



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 мест 2 реш.

3) Степень двойки:

$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \beta_1 + \delta_1 \geq 12 \\ \delta_1 + d_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d_1 + 2\beta_1 + 2\delta_1 \geq 34 \\ d_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 17 \end{cases}$$

4) Аналогично: где тройки:

$$\begin{cases} \beta_2 + d_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \delta_2 \geq 20 \\ d_2 + \delta_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq \frac{55}{2} \\ \text{с учетом ограничения} \\ d_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 28 \end{cases}$$

5) Аналогично где пятёрки

$$\begin{cases} d_3 + \beta_3 \geq 12 \\ d_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 17 \\ d_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow d_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 39$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 имеет 1 реш.

1) Если мы хотим минимизировать  $abc \Rightarrow$  по возможности нужно минимизировать каждое из чисел  $a, b, c \Rightarrow$  они не содержат делителей кроме 2, 3 и 5.

2) Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$   
 $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$   
 $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$   $\left( \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N} + \{0\} \\ \text{при } i=1, 2, 3. \end{array} \right)$

$\Rightarrow ab = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3} = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$   
и из условия следует, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично получим системы на  $bc$  и  $ac$

$bc: \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 & (2) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases}$   $ac: \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 & (3) \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$

Произведение  $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3}$

Учитывая, что  $\alpha_1$  независимо от  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$   
(и наоборот)

$\beta_1$  от  $\beta_2$  и  $\beta_3$  (и наоборот) и  $\gamma_1$  независ. от  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$   
(и наоборот).

Запишем по отдельности условия из систем (1), (2) и (3) на степени двойки, пятёрки и тройки.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 мет 2 решения

8) Пусть радиус окружн. равен  $r$

$\Rightarrow$  в  $\triangle EFM$  по Т. Пифагора:

$$(2r)^2 = EF^2 + FM^2$$

$$EF = CF \cdot \operatorname{tg} \angle ECF = CF \cdot \frac{5x}{\sqrt{10}x} = \frac{5}{\sqrt{10}} CF$$

9) Система: 
$$\begin{cases} 4r^2 = \frac{25}{10} CF^2 + FM^2 \\ CF^2 + CF \cdot FM = 14x^2 \end{cases}$$

10) Рассмотрим  $\angle EBC = \frac{1}{2} \cup EB$  (угл между кас. к хордой)  
 $\angle MEB = \frac{1}{2} \cup BM$  (впис. угл.)  
 $= \frac{1}{2} (180 - \cup EB)$

$$= 90 - \frac{1}{2} \cup EB = 90 - \angle EBC$$

11) Продлим  $EF$  до пересечения с  $CB$  в точке  $N$ .

$$\begin{aligned} \text{Степень т. } N &= NB^2 = (CB - NC)^2 \\ &= NF \cdot NE = NF \cdot \sin \angle ECF \cdot CN \cdot \cos \angle ECF \end{aligned}$$

В пр/уг  $\triangle CNE$ :  $CF$  - выс к гип

$$\Rightarrow CN^2 = NF \cdot NE$$

$$\Rightarrow CN^2 = CB^2 - 2CB \cdot NC + NC^2$$

$$CB^2 - 2CB \cdot NC = 0$$

$$CB - 2NC = 0$$

$$NC = \frac{CB}{2} = \frac{\sqrt{14}x}{2}$$

$\triangle ACB \sim \triangle ECN$  (отсекал прямой || гип)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow CE = \frac{CN \cdot AC}{CB} = \frac{\frac{\sqrt{14}x}{2} \cdot \sqrt{35}x}{\sqrt{14}x} = \frac{\sqrt{35}x}{2}$$

$$\Rightarrow \text{искомое отношение равно } \left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \frac{49x^2 - 4}{35x^2}$$

Ответ:  $\frac{49 \cdot 4}{35}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

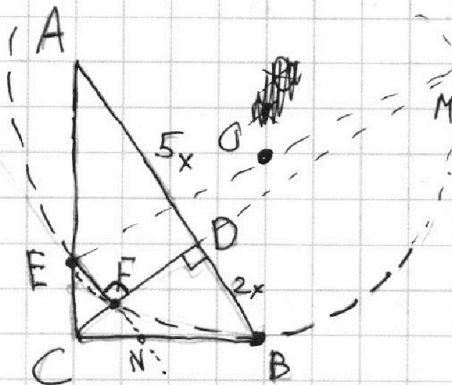
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть  $AD = 5x$   
 $DB = 2x$

$$\Rightarrow \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{10}x = CD.$$

2) Рассмотрим  $\triangle CAD$  и  $\triangle ABC$ :

1)  $\sphericalangle A$  - общий

2)  $\sphericalangle CDA = \sphericalangle ACB = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle ABC$  по двум углам

$$\Rightarrow \frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = k_1^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

3) По т. Пифагора в  $\triangle CDB$ :  $CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x$

По т. Пифагора в  $\triangle CDA$ :  $AC = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$

4) продлим  $CD$  до второго пересечения с окружн. в точке  $M$ .

5)  $EF \parallel AB \Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow$   
 $CD \perp AB$

$\Rightarrow$  рассмотрим  $\triangle CEF$  и  $\triangle CAD$ :

1)  $\sphericalangle C$  - общий

2)  $\sphericalangle CFE = \sphericalangle CDA = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$  по двум углам

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = k_2^2 = \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{CEF} S_{ADC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k_1^2 \cdot k_2^2 = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2$$

$$= \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{EF}\right)^2$$

6)  $\sphericalangle EFM = 90^\circ$

$\sphericalangle EFM$  - впис.  $\Rightarrow EM$  - диаметр.

7) Степень точки  $C$  относительно окружности равна  $CB^2 = CF \cdot CM = (CF + EF) \cdot CF = 14x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



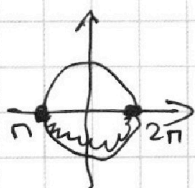
№3 макс 2 решения

5) При  $x \in (0; \pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x$

$$2x - 10x = -4\pi$$

$$-8x = -4\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ - подходит}$$

6) При  $x \in (\pi; 2\pi] \Rightarrow$



$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x - \pi$$

$\Rightarrow$  уравнение:

$$2x - 10(x - \pi) = -4\pi$$

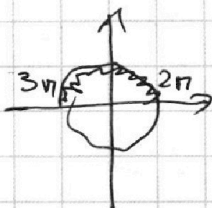
$$-8x + 10\pi = -4\pi$$

$$-8x = -14\pi$$

$$x = \frac{14}{8}\pi \text{ - подходит.}$$

$$\frac{8}{8}\pi \leq x \leq \frac{16}{8}\pi$$

7) При  $x \in (2\pi; 3\pi]$ :



$$\arccos(\cos x) = x - 2\pi$$

$$2x - 10(x - 2\pi) = -4\pi$$

$$-8x + 20\pi = -4\pi$$

$$x = 3\pi \text{ - подходит.}$$

Ответ:  $x \in \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{14}{8}\pi; 3\pi \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$   $\sqrt{3}$  мест 1 решение

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$2x - 10 \arccos(\cos x) = -4\pi$$

2)  $0 \leq \arccos(\cos x) \leq \pi$

~~.....~~

$$-10\pi \leq -\arccos(\cos x) \leq 0$$

$$-10\pi + 2x \leq \underbrace{2x - \arccos(\cos x)}_{-4\pi} \leq 2x$$

$$-10\pi + 2x \leq -4\pi \leq 2x$$

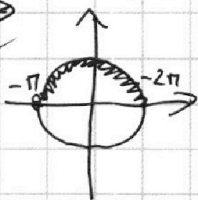
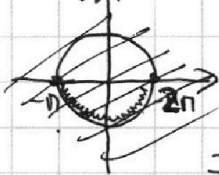
(1)                      (2)

$$(1) \begin{aligned} -10\pi + 2x &\leq -4\pi \\ -5\pi + x &\leq -2\pi \\ x &\geq 3\pi \end{aligned}$$

$$(2) \begin{aligned} -4\pi &\leq 2x \\ x &\geq -2\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

3) При  $x \in [-2\pi; -\pi]$



$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x + 2\pi$$

$\Rightarrow$  уравнение:

$$2x - 10(x + 2\pi) = -4\pi$$

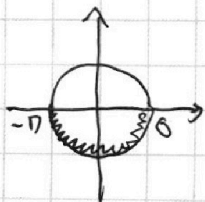
$$-8x - 20\pi = -4\pi$$

$$-8x = 16\pi$$

$$x = -2\pi \in [-2\pi; -\pi]$$

корень подходит

4) При  $x \in [-\pi; 0]$ :



$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = -x$$

$$\Rightarrow 2x + 10x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\in [-\pi; 0]$$

$\Rightarrow$  корень подходит

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 имеет 3 решения

$$= 16 \cdot \sqrt{\frac{100}{289} + \frac{289}{289}} = \frac{16}{17} \sqrt{389}$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg} k_2 c c_1 = \operatorname{ctg} \theta_2 c k_2 = \frac{k_2 c}{k_2 c_2} = \frac{\frac{16}{17} \sqrt{389}}{16} = \frac{\sqrt{389}}{17} = m_1$$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$

5) Рассмотрим ~~положительные~~ неотрицательные  $A \Rightarrow A \in [0; +\infty)$

Если  $A < m_1$ , то нет таких  $b$ ,  
чтобы прямая пересекала каждую  
из окруж  $b$  в двух точках.

Если  $A = m_1$ , то максимум 2 решения  
(либо пересек одной окруж в двух  
точках, либо касание обеих при  $B=C, C = \frac{16}{17}$ )

Если  $A > m_1$ , то найдется такое  $B$ ,  
это будет и тогда пересек.

$\Rightarrow$  подходит  $A \in (m_1; +\infty)$ .  
Аналогично для  $A \in (-\infty; 0)$  получим

$A \in (-\infty; -m_1)$   
(вторая касательная)  
имеет такой коэф)

$$\Rightarrow A = \frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{389}}{17}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{389}}{17}; +\infty\right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{389}}{17}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{389}}{17}; +\infty\right)$$

Ответ:  $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{389}}{17}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{389}}{17}; +\infty\right)$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 мист 1 решение

$$1) \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

2) Уравнения решений:

①  $x^2 + y^2 - 1 = 0$   
 $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$  окружность  $\omega_1$  с центром в  $O_1(0; 0)$  и  $r_1 = \sqrt{1} = 1$

②  $x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$

$$x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36$$

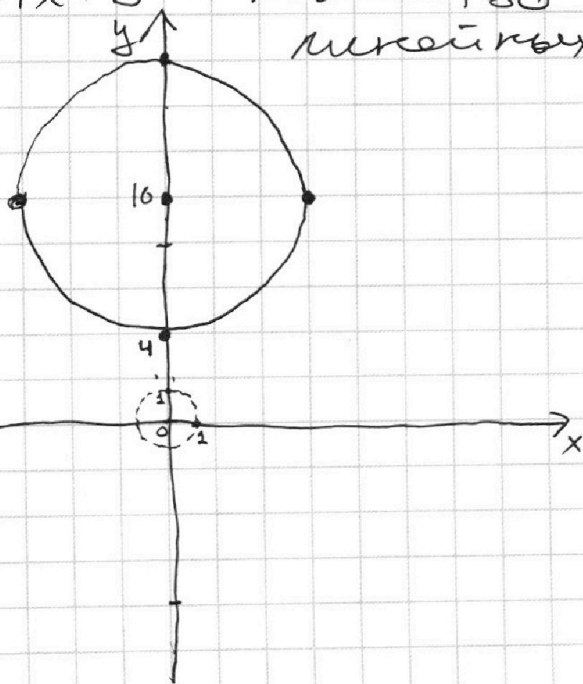
$$x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \Rightarrow \text{окружность } \omega_2 \text{ с центром в } O_2(0; 10) \text{ и радиусом } r_2 = \sqrt{6^2} = 6$$

③  $ax - 3y + 4b = 0$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \quad \text{Замена: } \frac{a}{3} = A, \frac{4}{3}b = B$$

$y = Ax + B$  — множество всех линейных функций.

3)



единичный  
отрезок = 0,5 клетки



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

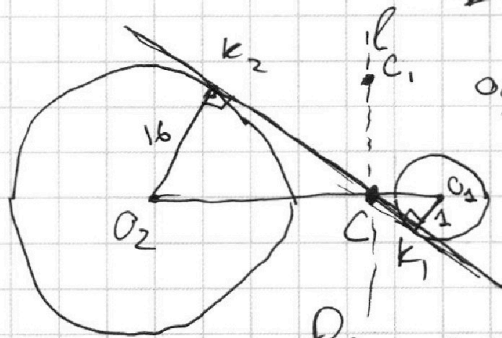
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 лист 2 решение  
 4) Найдём уравнение касательных к двум окружностям пересекающихся отрезок соединяющий центры.



Заметим, что это линейная функция, с одинаковым свободным членом и равными по модулю, но разными по знаку коэф. при x.

Рассмотрим одну такую касательную (см. чертёж). Назовём точки касания  $K_2$  и  $K_1$ , а  $O_1, O_2 \cap K_1, K_2 = C$

$\angle O_2CK_2 = \angle O_1CK_1$  (т.к. вертикальные)  
 $\angle O_2K_2C = \angle O_1K_1C = 90^\circ$  (как. функции между радиусом и точкой кас. и касат.)

$\Rightarrow \triangle O_2K_2C \sim \triangle O_1K_1C$  (по двум углам)

$\Rightarrow$  коэф подобия  $k = \frac{O_2K_2}{O_1K_1} = \frac{16}{10} = \frac{O_2C}{O_1C}$

Также  $O_2C + O_1C = O_2O_1 = 10$

$\Rightarrow O_2C = \frac{16}{17} \cdot 10$      $O_1C = \frac{10}{17}$

г.п.  $l \perp O_2O_1$  |  $\Rightarrow l \perp O_1O_2 \Rightarrow l \parallel O_1O_2$

$\Rightarrow$  ~~угол наклона~~ тангенс угла  $K_2CC_1$  есть коэф наклона одной из касательных

$\Rightarrow$  он равен  $\text{ctg} \angle O_2CK_2$  (т.к. эти углы в сумме дают  $\frac{\pi}{2}$ )

$\Rightarrow$  равен  $\frac{K_2C}{K_2O_2}$ . По т. Пифагора в  $\triangle O_2CK_2$

$$K_2C = \sqrt{\left(\frac{160}{17}\right)^2 + 16^2} = 16 \cdot \sqrt{\left(\frac{10}{17}\right)^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \quad \begin{array}{l} \text{№5 мест 2 решения} \\ \| b \neq 0, \cdot 3b \end{array}$$

$$3b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$3b^5 + 9b = -13 \quad \text{Аналогично пункту 1}$$

3)  ~~$a+b = \log_5 x + \log_5 y =$~~   
 $= \log_5 xy \Rightarrow xy = 5^{a+b}$   
 $\Rightarrow 1 \text{ корень по } b \Rightarrow 1 \text{ по } y$

4) Заметим, что  $f(a)$  — нечеткая функция:

$$f(a) = -3a^5 - 9a = -f(a).$$

$\Rightarrow$  если при  $a = A$  функция принимает значение  $13$ , то значение  $-13$  она принимает при  $a = -A$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = A \\ b = -A \end{cases} \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow xy = 5^0 = 1$$

угадывая единичность  $x$  и  $y$  других знат. нет.

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$  <sup>№5 имеет 1 решение</sup>

ОДЗ:  $\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 8x^3 > 0 \\ 8x^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

Замечка  $\log_5 2x = a$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a} - 3 \quad \| a=0 \text{ не корень} \Rightarrow \cdot 3a$$

$$3a^5 - 9a = 4 - 9a$$

$$3a^5 + 9a = 4 \quad \text{Введем } f(a) = 3a^5 + 9a$$

$$f'(a) = 15a^4 + 9$$

$$f'(a) > 0$$

↑  
всегда

$\Rightarrow$  слева монотонная функция справа константа

$\Rightarrow$  1 корень по  $a \Rightarrow$  1 корень по  $x$

(логарифм  
тоже монотонный)

2)  $\log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$

ОДЗ:  $\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \\ y^3 > 0 \\ y^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} - 3$$

Замечка  $\log_5 y = b$



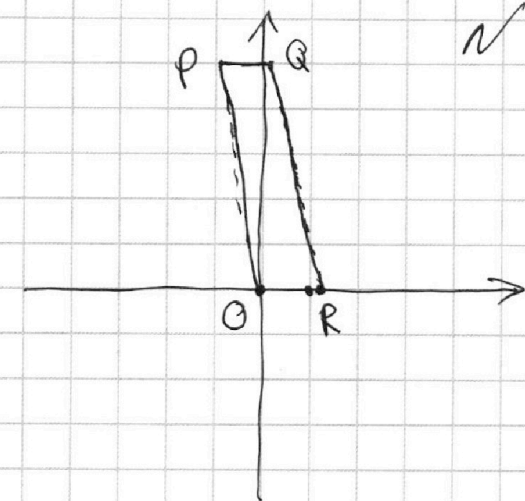
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6 мк 1 рсм

Если первую точку взять как  $O$ , то ПМТ точек удовлетворяющих условию задается ~~линейными~~ ~~прямыми~~  
 $-5x_1 - y_1 = 45$   
и  $5x_1 + y_1 = 45$

$$\Rightarrow y_1 = -5x + 45 \quad (1)$$
$$y_1 = 5x + 45 \quad (2)$$

Найдем точки пересеч.

~~и проузвх~~

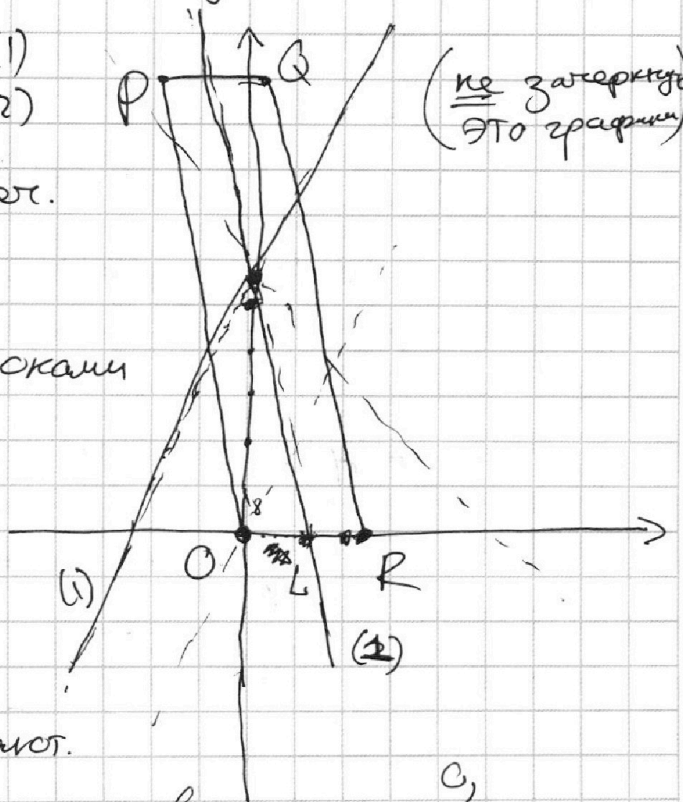
не со всеми сторонами будут пересеч.

(1)  $\parallel PO \parallel QR$

~~если~~

Все целые точки на (1) удовлетворяют.

$\Rightarrow$  точку  $O$  можно сдвинуть на  $\frac{1}{2}$  шагов влево и криво подходить. точек на этой прямой не изменится. Всего их на прямой ~~только~~ ~~то~~ 10 целых точек на отрезке  $OL$   $\Rightarrow$  10 целых точек.  
 $\Rightarrow$  100 точек за счет этой прямой.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

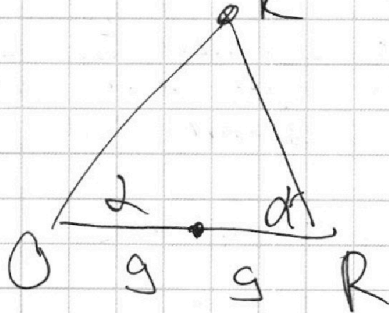


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$32 = 2^5$   
 $4 \cdot 4 \cdot 2 = 2^5 \Rightarrow 32^2 = 1024$   
 $2^3 = 8$   
 $219$   
 $1460$   
 $\hline 1679$

N 6

Второе уравнение дает  
еще несколько  
точек для каждого  
положения O  
(I всегда совпадает  
с уже посчитанным)



$\text{tg } \alpha = 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

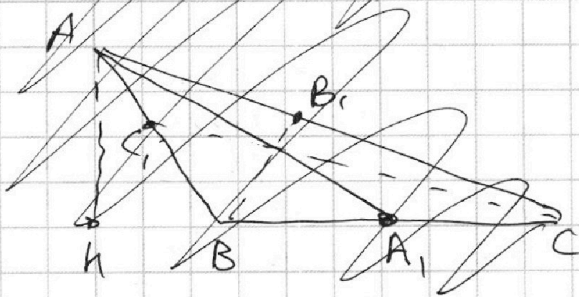
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 лист 4 решение

~~$\Rightarrow HA_1 > BA_1 \Rightarrow H \notin [BC]$~~

~~$\Rightarrow$  новый чертеж~~



Итак, по Т. Пифагора

$$AB = \sqrt{(A_1H - BA_1)^2 + AH^2}$$

$$AC = \sqrt{(A_1H + BA_1)^2 + AH^2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = \sqrt{((A_1H - BA_1)^2 + AH^2)((A_1H + BA_1)^2 + AH^2)}$$

$$= \sqrt{(A_1H - BA_1)^2 (A_1H + BA_1)^2 + (A_1H - BA_1)^2 AH^2 +$$

$$+ (A_1H + BA_1)^2 AH^2 + AH^4} =$$

$$= \sqrt{(A_1H^2 - BA_1^2)^2 + AH^2 (A_1H^2 - 2A_1H \cdot BA_1 + BA_1^2 +$$

$$+ A_1H^2 + 2A_1H \cdot BA_1 + BA_1^2) + AH^4} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{23 \cdot 73}{4} - 64\right)^2 + \frac{25^2}{4} (2 \cdot (A_1H^2 + BA_1^2)) + \frac{25^4}{2^4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1679 - 1024}{4}\right)^2 + \frac{625}{2} \cdot \left(\frac{1679}{4} + \frac{1024}{4}\right) + \frac{25^4}{2^4}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{655}{4}\right)^2 + \frac{625}{8} (2703) + \frac{25^4}{2^4}}$$

Обозначим ~~это~~ это число как  $m$

$$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin$$

не решил ~~#~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

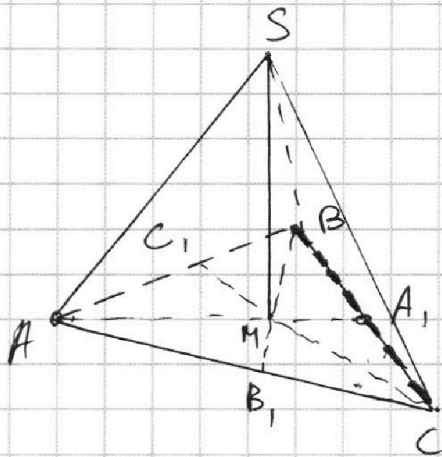
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 7 мст 1 реш



(~~Вершина~~ SM не обязательно перпендикулярна (ABC))

1) Назовем центр сферы O.

~~OB, OK - радиусы~~

~~⇒ (OLK) - осевое сеч. 1~~

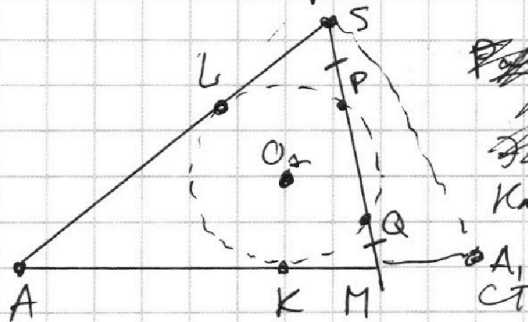
~~OP, OQ - радиусы~~

~~⇒ (OPQ) - осевое сеч. 2~~

~~P, Q ∈ SM ⇒~~

~~⇒ SM ⊂ (OPQ)~~

Рассмотрим сечение сферы плоскостью (SAM):



~~Радиус окружности в этом сечении равен R2~~

~~⇒ осевое сечение сферы~~

Назовем полуокружность окруж.

$\Omega_1$  с центром  $O_1$ .

степень M относительно  $\Omega_1$

~~⇒~~  $deg(M) = MQ \cdot MP = KM^2$

$deg(S) = SP \cdot SQ = SL^2$

$MQ = SP \Rightarrow deg(M) = MQ \cdot (MQ + PQ) =$

$= SP(SP + PQ) = SP \cdot SQ = deg(S)$

$\Rightarrow SL^2 = KM^2 \Rightarrow SL = KM$

$AL = AK$  (как отрезки касательных из одной точки к одной окружности)

$\Rightarrow AM = AK + KM = AL + LS = AS = 16$

2) По св-ву медиан в треугольнике ABC:

$AM = 2MA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} h_A \cdot BC = 100$

где  $h_A$  - длина высоты из вершины A

$\Rightarrow h_A = \frac{200}{16} = \frac{8 \cdot 25}{16} = \frac{25}{2}$  (высота  $AM$ )

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{7}$  имеет 3 решения

$$= \sqrt{24^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{48^2 - 25^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(48-25)(48+25)}}{2} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} = A_1H$$

~~$BH = \frac{BC}{2}$~~  г.п.  $MH_1 \perp BC$

~~$\triangle MA_1H_1 \sim \triangle A_1HA_1$~~ ;  $MA_1 = \frac{1}{3}AA_1$

$$\Rightarrow MH_1 = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{6}$$

$$S_{BMC} = MH_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{BM \cdot MC}{2} \cdot \sin \alpha$$

где  $\alpha = \angle BMC$

$$\Rightarrow MH_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3}BB_1 \cdot \frac{2}{3}CC_1}{2} \cdot \sin \alpha$$

~~Учитывая утверждение пункта 3  
решения получаем систему  
(обозначим  $BB_1$  за  $b$ ,  $CC_1$  за  $c$ )~~

~~$$\begin{cases} bc = \frac{3}{2} S_{ABC} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \\ MH_1 \cdot BC = \frac{4}{9} bc \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \\ \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{4}{9} bc \cdot \sin \alpha \end{cases}$$~~

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} bc = \frac{150}{\sin \alpha} \\ bc = \frac{16 \cdot 25 \cdot 9}{6 \cdot 4 \sin \alpha} = \frac{25 \cdot 3 \cdot 2}{\sin \alpha} \end{cases} \dots 0 \text{ и.}$$~~

5) В  $\triangle BKA$  по Т. Пифагора:

~~$$AB = \sqrt{BK^2 - KA^2} = \sqrt{(BA_1 - HA_1)^2 - KA^2} =$$

$$= \sqrt{\left(8 - \frac{23 \cdot 73}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \sqrt{(32^2 - 23 \cdot 73)^2 - 50^2} =$$~~

~~Первое слагаемое под корнем — отрицательное в квадрате~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

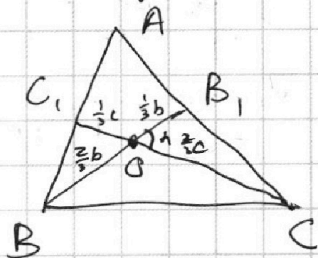
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) Рассмотрим некоторый  $\triangle ABC$

В данном пункте решение

(~~не~~ обозначения не соотносятся с обознач. задачи) в котором нам известны медианы  $b, c$  и ~~угол~~  $\alpha$  ~~между~~  $\alpha$  между ними.



Учитывая основное св-во медиан обозначим на чертеже отрезки. Тогда  $C_1B_1$  - средняя линия  $\Rightarrow \triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$  (как отрезки прямой паралл. осн)

с коэф. подобия  $\frac{1}{2}$

Тогда  $S_{\triangle B_1C_1A_1} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AC_1B_1} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$

Также  $S_{\triangle B_1C_1A_1} = S_{\triangle C_1OB_1} + S_{\triangle C_1OA_1} + S_{\triangle BOA_1} + S_{\triangle COA_1}$

$$= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} bc + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot bc + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} bc + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} bc \right)$$

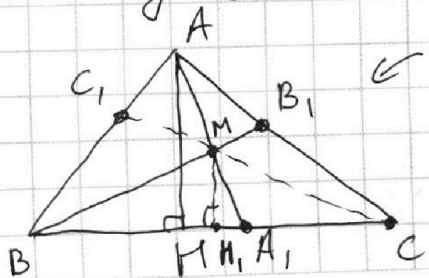
$$= \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot bc \cdot \left( \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot bc$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot bc$$

$$\Rightarrow bc = \frac{3}{2} S_{\triangle ABC} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

$\Rightarrow$  Произведение двух медиан <sup>треугольника</sup> равно  $\frac{3}{2}$  площади треугольника деленной на синус угла между этими медианами.

4)



← плоскость (ABC)

$\triangle KAA_1$  по Т. Пифагора:

$$KA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AK^2} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

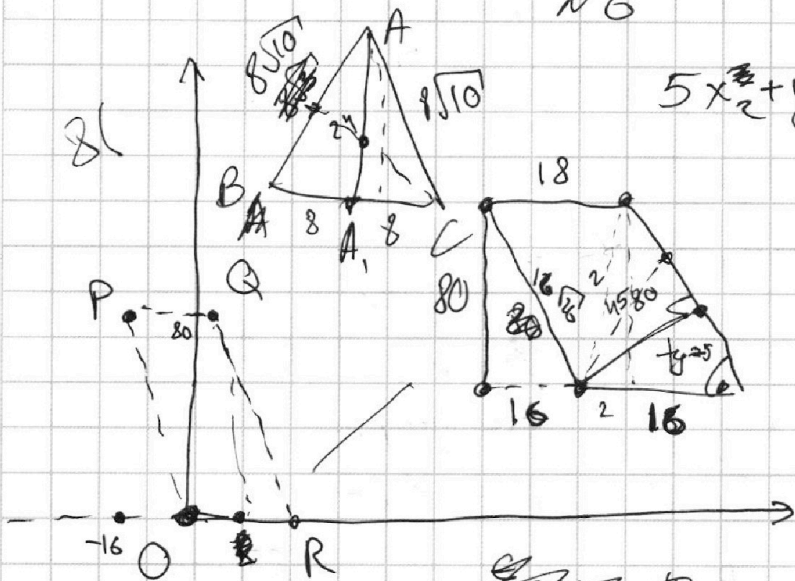
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6



$$5x_2^2 + y_2^2 - 5x_1^2 - y_1^2 = 45$$

$$\sqrt{80^2 + 16^2} = \frac{48}{4} = 12$$

$$= 16 \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} = 16 \sqrt{169} = 16 \cdot 13 = 208$$

$$16 \sqrt{26} \cdot x = 80 \cdot 18$$

$$\sqrt{26} x = 5 \cdot 18$$

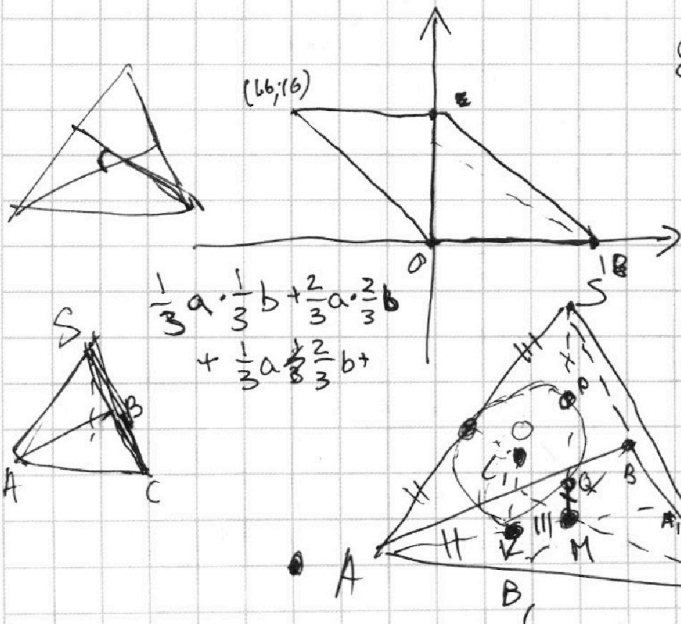
$$x = \frac{90}{\sqrt{26}}$$

Если

Как устроены пары точек, манхеттерское расстояние между которыми  $\leq 100$ .  
~~не превышает 45. строго равно 45~~

"Сожмем" нашу плоскость вдоль "оси Oy" в 3 раз.

Получим следующую фигуру:



Если сжимаем таким образом плоскость часть точек с целыми y становятся точками с дробными. и рассматриваем мы пары точек.

$$BC \cdot 2AD_1 \cdot \sin \angle BA_1 A = 100$$

$$\Rightarrow \text{выс к } BC = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$