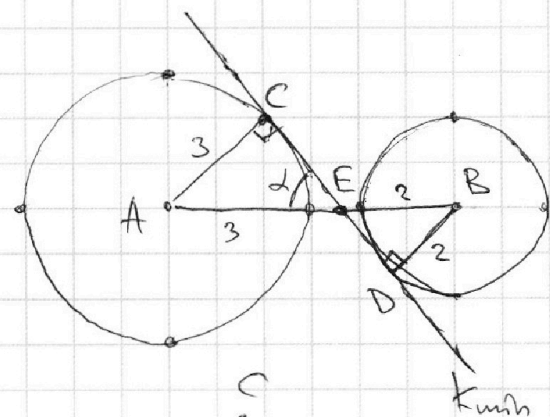
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle ACE \sim \triangle BDE \quad \left( \begin{array}{l} \angle CEA = \angle DEB \\ AC \parallel BD \\ (AC \perp CD \text{ и } BD \perp CD) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{3}{2} = \frac{AE}{EB}$$

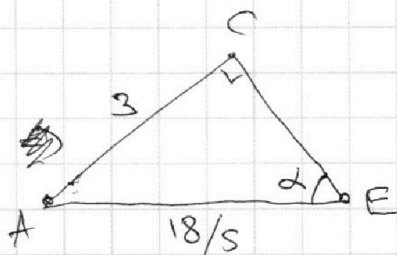
Также  $AE + EB = 6$

$$\Rightarrow AE = \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5}$$

$$EB = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

$$CE = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 3^2} = 3 \cdot \sqrt{\frac{36}{25} - 1} =$$

$$CE = \frac{3}{5} \sqrt{11}$$



$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CE} = \frac{3}{\frac{3}{5} \sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow k_{\min} = -\operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \boxed{k_{\min} = -\frac{5}{\sqrt{11}}}$$

Так как график симметричен отн. оси  $x$

$$\boxed{k_{\max} = -k_{\min} = \frac{5}{\sqrt{11}}} \Rightarrow k \in \left(-\frac{5}{\sqrt{11}}; +\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} = k_{\max} \\ -\frac{a}{2} = k_{\min} \end{cases} \quad \boxed{k_{\min} < -\frac{a}{2} < k_{\max}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > -2k_{\max} \\ a < -2k_{\min} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \\ a < +\frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_3 3^5}{\log_3 x^2} - 8$$

$$a = \log_3 x$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$\Rightarrow \boxed{2a^5 + 16a + 7 = 0} \quad (1)$$

$$2) \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\text{ОДЗ: } y \neq 0$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{\log_3(3^{11})}{\log_3(5y)^2} - 8$$

$$b = \log_3(5y)$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3(5y)} - 8$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8$$

$$\Rightarrow \boxed{2b^5 + 16b - 7 = 0} \quad (2)$$

$$(1) + (2) : 2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b) \underbrace{(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow a+b = 0 \quad \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1    2    3    4    5    6    7  
                 

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение 5 задачи  
 $\Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 (5y) = 0$

$$\Rightarrow \log_3 (5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = \frac{1}{5}}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$

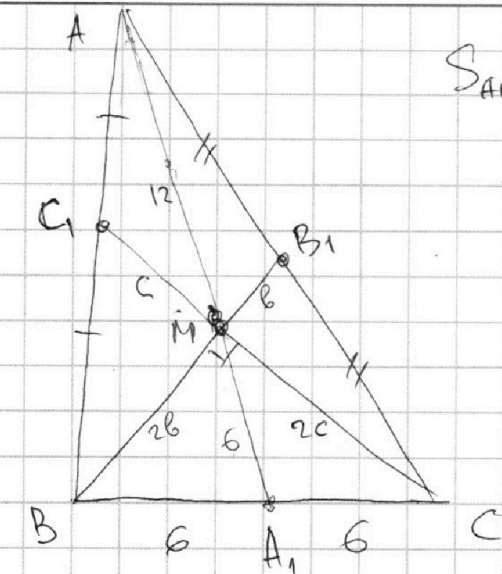
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h \Rightarrow = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 90$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 15}$$

$$S_{AMB} = S_{AMC} = S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 30$$

$$\Rightarrow S_{BMC_1} = \frac{1}{2} S_{BMC} = 15$$

$$S_{B_1MC} = \frac{1}{2} S_{BMC} = 15$$

Пусть  $MC_1 = C \Rightarrow MC = 2C$   
 $MB_1 = 6 \Rightarrow BM = 26$

$$\Rightarrow S_{BMC_1} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 26 = 6C = 15$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 2(36 \cdot 30) = 18 \cdot 9 \cdot 6C = 18 \cdot 9 \cdot 15 = \boxed{2430}$$

2)  $\Omega$  кас. BCS  $\Rightarrow$

$$SN = SL \text{ (кас)} = 4$$

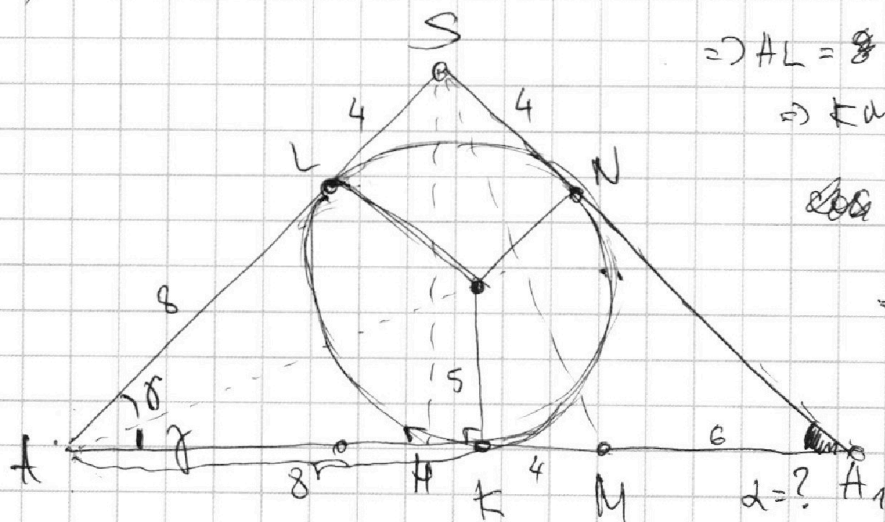
$$\Rightarrow AL = 8 = AK$$

$$\Rightarrow KM = 4 \text{ AM AK} = 4$$

$$\cos \gamma = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{5}{\sqrt{89}}$$

$$\Rightarrow \dots$$



$$\Rightarrow \cos 2\gamma = 1 - 2\sin^2 \gamma = 1 - 2 \cdot \frac{25}{89} = \sqrt{\frac{39}{89}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\gamma = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{89}} \Rightarrow SH \text{ (высота)} = AS \sin 2\gamma = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{89}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AH = AS \cos 2\gamma = 12 \cdot \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{89}}$$

$$\Rightarrow HA_1 = 18 - 12 \cdot \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{89}}$$

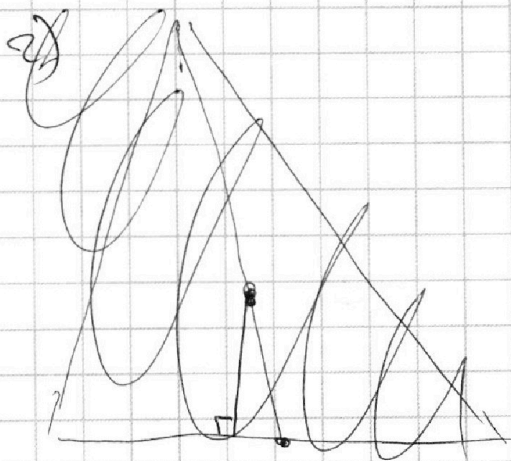
$\alpha = \angle A_1 A$  - искомым  
двухгранный угол

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{8H}{A_1H} = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{89}} = 6 \left( 3 - 2 \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{89}} \right) =$$

$$HA_1 = 6 \cdot \frac{3\sqrt{89} - 2\sqrt{39}}{\sqrt{89}} = \frac{60\sqrt{2}}{6(3\sqrt{89} - 2\sqrt{39})} = \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{89} - 2\sqrt{39}}$$

$\angle$  - искомым углом,

т.к.  $(SAM) \perp (ABC)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №7

Т.к. сфера кас. пл-ти  $ABC$

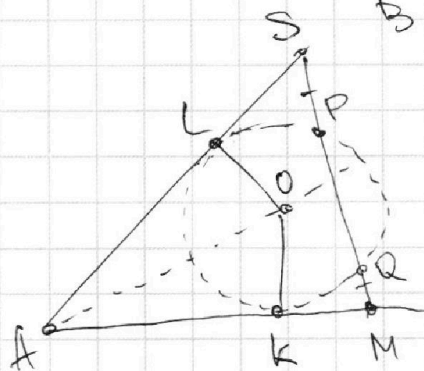
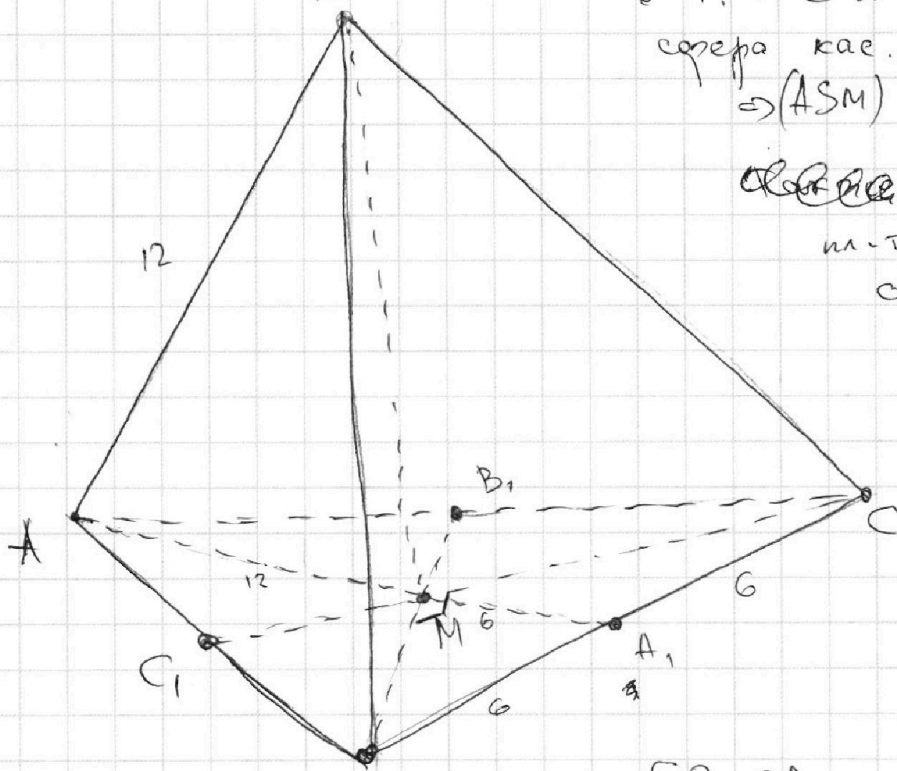
$\exists$  т.  $K \in AM$  и  $\exists$

сфера кас.  $AS$

$\Rightarrow (ASM) \perp (ABC)$

~~Сфера~~  $\Rightarrow$  сфера сечет  
пл-то  $SAM$  по

своему большому  
кругу, то есть  
центр  $L \in (SAM)$



т.к.  $SP = QM$ , то

$$SP \cdot (SP + PQ) = QM \cdot (QM + PQ)$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$SL^2 \quad \quad \quad KM^2$$

$$\Rightarrow SL = KM$$

т.к.  $AL = AK$  ( $\triangle AOL \cong \triangle AOK$ )

$\Rightarrow AS = AM \Rightarrow \triangle ASM - \text{равн.}$ ,  $AS = AM = 12 = BC$

$\Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2} = 6$  (т.к.  $\frac{MA_1}{AM} = \frac{1}{2}$   $M$  - перес. медиан)

$\Rightarrow \exists \triangle BMC$  медиана  $MA_1 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$



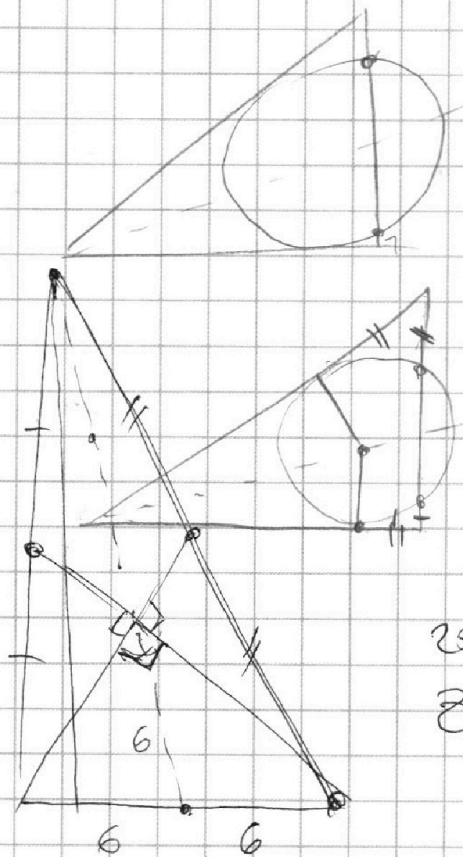
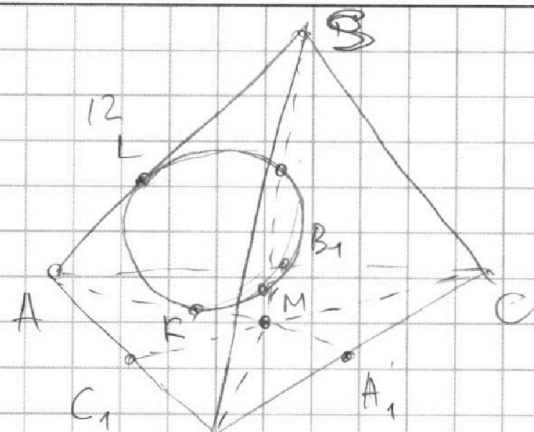
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

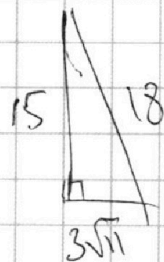


$25 + 64$   
89

$S_{ABC} = 90 = \frac{1}{2} h \cdot 12$

$h = 15$

5 6



81  
2  
~~48~~

$81 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$405 \cdot 6 = 2430$

$64 - 25$

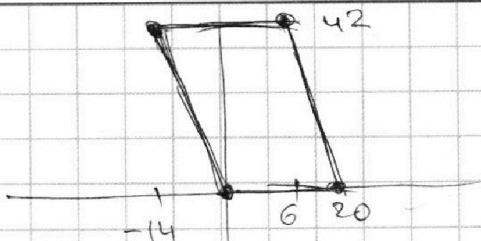
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

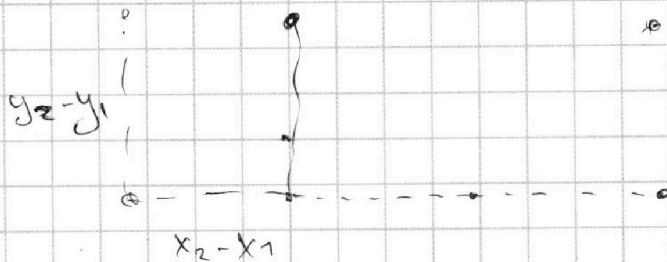
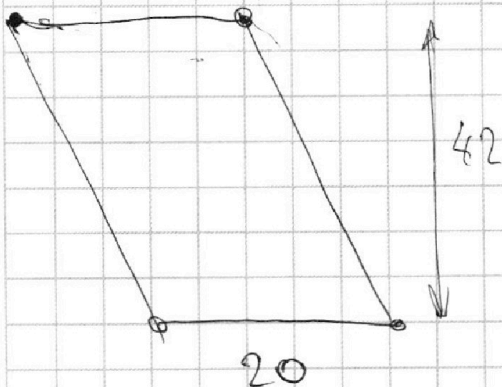
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пара точек  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$\frac{81}{3}$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_3 3^5}{\log_3 x^2} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \quad \boxed{x \neq 3}$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} - 8$$

$$2t^5 + 12 = 5 - 16t$$

$$\boxed{2t^5 + 16t + 7 = 0}$$

$$\begin{aligned} & \log_3^x x + \log_3^y y \\ & a + b = \log_3^{xy} xy \end{aligned}$$

$$\log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 =$$

$$\log_3^4 (xy) + \frac{2}{\log_3 (xy)} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 (xy)} - 8$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 \quad 2b^5 + 4 = 11 - 16b$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0 \quad 2(a + b)$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2)$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) - a^2 b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

~~$$\sin \sqrt{1-x^2} = x + \frac{\pi}{2}$$~~

$$\sin(\operatorname{arcsin}(\cos x)) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

a = ? каждый b : 4 реш.

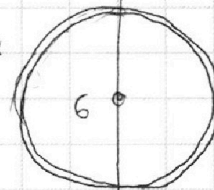
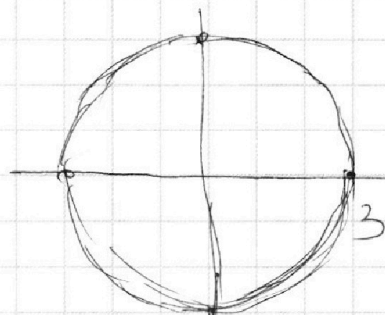
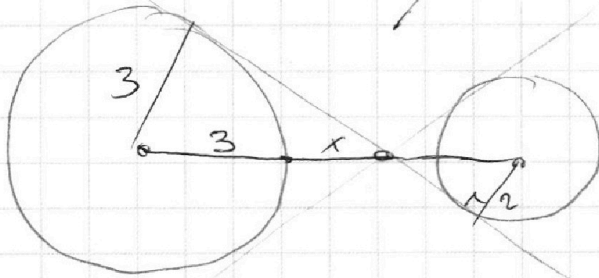
$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$k_{\min} < -\frac{a}{2} < k_{\max}$$

$$a > -2k_{\max}$$



~~$$x(3+x) + (3+x)^3$$~~

$$3 \left( \frac{36}{25} - 1 \right)$$

~~$$x(3+x) + 9 = (3+x)^2$$~~

$$-\frac{a}{2} < \frac{5}{11}$$

$$-a < \frac{10}{11}$$

~~$$3x + x^2 + 9$$~~

$$a > -\frac{10}{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c :$

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$ab = m \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

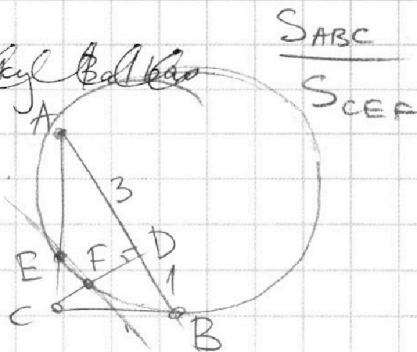
$$bc = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = k \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

?  $\min abc$  ?

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

*Abckyl Balkko*



$$abc = \sqrt{mnk \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$$

$$= 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{mnk \cdot 3 \cdot 5}$$

$$mnk : 15$$

$$mnk = 15 \cdot 5^6$$

$$\begin{aligned} a &= 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15} \\ b &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \\ c &= 2^{10} \cdot 3^{18} \cdot 5^{15} \end{aligned}$$

$$\min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

[30 min+]

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

