



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

Пусть  $abc = 2^x 3^y 5^z t$  где  $x, y, z, t$  - натур.  
числа.  
 $t \not\equiv 2, t \not\equiv 3, t \not\equiv 5$ .

С одной стороны,  $abc: ab, bc, ac \Rightarrow abc$  делится на  
каждое из чисел  $2^6 3^{13} 5^{11}, 2^{14} 3^{21} 5^{13}, 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Откуда  $x \geq 16, y \geq 25, z \geq 28$ .

С другой стороны, перемножив делимости, получили

$$a^2 b^2 c^2: 2^{36} 3^{59} 5^{52} \quad \text{Откуда} \quad 2x \geq 36 \quad 2y \geq 59 \quad 2z \geq 52 \\ \Rightarrow x \geq 18 \quad y \geq 30 \quad z \geq 26$$

Объединяя ограничения, получили

$x \geq 18, y \geq 30, z \geq 28$ . Число  $t \geq 1$ , поэтому взяв наименьш.

$x, y, z, t$ , получили наименьшее  $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$ ,

которое достигается при

$$\begin{cases} a = 2^4 3^8 5^{15} \\ b = 2^2 3^5 \\ c = 2^{12} 3^{17} 5^{13} \end{cases}$$

Ответ:  $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

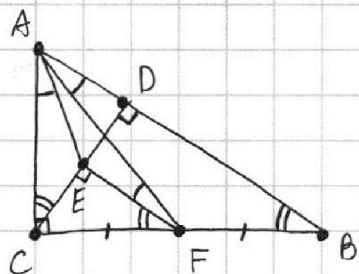
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Поймем, что  $\angle C$  - прямой и нарисуем тертёт. Из  $EF \parallel AB$  следует  $\angle ABC = \angle CFE$ . Высота  $CD$  к гипотенузе делит  $\triangle ABC$  на 2 подобных, поэтому  $\angle ACD = \angle ABC$  из  $AB \perp CD$  следует  $EF \perp CD$

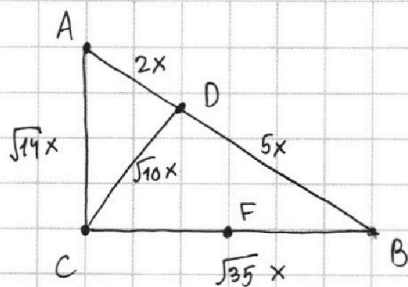
Откуда  $\triangle ACD$  и  $\triangle CEF$  подобны по 2-м углам, и ответ на задачу:  $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2$ .  $\angle CAE = \angle EFA$  т.к. оба опираются на одну дугу окр-сти  $AE$  ( $\angle EFA$  - вписанный,  $\angle CAE$  - угол между касательной и хордой).  $\angle EFA = \angle FAB$  из параллельности  $EF \parallel AB$

Из подобия  $\triangle CAE$  и  $\triangle AFB$  по двум углам следует  $\frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB}$

Из подобия  $\triangle ACD$  и  $\triangle ABC$  следует  $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$ . Перемножив

получим  $\frac{CE}{CD} = \frac{BF}{BC}$ . Но  $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC}$  из т. Фалеса (или подобия  $\triangle CEF$  и  $\triangle CDB$ )

Значит  $BF = CF$  т.е.  $F$  - середина  $BC$ .



Пусть  $AD = 2x$ . Из  $\frac{AB}{BD} = \frac{4}{5}$

следует  $\frac{AD+BD}{BD} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow BD = 5x$

Из подобия  $\triangle ACD$  и  $\triangle BCD$ :  $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$

$\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD = 10x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{10}x$

Из т. Пифагора  $AC = \sqrt{14}x$   $BC = \sqrt{35}x$ . Из  $BF = FC$  следует

$CF = BF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{\frac{35}{4}}x$ . Отсюда  $\left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{AC^2}{CF^2} = \frac{14x^2}{(35/4) \cdot x^2} = \frac{56}{35} = \frac{8}{5}$

Ответ:  $8:5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{cases}$$

ПЕРЕМНОЖИМ  
ВЕЛИЧИНОСТИ

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{36} 3^{59} 5^{52}$$

ГДЕ  $x, y, z, t$  - НАТУРАЛЬНЫЕ  
если  $abc = 2^x 3^y 5^z t$ , то необходимо, чтобы выполнялось

$$\begin{cases} 2x \geq 36 \\ 2y \geq 59 \\ 2z \geq 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 18 \\ y \geq 30 \\ z \geq 26 \end{cases}$$

Беря наименьшие  $x, y, z, t$  получаем  
наименьшее  $abc$

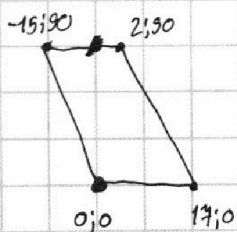
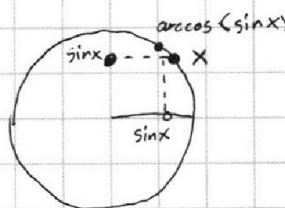
$$abc = 2^{18} 3^{30} 5^{26} \quad abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 3^8 5^{15} \\ b &= 2^2 3^5 \\ c &= 2^{12} 3^{17} 5^{13} \end{aligned}$$

$$\log_{11} x = a \quad \log_{11} y = b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} =$$

$$\begin{cases} 5x + 6a y = b \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{то } \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

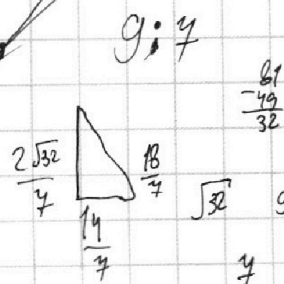
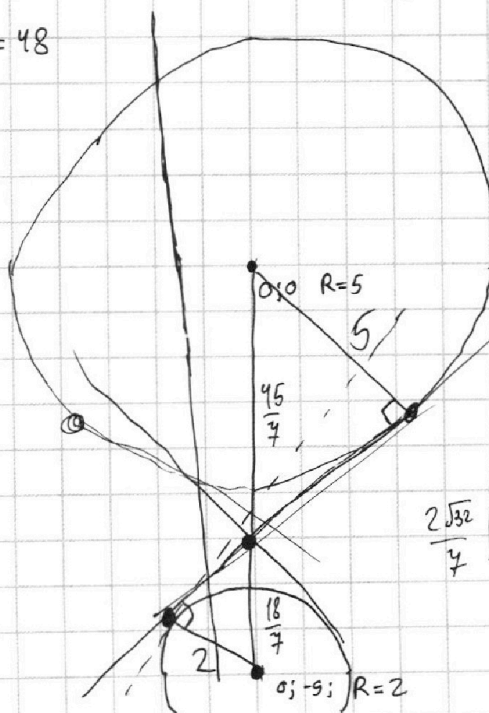


$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6\Delta x + \Delta y = 48$$

$$\Delta y : 6$$

$\Delta x$	$\Delta y$	
17	-9	
0	48	
-1	54	
-2	60	
-3	66	
-4	72	
-5	78	
-6	84	
-7	90	



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:


1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $x \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$  (т.е. лежит на правой полуокр.-сти  
трим. окр.-сти).

Тогда  $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)$  

и уравнение принимает вид

$$10\left(\frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 20\pi n - 4\pi$$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2}\pi n - \frac{1}{2}\pi$ . С учётом принадлежности отрезку

$$2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi n - \frac{1}{2}\pi \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi n \leq \frac{5}{2}\pi n \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2n \leq \frac{5}{2}n \leq 2n + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}n \geq 0 \\ \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}n \end{cases} \Rightarrow 0 \leq n \leq 1 \quad \begin{array}{l} \text{т.е. есть} \\ \text{решения} \\ -\frac{\pi}{2}; 2\pi \end{array}$$

Если же  $x \in [2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}]$ , то

$$\arccos(\sin x) = (x - 2\pi n) - \frac{\pi}{2} \quad \text{и}$$

$$10\left(x - 2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10x - 20\pi n - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi + 20\pi n$$

$\Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n$ . С учётом принадлежности отрезку:

$$2\pi n + \frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \leq 2\pi n + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 12\pi n + 3\pi \leq 7\pi + 10\pi n \leq 12\pi n + 9\pi$$

$$\Rightarrow 12n + 3 \leq 10n + 7 \leq 12n + 9 \Rightarrow \begin{cases} 2n \leq 4 \\ 2n \geq -2 \end{cases} \Rightarrow n = -1, 0, 1, 2$$

Это даёт решения  $-\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$ .

В объединении получаем 5 решений:  $-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$ .

Ответ:  $-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

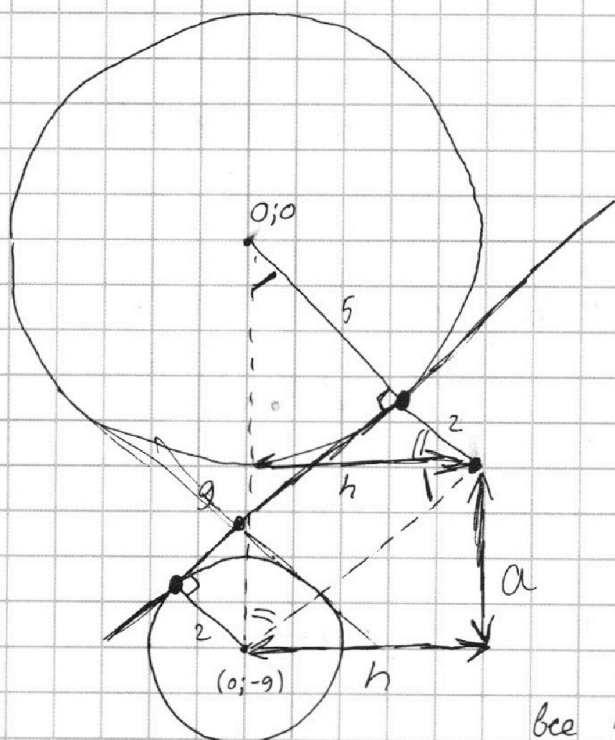
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Нарисуем на графике  $x, y$  все решения  $(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0$

Равносильно  $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{cases}$ , то есть это 2 окружности.

Одна имеет центр  $0;0$  и радиус 5. Другая имеет центр  $(0;-9)$  и радиус 2. Найдем уравнения внутренних касательных.



$$9^2 - 7^2 = 81 - 49 = 32 \rightarrow 4\sqrt{2}$$

$$h = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{9} = \frac{28\sqrt{2}}{9}$$

$$a = \frac{28\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9}{4} = 4\sqrt{2}$$

Получаем, что одна касательная имеет вид

$$y = \frac{9}{4}x + b, \text{ а другая}$$

$$y = -\frac{9}{4}x + b \text{ (симметрия.)}$$

$5x + 6ay - b$  - прямая. При фикс.  $a$  все прямые будут параллельны.

Проведем одну из них через точку пересечения внут. касательных.

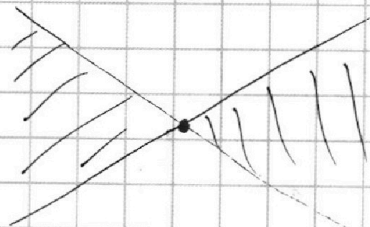
Если прямая проходит через внутр. область, то она не может пересечь обе окр-сти в 2-х точках (при любом параллельном сдвиге) иначе может.

при  $a=0$  прямая вертикальная. ✓

иначе делим на  $6a$ :  $y = -\frac{5}{6a}x + b'$  где  $b' = b/6a$  принимает любое знач.

Необходимо  $\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{9}{4} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \text{ и } -35 < 54a \\ a > 0 \text{ и } -35 > -54a \end{cases}$

Ответ:  $-\frac{35}{54} < a < \frac{35}{54}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если обозначить  $\log_{11} x = a$   $\log_{11} (0,54) = b$

То первое равенство переписывается как

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \Rightarrow a^4 + 5 = \frac{18}{3a} - \frac{2}{3a} \Rightarrow a^4 + 5 = \frac{16}{3a}$$

поскольку  $a \neq 0$ , домножим на  $3a$ :  $3a^5 + 15a = 16$

Второе равенство переписывается как

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \Rightarrow b^4 + 5 = -\frac{1}{b} - \frac{13}{3b} \Rightarrow b^4 + 5 = -\frac{16}{3b}$$

поскольку  $b \neq 0$ , домножим на  $3b$ :  $3b^5 + 15b = -16$

Пусть  $f(x) = 3x^5 + 15x$ .  $f(x)$  монотонно и неограниченно

растёт, поэтому  $f(x) = c$  имеет ровно 1 решение

при любом значении  $c$ . Значит  $\begin{cases} 3a^5 + 15a = 16 \\ 3b^5 + 15b = -16 \end{cases}$

обладает единственным решением  $(a, b)$ . Обозначим

его за  $(a_1, b_1)$  т.е.  $f(a_1) = 16$ ,  $f(b_1) = -16$ .

Кроме того,  $f(x)$  нечётна, поэтому  $f(a_1) = 16 \Rightarrow f(-a_1) =$

$= -16$ . Отсюда  $-a_1 = b_1$  ввиду единственности решения

$f(x) = c$ . Итак,  $-a_1 = b_1 \Rightarrow a_1 + b_1 = 0$  т.е.  $a + b$  может быть

равно только 0. Значит  $\log_{11} x + \log_{11} 0,54 = 0 = \log_{11} 0,5x4$

Откуда  $0,5x4 = 1 \Rightarrow xy = 2$

Ответ: 2

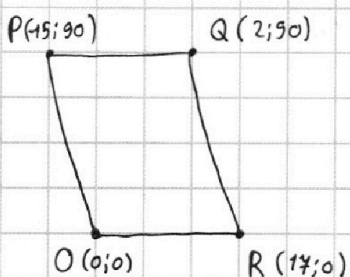
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Параллелограмм образуется прямыми  
вида  $y = b$  и  $y = -6x + b$ .

Лемма: если точка  $M = (x, y)$  лежит  
внутри параллелограмма и  $0 \leq y - 6x \leq 90$ ,  
то точка  $N(x+k, y-6k)$  тоже лежит  
в нём. Док-во: прямая MN имеет вид  
 $y = -6x + b$  и не может пересечь (пройти сквозь)

боковые стороны. По ограниченности на  $y - 6x$  прямая MN не  
может пройти сквозь горизонтальные стороны. Значит MN  
внутри параллелограмма.

$0 \leq y_1 \leq 90$   
Закфиксируем  $y_1$  и посчитаем, сколько <sup>ПАР</sup> точек (A, B) подходит.

Пусть  $A_1 = (x_1; y_1)$ . Тогда подходящие точки B имеют  
вид  $(x_1 + 8 + k; y_1 - 6k)$ , остается проверить, что обе точки лежат  
внутри.

$x_1 \geq -\frac{y_1}{6}$  т.к. иначе A лежит левее прямой PO. Если  
точка  $B_1 = (x_1 + 8; y_1)$  лежит правее QR (т.е. вне параллелогра-  
ма), то по лемме ни одна <sup>ПОДХОДЯЩАЯ</sup> точка B не внутри, а тоже снаружи.

Значит нужно одновременное  $-\frac{y_1}{6} \leq x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{6} \Rightarrow 0 \leq x_1 + \frac{y_1}{6} \leq 9$

Если  $y_1 \div 6$ , то есть 10 значений  $x_1$ , иначе их 9. Далее, из леммы подходящей точке B достаточно  $0 \leq y_1 - 6k \leq 90$   
 $\Rightarrow 0 \leq \frac{y_1}{6} - k \leq 15$ . Если  $y_1 \div 6$ , то есть 16 значений  $k$ , иначе  
их 15. По  $x_1$  и  $k$  восстанавливается пара (A; B). Итак,  
если

$y_1 \div 6$ , то есть 10 · 16 пар (A; B), иначе есть  
 $9 \cdot 15 = 135$  пар (A; B).

Среди  $0 \leq y_1 \leq 90$  есть 16 значений  $y_1$ , кратных 6, и  
75 не кратных. Значит всего подходящих пар

$$16 \cdot 160 + 75 \cdot 135 = 2560 + 10125 = 12685$$

Ответ: 12685 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

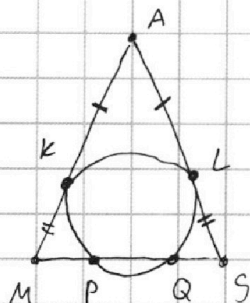
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на сечение сферы плоскостью  $AMS$ .



Сфера касается  $AS$  и  $ABC$ , поэтому  
окр-сть касается  $AM$  и  $AS$ , откуда  $AK = AL$

Из  $SP = MQ$  следует  $SQ = MP$ , поэтому

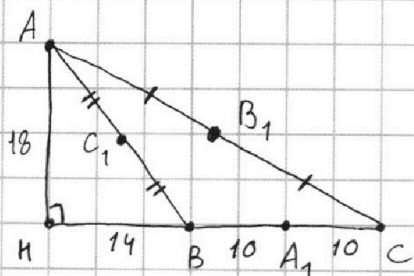
$$MK^2 = MP \cdot MQ = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL.$$

Отсюда  $AM = AS = 20 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$ .

Посмотрим на основание  $ABC$ . Высота  $AH$  равна  
 $180 \cdot 2 : 20 = 18$  (по формуле  $S = \frac{ah}{2} \rightarrow h = 2S/a$ )

По т. Пифагора  $A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2 \Rightarrow A_1H = 24$ .

Зная, что  $BA_1 = A_1C = BC/2 = 10$ , нарисуем зёртём.



Проекция  $C_1$  и  $B_1$  на прямую  $BC$   
падают в середине  $BH$  и  $CH$   
соответственно.

$$\text{Отсюда } BB_1^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$$

$$CC_1^2 = 24^2 + 9^2 = 3^2 \cdot (9^2 + 3^2) = 9 \cdot 90 = 810$$

$$\text{Отсюда } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot \sqrt{90} \cdot 3\sqrt{90} = 90^2 = 8100$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



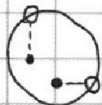
$$x \in [2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$



$$x \in [2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$$



$$x \in [2\pi n + \pi; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow$$



$$x \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$



$$x \in [2\pi n + \pi - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$$

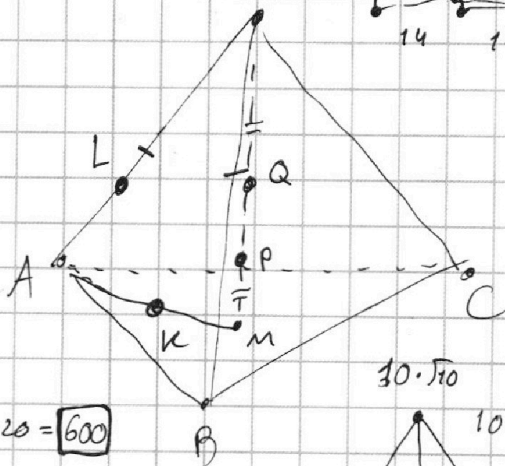
$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

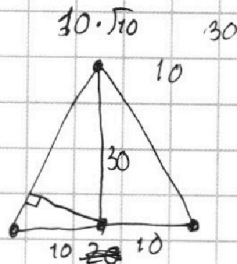
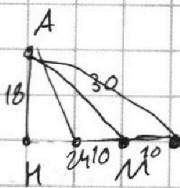
10(x -

Пункт а)

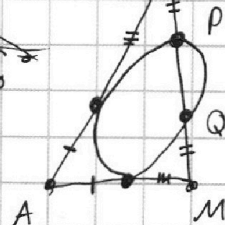
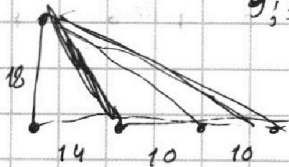
№7



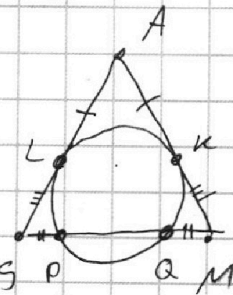
$$30 \cdot 20 = \boxed{600}$$



27, 9 S



AM=20!



20 = SA = BC = AM  
 BC = 20  
 AA' = 30 180

$$\frac{30}{\sqrt{10}} = \boxed{3 \cdot \sqrt{10}} \quad 6 \cdot \sqrt{10}!$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

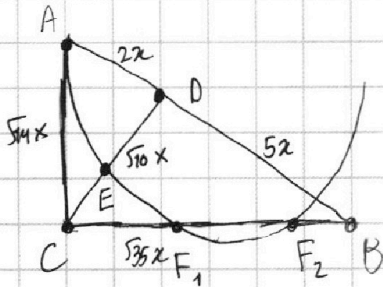


$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

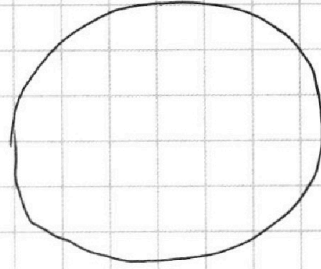
$$3^4 + 2^5 = 5^9$$

$$2^{11} 2^8 = 5^2$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} 3^{59} 5^{52} \Rightarrow abc : 2^{18} 3^{30} 5^{26}$$



$$\frac{AB}{BD} = \frac{4}{5}$$



$$10 \arccos(\sin x) = 9\sqrt{12}x$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 10 (\pi - \arcsin x) = 9\sqrt{12} - 2x$$

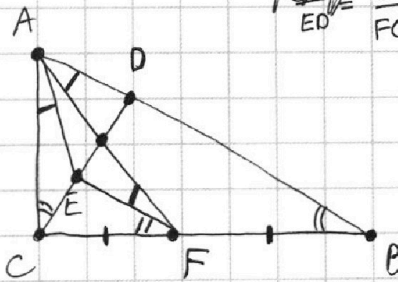
$$\pi = \sqrt{12} \sin x - 2x$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow F \text{ сеп.}$$

$$a = 2^4 3^8 5^5$$

$$b = 2^2 3^5 5^{15}$$

$$c = 2^{12} 3^{14} 5^{15}$$



$$S_{ADC} = S_{CEF} = a$$

$$\log_{11} x = a$$

$$\log_{11} x^3 = 3a$$

$$\log_{x^3} 11 = \frac{1}{3a}$$

$$\log_{x^3} \frac{1}{121} = -\frac{2}{3a}$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$$

$$a^4 = \frac{18-2}{3a} - 5$$

$$a^4 = \frac{16}{3a} - 5 \quad a \neq 0$$

$$3a^5 = 16 - 15a$$

$$3a^5 + 15a = 16$$

$$xy = 2$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$$

$$a+b=0$$

$$\Rightarrow x/y$$

$$\log_{11} 0,5^x = 0$$

$$\log_{11} b$$

$$f(a_1) = 16 \Rightarrow f(-a_1) = -16$$

$$\log_{11} 0,5^4 = b$$

$$f(b_1) = -16$$

$$\log_{0,5^4} 11 = \frac{1}{b}$$

$$\log_{11} 0,125^3 = 3b$$

$$b_1 = -a_1$$

$$\log_{0,125^3} 11 = \frac{1}{3b}$$

$$\log_{0,125^3} (11^{-13}) = -\frac{13}{3b}$$

$$b^4 + \frac{13}{3b} + \frac{3}{3b} + 5 = 0$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0$$

$$3b^5 + 15b = -16$$

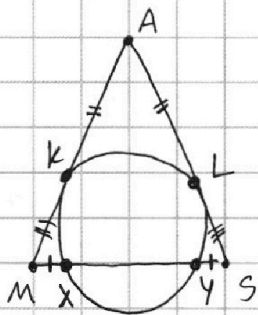
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть точки  $M, P, Q, S$  идут на отрезке  $MS$  в порядке  $M, X, Y, S$ , то есть  $\begin{cases} P=X \\ Q=Y \end{cases}$  или  $\begin{cases} P=Y \\ Q=X \end{cases}$

Из  $SP = MQ$  можно получить  $SY = MX$  в любом из двух случаев.

Поскольку  $\Omega$  касается  $AS$  и  $ABC$ , то сечение  $\Omega$  плоскостью  $AMS$  будет касаться  $AM$  и  $AS$ . Сечение - окр-ства. Из-за касания  $AK = AL$ . Далее

$$MK^2 = MX \cdot MY = SY \cdot SX = SL^2, \text{ поэтому } MK = SL. \text{ Отсюда } AM = AS = 20.$$

Посмотрим теперь на  $\triangle ABC$ .  $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$ ,  $BC = 20$ .



Высота  $AH$  в  $\triangle ABC$  из формулы  $S = \frac{ah}{2}$

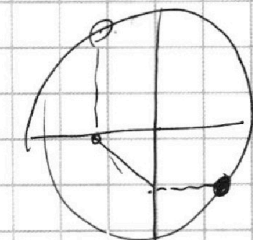
должна быть равна  $180 \cdot 2 : 20 = 18$

$$\text{Из т. Пифагора } AH^2 = AA_1^2 - A_1H^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2$$

Зная, что  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ,

$$x \in \left[ \frac{7\pi}{6}; \frac{10\pi}{6} \right]$$

$$x \in \left[ 2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n)$$



$$16 \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x \right) = 9\pi - 2x \Rightarrow 5\pi + 20\pi n - 10x = 9\pi - 2x$$

$$4 + 5 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6$$

$$8x = 20\pi n - 4\pi$$

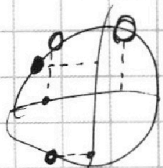
$$9 \quad 9 \quad 10 \quad 6$$

$$x = \frac{5}{2}\pi n - \frac{\pi}{2}$$

$$18$$

$$34 \rightarrow (26)$$

$$x \in \left[ 2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right]$$



$$2\pi n - \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi n \leq \frac{5}{2}\pi n \leq 2\pi n + \pi \quad \frac{\pi n}{2} \leq \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

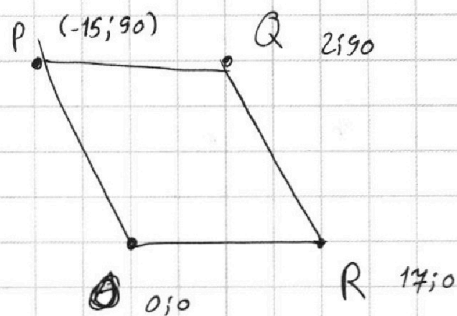
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6\Delta x + \Delta y = 48, \quad \Delta x = 8 \Rightarrow \Delta y = 0 \quad M = (x; y) \quad N = (x+k; y-6k)$$



$$A = (x_1; y_1) \quad B_1 = (x_1 + 8; y_1)$$

$$x_1 \geq -\frac{y_1}{6} \quad x_1 + 8 \leq -\frac{y_1}{6} + 14$$

$$-\frac{y_1}{6} \leq x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{6}$$

$$0 \leq x_1 + \frac{y_1}{6} \leq 9 \quad \begin{array}{l} \text{если } y_1 \neq 6, \text{ то} \\ \text{то } x_1 \quad \text{иначе} \\ 9 x_1 \end{array}$$

$$A = (x_1; y_1) \quad B = (x_1 + 8 + k; y_1 - 6k)$$

$$0 \leq y_1 - 6k \leq 90$$

$$0 \leq y_1 \leq 90 \quad y_1 \neq 6 \Rightarrow 16 \text{ ВАР}$$

$$16 \cdot 10 \cdot 16 + 45 \cdot 9 = 15$$

$$2^9 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$2^9 \cdot 5 + 3^4 \cdot 5^3$$

$$5 \cdot (2^9 + 3^4 \cdot 5^2) \quad 5 \cdot (512 + 2025) \quad 15 \text{ РЕШ}$$

$$16 \cdot 160 = 2560$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ 45 \\ \hline 875 \\ 945 \\ \hline 10125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 10125 \\ + 2560 \\ \hline 12685 \end{array}$$

$$0 \leq \frac{y_1}{6} - k \leq 15 \quad \begin{array}{l} \text{если } y_1 \neq 6, \text{ то} \\ 16 \text{ РЕШ} \\ \text{иначе} \end{array}$$

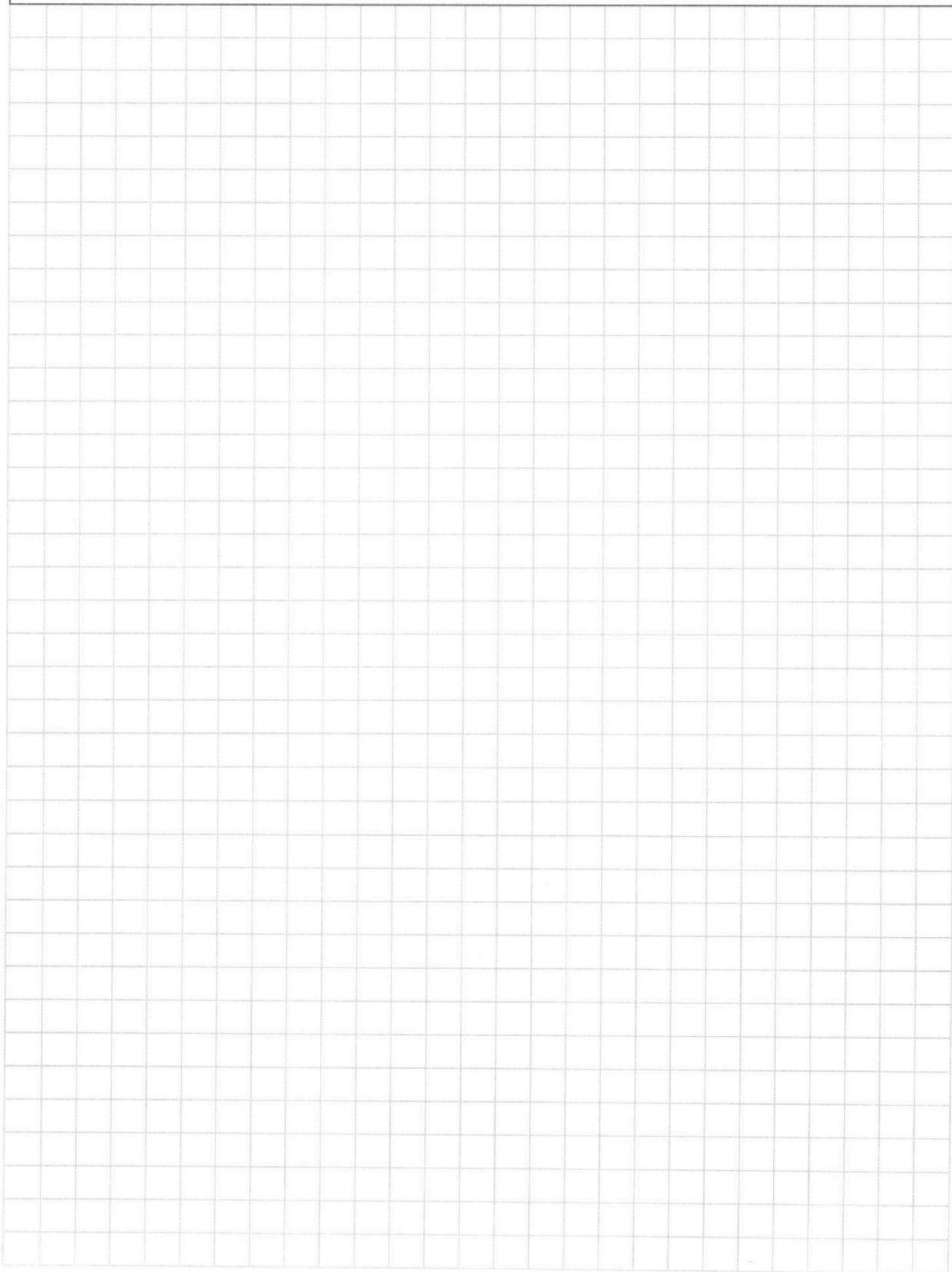


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

