



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\begin{cases} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \Rightarrow abc = a^2 b^2 c^2 : 2^{23+17+15} \cdot 7^{39+18+18}$$
$$abc: 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к. степень двойки нечетная, то

$$abc: 7^{34} \cdot 2^{28} \quad \text{или} \quad abc: 7^{34} \cdot 2^{28}$$

~~Ответ:  $7^{34} \cdot 2^{28}$~~  ~~или~~ ~~по условию~~

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{38}$$

тогда подойдет пример:  $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$ ,  $b = 2^5$ ,  $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

$\forall a, b \in \mathbb{N}$   $\frac{a}{b}$  - несократима  $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \Rightarrow 9ab : m \text{ и } a+b : m$$

$m = 9$  возможно, например при  $a = 1; b = 8$

$m > 9$  не может быть так как

~~произведение и сумма взаимно простых чисел~~

~~взаимно просты~~ НОД произведения и

суммы ~~простых~~ взаимно простых чисел равен 1.

~~Ответ:  $m = 9$ ,  $ab$  : любым делителем  $a$  и  $b$~~

$ab$  : любым делителем  $a$  и  $b$

$a+b$  : ~~любым~~ делителем  $a$  и  $b$

Ответ:  $m = 9$ .

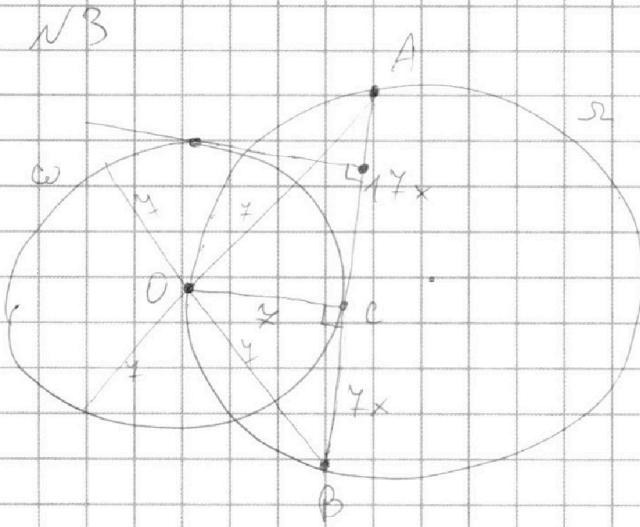
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \text{или} \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3(x-1)^2 - 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} \leq 1 \Rightarrow x \in [1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}]$$

$$\sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases} \quad \text{— нет решений системы}$$

Подставим  $x = \frac{1}{9}$ :

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{34}{27}} - \sqrt{\frac{34}{27}} = 0$$

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$ .

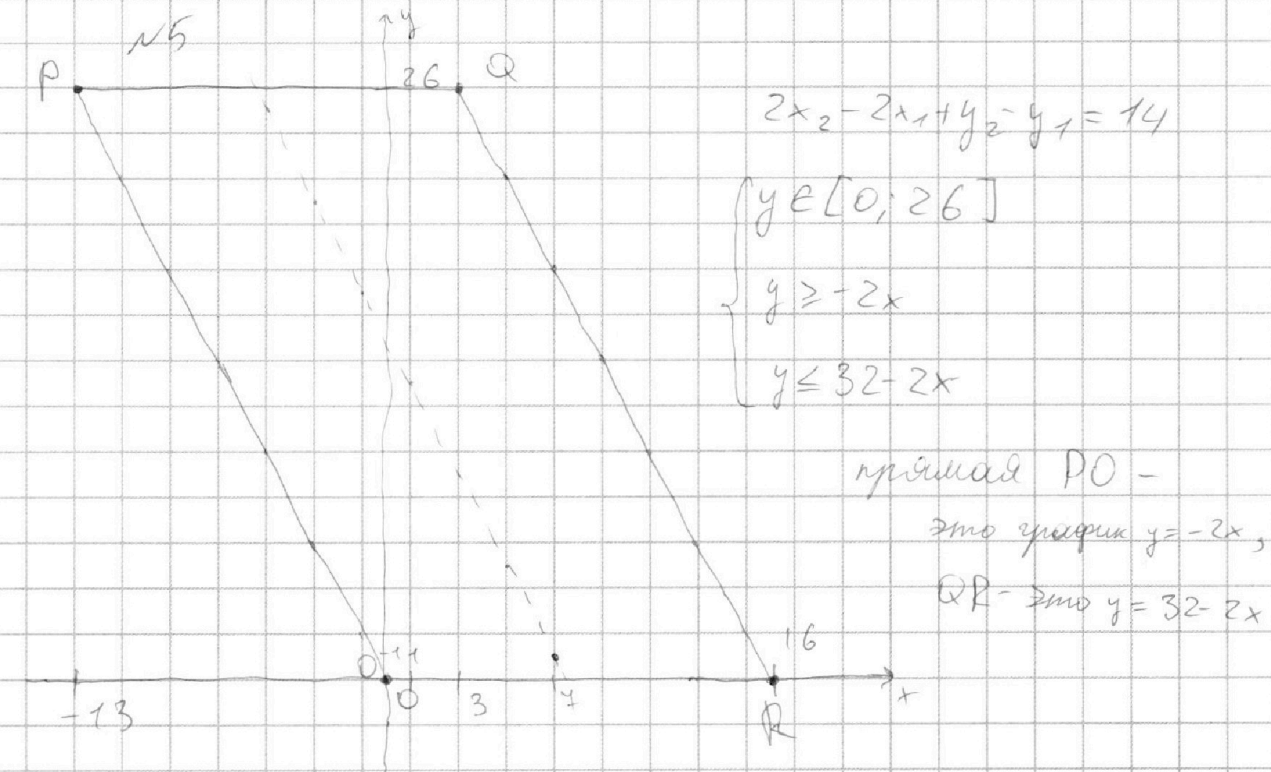
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\begin{cases} y_2 \in [0; 26] \\ y_2 \geq -2x_1 \\ y_2 \leq 32 - 2x_1 \end{cases}$$

прямая PQ -

это график  $y = -2x$ ,

QR - это  $y = 32 - 2x$

$$2x_2 + y_2 \in [0; 32] ; -2x_1 - y_1 \in [-32; 0]$$

т.к. подставив максимальный  $y_2$ :

$$2x_2 + (32 - 2x_2) = 32, \text{ максимальный } y_2:$$

$$2x_2 + (-2x_2) = 0 \neq$$

$$\Rightarrow 2x_2 + y_2 \geq 14$$

т.к.  $-2x_1 - y_1 \leq 0$  пусть  $2x_2 + y_2 = k_2$ ,

$$2x_1 + y_1 = k_1 \text{ тогда } k_2 - k_1 = 14$$

$$y_2 = k_2 - 2x_2 ; y_1 = k_1 - 2x_1, \text{ если } k_2 \geq$$

если  $k_2 \geq 2$  то в параллелограмме будет 14

точек  $B(x_2, y_2)$ , если  $k_2 < 2$ , то 12 точек  $B(x_2, y_2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1    2    3    4    5    6    7  
                 

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Для точек  $A(x_1, y_1)$  аналогично.

$$K_2 \in [14; 32]; \Rightarrow \text{~~не в [18; 30]~~} \Rightarrow K_2 \in [0; 18]$$

$K_2 - K_1 = 14$  есть 10 случаев когда  $K_2 \neq K_1 : 2$   
и 9 случаев когда  $K_2, K_1 \neq 2$

Получаем ~~выражение~~ выражение:

$$10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 12 \cdot 12 = 1960 + 1296 = 3256$$

Ответ: ~~не~~ 3256.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

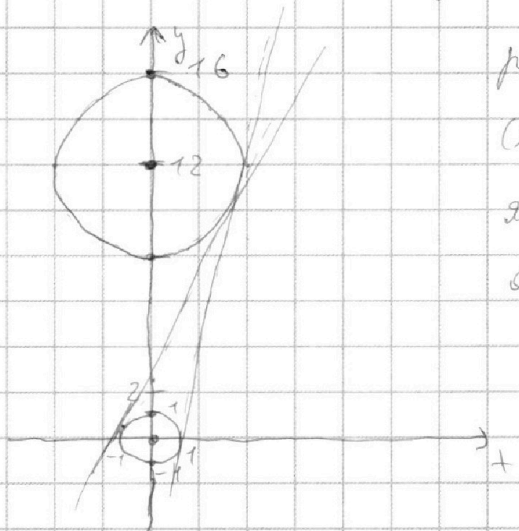


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



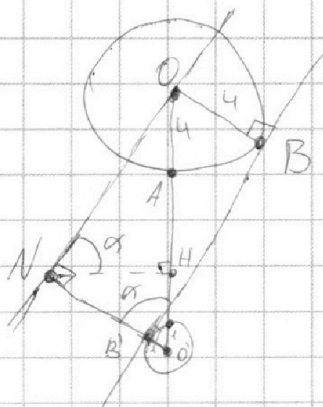
решением уравнения:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

являются точки лежащие на одной из окружностей или внутри одной из окружностей.

$ax + y - 86 = 0$  это график прямой  $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = 86 - ax$  - это касательная к обеим окружностям, тогда у системы будет ровно два решения.



$$OO' = 12 \quad ON \parallel BB' \Rightarrow OB = NB = 4$$

$$OB = OA = 4 \quad O'B = 1$$

$\triangle ONO'$  - прямоугольный  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow ON = \sqrt{OO'^2 - NO'^2} = \sqrt{12^2 - (4+1)^2} = \sqrt{119}$$

$ON \parallel BB' \Rightarrow$  тангенс угла наклона  $BB'$

на графике равен  $\angle ONH$ ,  $\angle NO'O = 90^\circ - \angle NO'O' = \angle ONH$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ON}{NO'} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

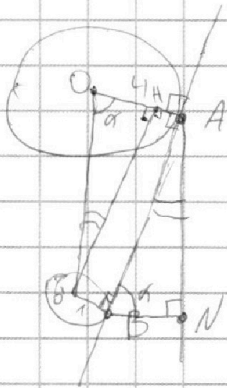
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6



$$OA = 4 \quad AN \parallel OO'$$

$$O'B = 1 \quad \angle ANB = 90^\circ$$

$$OH = 4 - 1 = 3 \text{ т.к. } ABO'H - \text{прямоугольник}$$

$$(\angle O'HA = \angle BAN = \angle ABO' = 90^\circ)$$

$$OO' = 12 \Rightarrow O'H = \sqrt{12^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$\text{т.к. } OO' \parallel AN \text{ и } O'H \parallel AB \Rightarrow \angle BAN = \angle O'O'H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOO' = \angle ABN = \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O'H}{OH} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad \text{имеет р-во}$$

при  $\alpha = \pm \frac{4\sqrt{10}}{3}$ ;  $\alpha = \pm \frac{\sqrt{118}}{5}$  существуют  $b$ ,

при которых система имеет ровно два решения

Ответ:  $\alpha = \pm \frac{4\sqrt{10}}{3}$ ,  $\alpha = \pm \frac{\sqrt{118}}{5}$



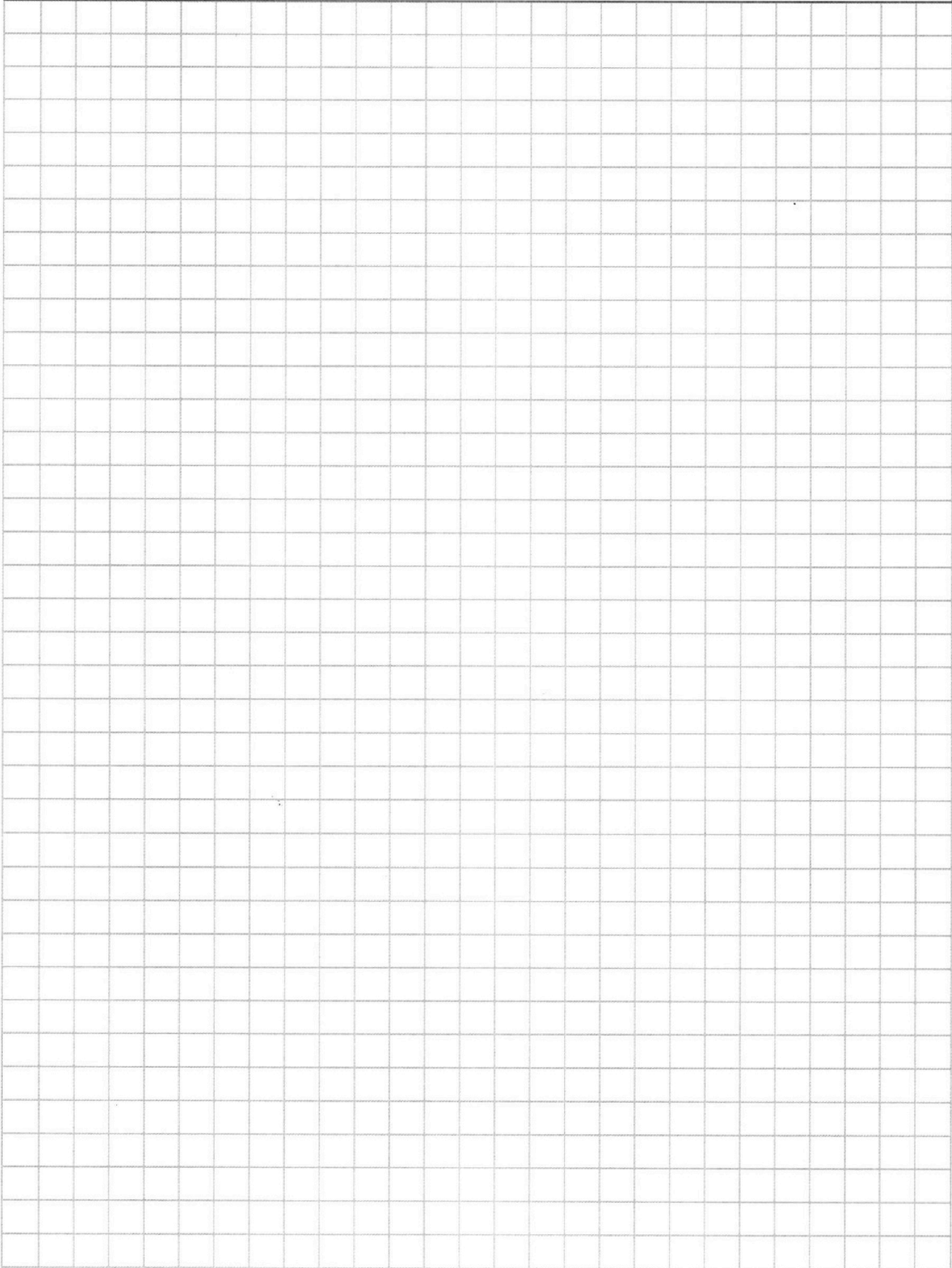
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

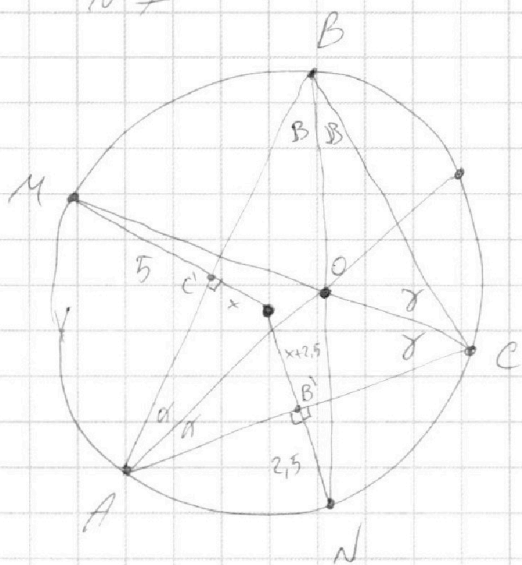
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



O - центр вписанной окружности

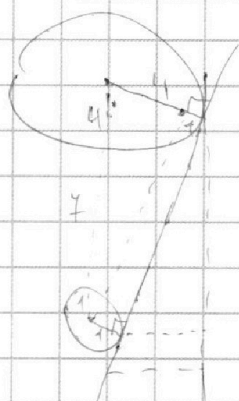
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$13^2 - 3^2 = \sqrt{160}^2 = (4\sqrt{10})^2$$

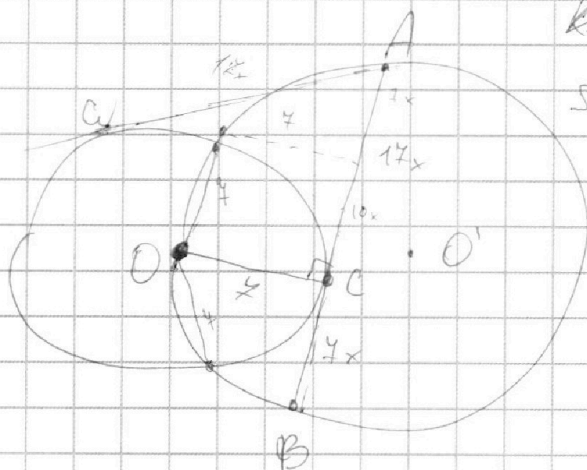
$$\operatorname{tg} = \pm \frac{4}{3}\sqrt{10}$$

$$y_2 = k_2 - 2x_2$$

$$k_2 - k_1 = 14$$

$$y_1 = k_1 - 2x_1$$

~~Криволинейная~~



$\Omega$

$$R_{\Omega} = 13$$

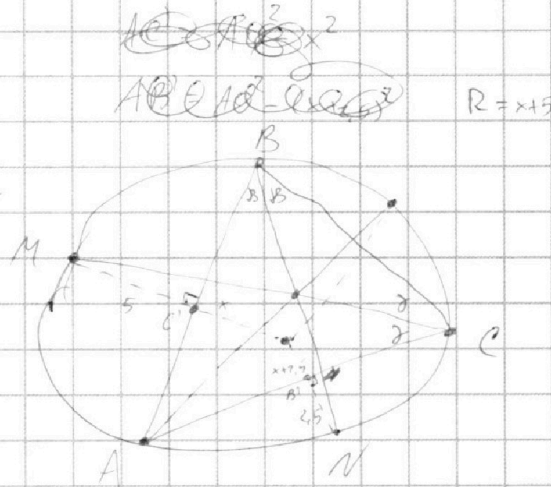
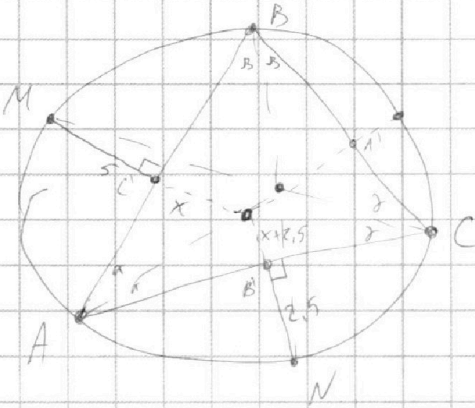
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2} : m$

$k_{max} ?$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$9ab : a+b$

$(\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}$

$-6x+2 = 3x+1$

$x = \frac{1}{9}$

$(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$

$\sqrt{3(x-1)^2-1} + \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} = 1$

$(x-1) \geq \frac{1}{3}$

$x-1 \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

$x \in (\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3})$

$-1 \leq x \leq 10$

$x \in [1-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1+\frac{\sqrt{2}}{3}]$

~~$(3a+2)(3b+2) = 1$~~   
 ~~$3a+2 = \frac{1}{3b+2}$~~   
 ~~$3a+2 = \frac{1}{3b+2}$~~

$\frac{3x}{2x}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

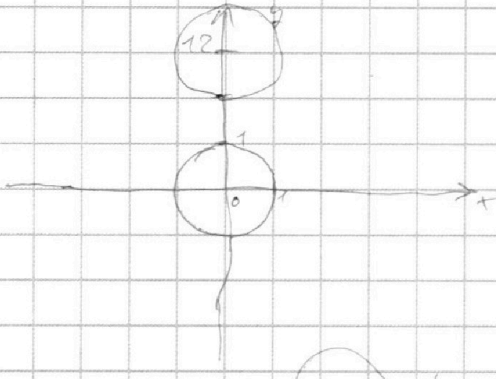
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

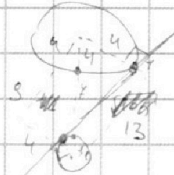


$$\begin{cases} x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



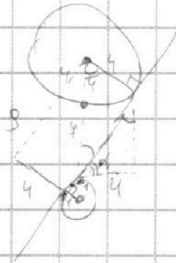
$$y = 86 - ax$$

~~Решение~~  
~~черновик~~



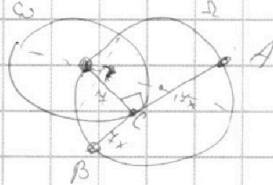
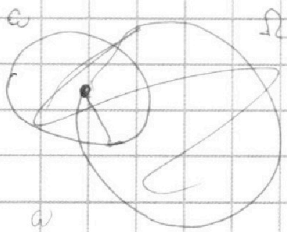
$$12 - 4 = \sqrt{16}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ y = 86 - ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (86 - ax)^2 - 16 = 0 \\ y = 86 - ax \end{cases}$$



$$\lg a = \frac{13}{5} \Rightarrow a = 2,6 \text{ или } a = -2,6$$

$$y = 86 + 2,6x$$



x-?

$$14y - 4x^2 = (4 - x)(18 + 4y)$$

$$14y = -12y + 18 \cdot 4$$

$$y = \frac{18 \cdot 4}{26} = \frac{133}{26} \approx 5,115$$

$$\lg a = 2 \Rightarrow a = 100$$

$$14 \cdot 14 = 196$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ + 196 \\ \hline 392 \\ \hline 588 \\ \hline 784 \end{array}$$

z

$$A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y \in [0; 26] \quad x \in [-13; 16]$$



$$\begin{cases} z \geq -2x \\ y \leq 32 - 2x \\ z \in [0; 26] \end{cases}$$

$$2x_2 + y_2 \in [0; 32]$$

$$-2x_1 - y_1 \in [-32; 0]$$

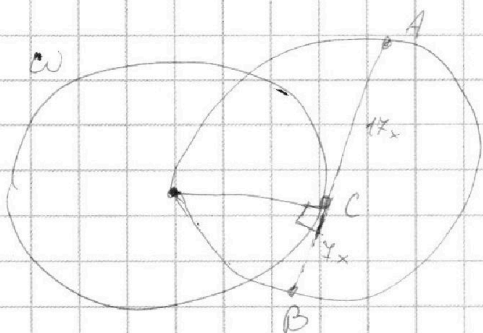
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab: 2^5 \cdot 4^{11} \\ bc: 2^7 \cdot 4^{18} \\ ac: 2^{23} \cdot 4^{38} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 b^2 c^2: 2^{55} \cdot 4^{68} \\ abc: 2^8 \cdot 4^{28} \end{cases}$$

$\text{см. 2} \rightarrow c > a > b$

$$\begin{cases} a = 2^{10} \cdot 4^{11} \\ b = 2^5 \cdot 4^0 \\ c = 2^{18} \cdot 4^{28} \end{cases}$$

$\frac{a}{b}, (a, b) = 1, a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \Rightarrow 8ab = a+b$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3(x-\frac{1}{2})^2 - 1} - \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 3x + 1 = t \quad 1 - 9x = p$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + (1 - 9x) - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$\sqrt{p} = \sqrt{t} \Rightarrow p = t$$

~~КС~~

$$p - t = p^2 - t^2$$

$$p^2 - 2pt + t^2 = p^2 + t^2 - 2pt$$

$$(p - t)(p + t - 1) = 0$$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1)(3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 1) = 0$$

$$(1 - 9x)(6x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$9\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(6\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{8}\right) = 0$$