



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\begin{cases} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \Rightarrow abc = a^2 b^2 c^2 : 2^{23+17+15} \cdot 7^{39+18+18}$$
$$abc: 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к. степень двойки нечетная, то

$$abc: 7^{34} \cdot 2^{28} \quad \text{или} \quad abc: 7^{34} \cdot 2^{28}$$

~~Ответ: $7^{34} \cdot 2^{28}$~~ ~~или~~ ~~по условию~~

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{38}$$

тогда подходит пример: $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$, $b = 2^5$, $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \Rightarrow 9ab : m \text{ и } a+b : m$$

$m = 9$ возможно, например при $a = 1; b = 8$

$m > 9$ не может быть так как

~~произведение и сумма взаимно простых чисел~~

~~взаимно просты~~ НОД произведения и

суммы ~~простых~~ взаимно простых чисел равен 1.

Ответ: ~~$m = 9$, ab : любым делителем a и b~~

ab : любым делителем a и b

$a+b$: ~~любым~~ делителем a и b

Ответ: $m = 9$.

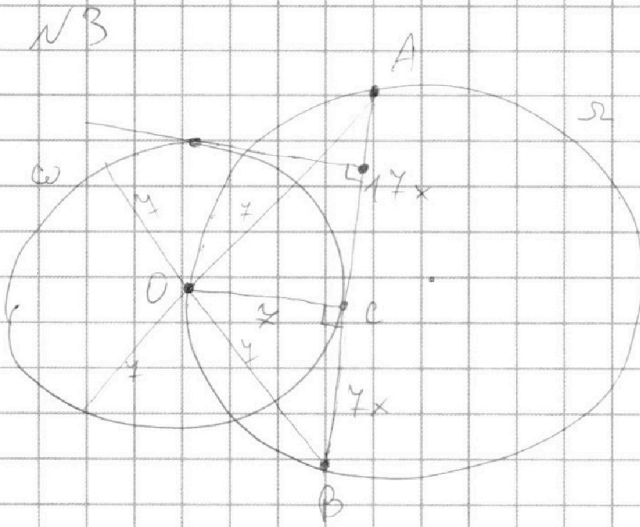
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \text{или} \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3(x-1)^2 - 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} \leq 1 \Rightarrow x \in [1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}]$$

$$\sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases} \quad \text{— нет решений системы}$$

Подставим $x = \frac{1}{9}$:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{34}{27}} - \sqrt{\frac{34}{27}} = 0$$

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

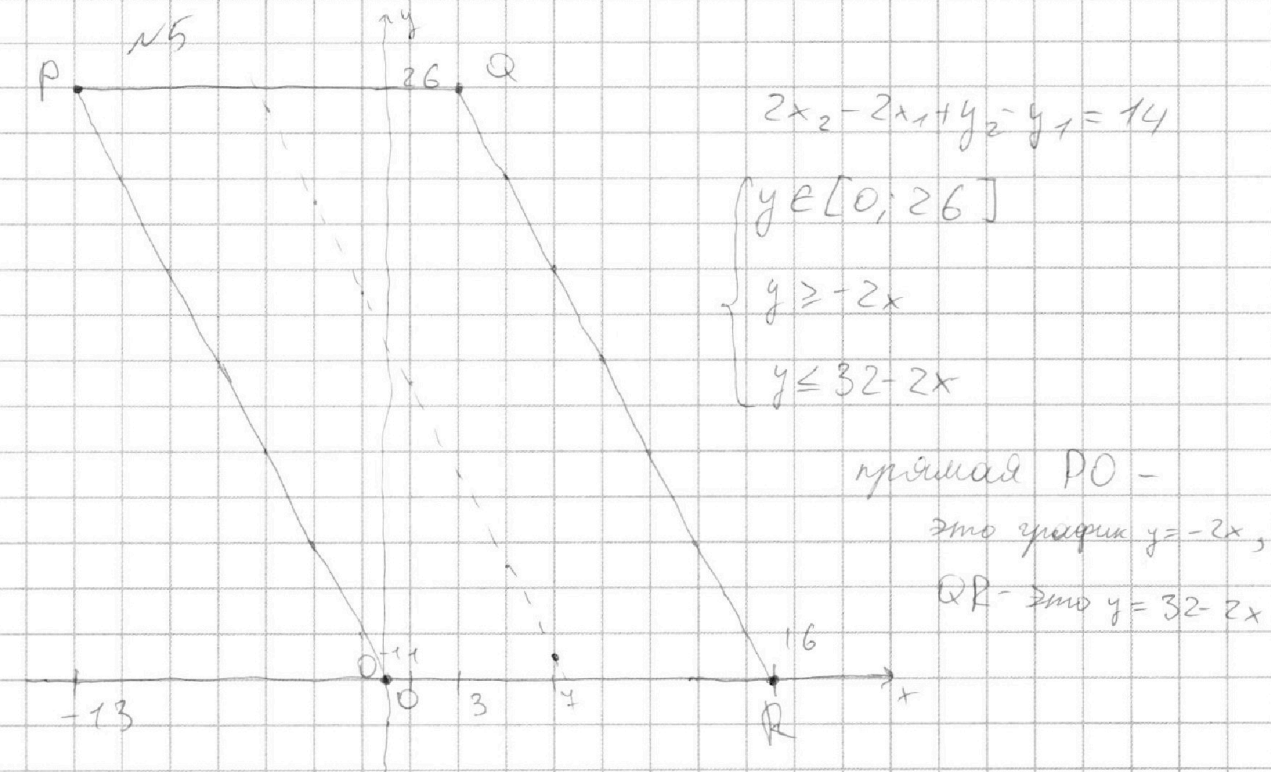
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\begin{cases} y_2 \in [0; 26] \\ y_2 \geq -2x_1 \\ y_2 \leq 32 - 2x_1 \end{cases}$$

прямая PQ -

это график $y = -2x$,

QR - это $y = 32 - 2x$

$$2x_2 + y_2 \in [0; 32] ; -2x_1 - y_1 \in [-32; 0]$$

т.к. подставив максимальный y_2 :

$$2x_2 + (32 - 2x_2) = 32, \text{ максимальный } y_2:$$

$$2x_2 + (-2x_2) = 0 \neq$$

$$\Rightarrow 2x_2 + y_2 \geq 14$$

т.к. $-2x_1 - y_1 \leq 0$ пусть $2x_2 + y_2 = k_2$,

$$2x_1 + y_1 = k_1 \text{ тогда } k_2 - k_1 = 14$$

$$y_2 = k_2 - 2x_2 ; y_1 = k_1 - 2x_1, \text{ если } k_2 \geq k_1$$

если $k_2 \geq k_1$ то в параллелограмме будет 14

точек $B(x_2, y_2)$, если $k_1 > k_2$, то 12 точек $B(x_2, y_2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Для точек $A(x_1, y_1)$ аналогично.

$$K_2 \in [14; 32]; \Rightarrow \text{~~не в [18; 30]~~} \Rightarrow K_2 \in [0; 18]$$

$K_2 - K_1 = 14$ есть 10 случаев когда $K_2 \neq K_1 : 2$
и 9 случаев когда $K_2, K_1 \neq 2$

Получаем ~~уравнение~~ выражение:

$$10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 12 \cdot 12 = 1960 + 1296 = 3256$$

Ответ: ~~≠~~ 3256.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

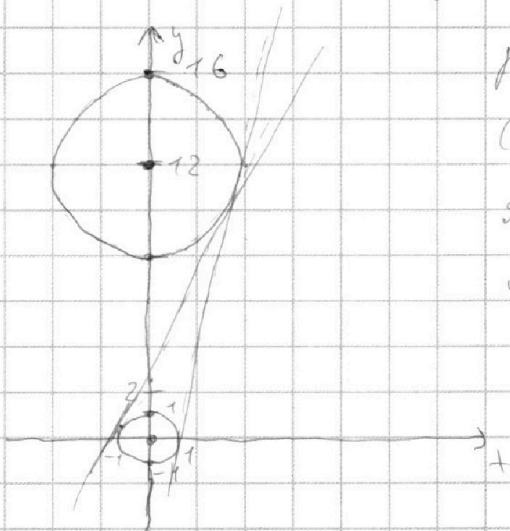
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



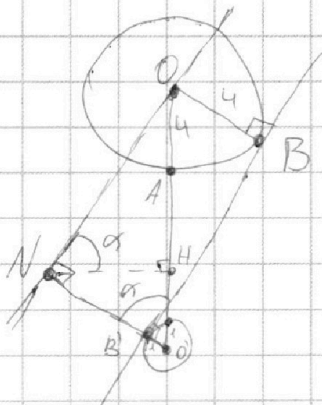
решением уравнения:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

являются точки лежащие на одной из окружностей или внутри одной из окружностей.

$ax + y - 86 = 0$ это график прямой \Rightarrow

$\Rightarrow y = 86 - ax$ - это касательная к обеим окружностям, тогда у системы будет ровно два решения.



$$OO' = 12 \quad ON \parallel BB' \Rightarrow OB = NB = 4$$

$$OB = OA = 4 \quad OB' = 1$$

$\triangle ONO'$ - прямоугольный \Rightarrow

$$\Rightarrow ON = \sqrt{OO'^2 - NO'^2} = \sqrt{12^2 - (4+1)^2} = \sqrt{119}$$

$ON \parallel BB' \Rightarrow$ тангенс угла наклона BB'

на графике равен $\angle ONH$, $\angle NO'O = 90^\circ - \angle NO'O' = \angle ONH$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ON}{NO'} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

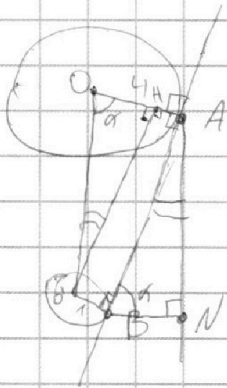
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6



$$OA = 4 \quad AN \parallel OO'$$

$$OB = 1 \quad \angle ANB = 90^\circ$$

$$OH = 4 - 1 = 3 \text{ т.к. } ABO'H - \text{прямоугольник}$$

$$(\angle O'HA = \angle BAN = \angle ABO' = 90^\circ)$$

$$OO' = 12 \Rightarrow OH = \sqrt{12^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$\text{т.к. } OO' \parallel AN \text{ и } OH \parallel AB \Rightarrow \angle BAN = \angle OOH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOO' = \angle ABN = \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OH}{OH} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad \text{имеет р-во}$$

$$\text{при } \alpha = \pm \frac{4\sqrt{10}}{3}; \alpha = \pm \frac{\sqrt{118}}{5} \text{ существуют } b,$$

при которых система имеет ровно два решения

$$\text{Ответ: } \alpha = \pm \frac{4\sqrt{10}}{3}, \alpha = \pm \frac{\sqrt{118}}{5}$$



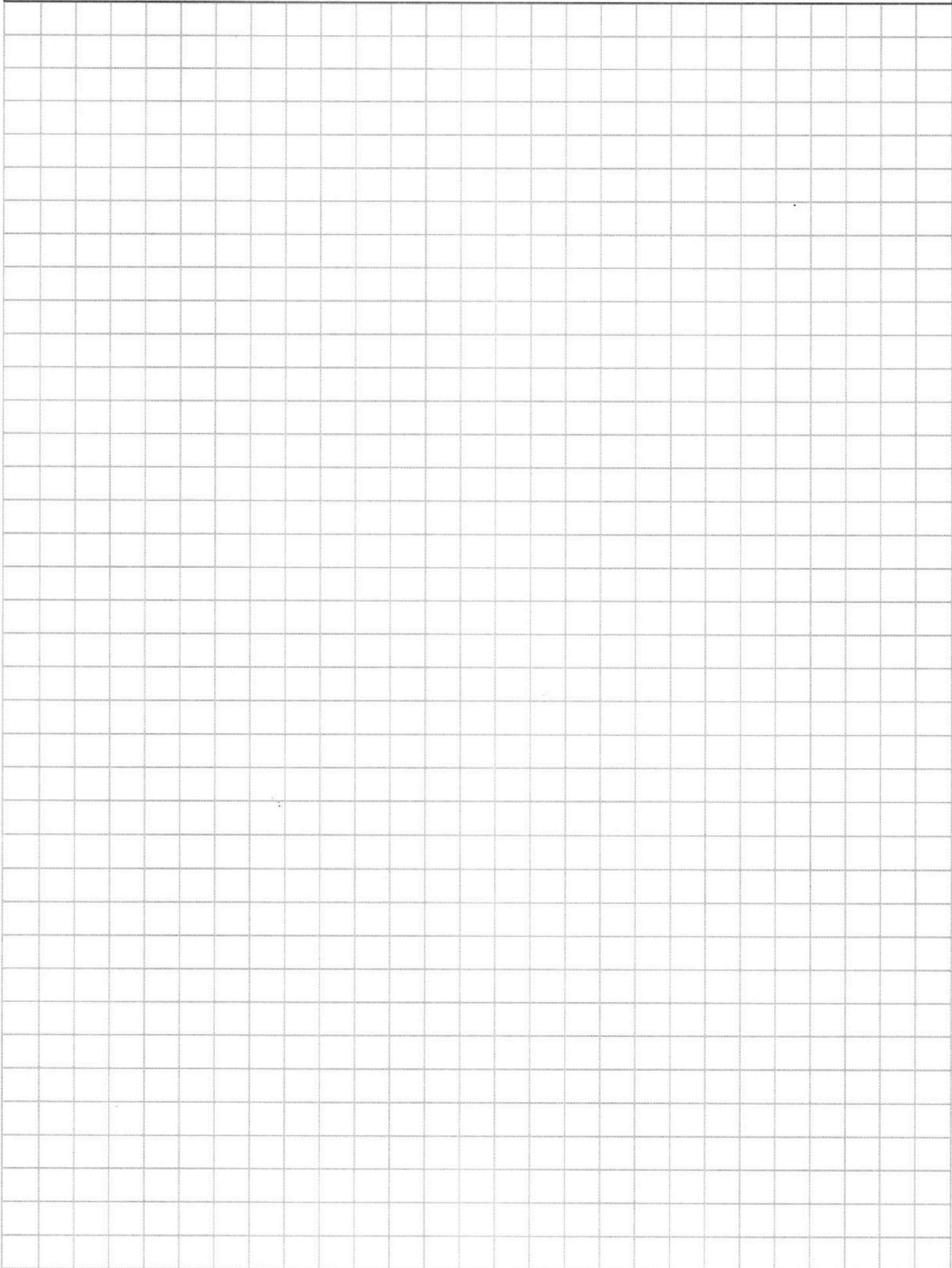
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

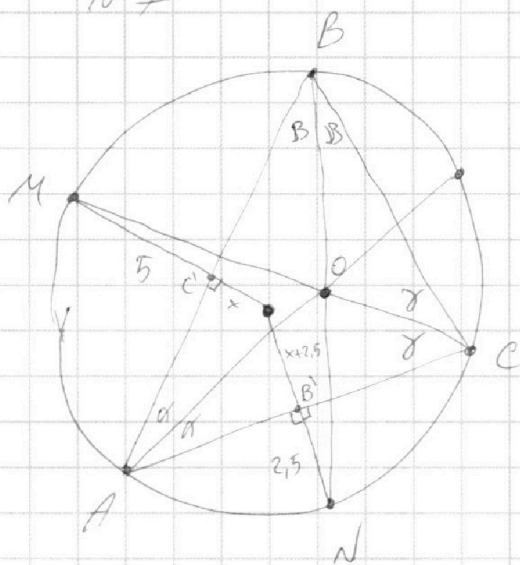
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



O - центр вписанной окружности

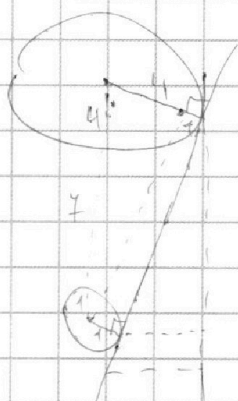
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$13^2 - 3^2 = \sqrt{160}^2 = (4\sqrt{10})^2$$

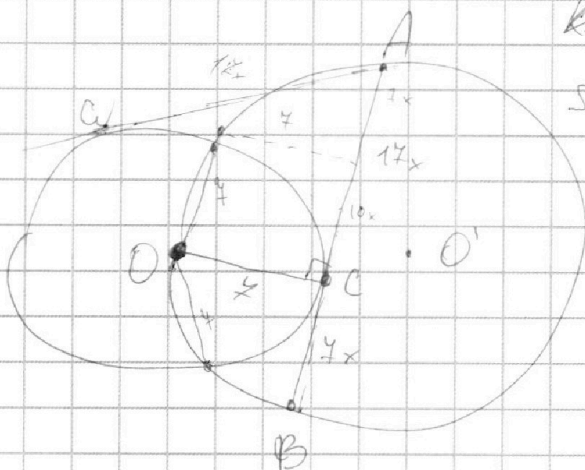
$$\operatorname{tg} = \pm \frac{4}{3}\sqrt{10}$$

$$y_2 = k_2 - 2x_2$$

$$k_2 - k_1 = 14$$

$$y_1 = k_1 - 2x_1$$

~~Крестиком~~



Ω

$$R_{\Omega} = 13$$

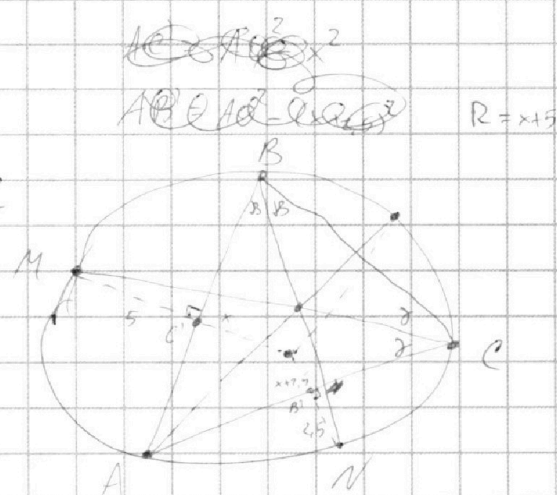
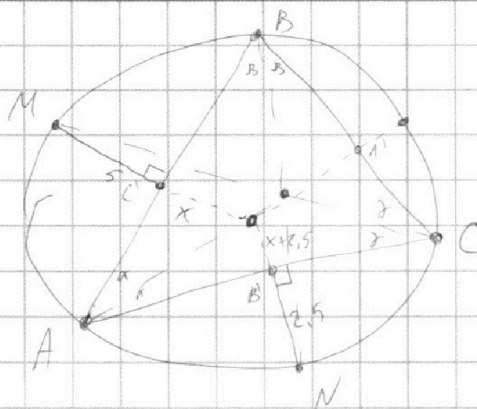
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2} : m$

$k_{max} = ?$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$9ab : a+b$

$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$-6x + 2 = 3x + 1$

$x = \frac{1}{9}$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$

$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$

$(x-1) \geq \frac{1}{3}$

$x - 1 \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$x \in (\frac{2-\sqrt{3}}{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{3})$

$-1 \leq x \leq 10$

$x \in [1 - \frac{\sqrt{2}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}]$

~~$(3a+\frac{1}{3})(3b+\frac{1}{3}) = 1$~~
 ~~$9ab + a + b + \frac{1}{9} = 1$~~
 ~~$9ab + a + b = \frac{8}{9}$~~

$\frac{3x}{2x}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

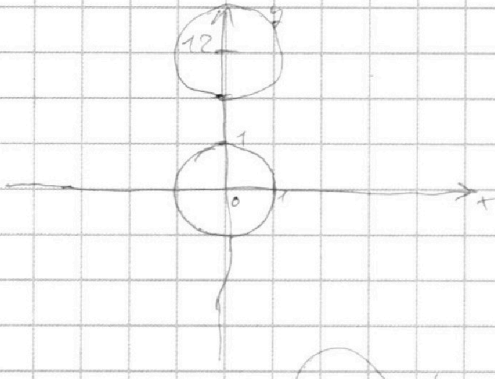
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

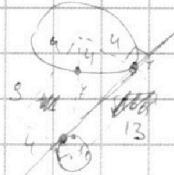


$$\begin{cases} x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



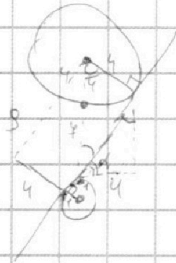
$$y = 86 - ax$$

~~Решение~~
~~черновик~~



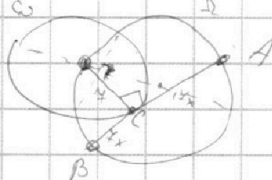
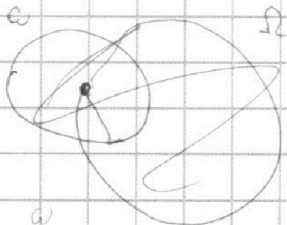
$$12 - 5 = \sqrt{16}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ y = 86 - ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (86 - ax)^2 - 16 = 0 \\ y = 86 - ax \end{cases}$$



$$\lg a = \frac{13}{5} \Rightarrow a = 2,6 \text{ или } a = -2,6$$

$$y = 86 + 2,6x$$



x-?

$$14y - 4x^2 = (4 - x)(18 + 4y)$$

$$14y = -12y + 18 \cdot 4$$

$$y = \frac{18 \cdot 4}{26} = \frac{133}{26} \approx 5,115$$

$$\lg a = 2 \Rightarrow a = 100$$

$$14 \cdot 14 = 196$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ + 196 \\ \hline 392 \\ \hline 588 \\ \hline 784 \end{array}$$

z

$$A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y \in [0; 26] \quad x \in [-13; 16]$$



$$\begin{cases} z \geq -2x \\ y \leq 32 - 2x \\ z \in [0; 26] \end{cases}$$

$$2x_2 + y_2 \in [0; 32]$$

$$-2x_1 - y_1 \in [-32; 0]$$

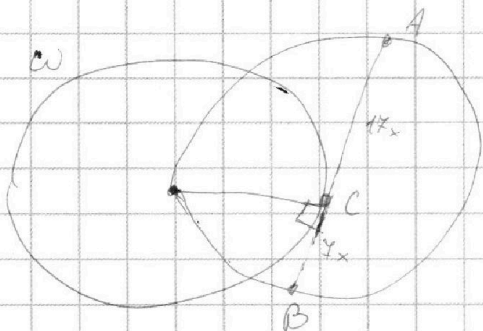
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$
 $\begin{cases} ab: 2 \cdot 4^{15} \cdot 11 \\ bc: 2 \cdot 4^{17} \cdot 7 \\ ac: 2^{23} \cdot 4^{35} \end{cases}$
 $a^2 b^2 c^2: 2^{55} \cdot 4^{68}$
 $abc: 4 \cdot 2^{28}$
 $a = 2 \cdot 4^{11}$
 $b = 2 \cdot 4^0$
 $c = 2^{13} \cdot 4^{28}$
 $\text{см. 2} \rightarrow c > a > b$

$\frac{a}{b}, (a, b) = 1, a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \Rightarrow 8ab = a+b$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3(x-\frac{1}{2})^2 - 1} - \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 3x + 1 = t \quad 1 - 9x = p$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + (1 - 9x) - (1 - 9x) = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$\sqrt{p} - \sqrt{t} = p - t$$

$$p - t = p^2 - t^2$$

$$(p - t)(p + t - 1) = 0$$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1)(3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 1) = 0$$

$$(1 - 9x)(6x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$9(\frac{1}{9} - x)(6(x - \frac{1}{6})^2 + \frac{5}{8}) = 0$$