МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

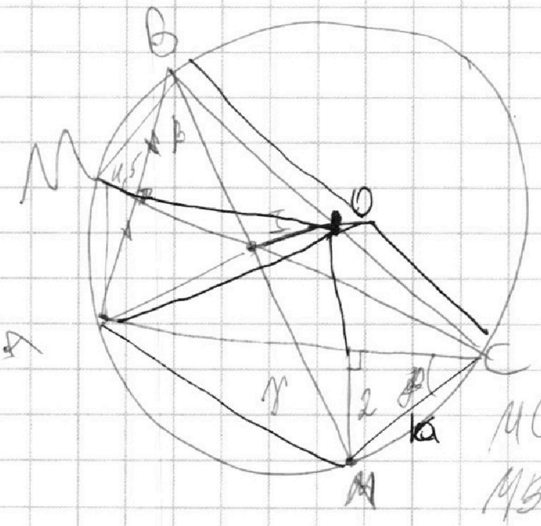
Задача 1

~~У a, b и c нет других делителей, кроме 2 и 7. Если произведение a, b и c наименьшее, иначе можно сократить на [illegible] и [illegible] числа все ещё будут удовлетворять условию [illegible]. Пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — степени вхождения 2 и 7 в числа a, b и c. Тогда из-за делимости на [illegible]:~~
~~$a_1 + b_1 \geq 14$, $c_1 + b_2 = 13$ $a_1 + c_1 \geq 20$~~

Черновик.

$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = 2,25$. $\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1,5}$

$2\sin^2\gamma = 4,5\sin^2\beta$



$\frac{MC}{\sin\beta}$ $MC = \frac{2}{\sin^2\beta} = 2R = \frac{4,5}{2\sin^2\gamma}$

$\frac{MC}{\sin\beta} = 2R$

$MC \cdot \overset{\sin\beta}{\cancel{\cos}}\beta = 2$. $MC \cdot 1,5\sin\gamma = 2$

$MB \cdot \sin\gamma = 4,5$. $MB \cdot \sin\beta = 4,5$

$\sin\beta = 1,5\sin\gamma$

$\frac{MC\,1,5}{MB} = \frac{2}{4,5}$

$\frac{MC}{MB} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

~~$abc = 2^{14} \cdot 7^{10}$, значит [illegible]~~ ~~Пусть a~~ Заметим, что для того, чтобы abc было наименьшим, у чисел a, b и c не должно быть делителей, отличных от 2 или 7 (иначе можно поделить числа на эти делители и для них всё равно будет выполняться условие задачи. Тогда пусть для чисел, у которых произведение наименьшее $a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$, $b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$, $c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$. Из ~~ус~~ делимости: $a_1 + b_1 \geq 14$, $c_1 + b_1 \geq 17$, $a_1 + c_1 \geq 20$. Поскольку числа a, b и c – натуральные, то a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 – целые неотрицательные.

~~$2a_1 + b_1 + c_1 \geq 34$, $2b_1 + c_1 \geq 17$, [illegible]~~. Сложим все неравенства, тогда $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 14 + 17 + 20 = 51$ – нечетное число. Тогда

четное число
$2(a_1 + b_1 + c_1)$

верно, что $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 52$, $a_1 + b_1 + c_1 \geq 26$. Если ~~хотим~~ требуется, чтобы abc было наименьшим, нужно выбрать наименьшие подходящие значения a_1, b_1, c_1. Тогда $a_1 + b_1 + c_1 = 26$. Докажем, что существуют подходящие a_1, b_1, c_1. Если $a_1 + c_1 = 20$, то $b_1 = 26 - 20 = 6$. $a_1 + b_1 \geq 14$, $b_1 = 6$, $a_1 \geq 8$, $a_1 = 8$. $a_1 + c_1 = 20$, $a_1 = 8$, $c_1 = 20 - 8 = 12$. $c_1 + b_1 = 12 + 6 = 18 \geq 17$ – верно. Аналогично из-за делимости: $a_2 + b_2 \geq 10$, $b_2 + c_2 \geq 17$, $c_2 + a_2 \geq 37$. Тогда $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 37 + 10 + 17 = 64$, $a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$, но ~~это~~ при этом равенство невозможно, так как $a_2 + c_2 \geq 37$, но заметим, что требуемые условия могут выполняться, например, при $b_2 = 0$, $c_2 + a_2 = 37$, $a_2 = 17$, $c_2 = 20$. (на величину abc влияют только суммы вхождения степеней 2 и 7, а не их конкретные значения для каждого числа. В решении значения степеней вхождения приводятся, чтобы доказать возможность такой ситуации). Тогда заметим, что при наименьшем значении abc, $a_1 + b_1 + c_1 = 26$, $a_2 + b_2 + c_2 = 37$, тогда, поскольку у чисел a, b и c нет других делителей, то $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2. Ответ: $m=8$.

$\frac{a}{b}$ несократима, значит a и b взаимно простые числа. Пусть $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$, тогда заметим, что a и b взаимнопросты с m, потому что если у a и m, есть делитель p, то поскольку $a+b \vdots m$, то $a+b \vdots p$, то $b \vdots p$, но a и b взаимно просты. Так же $(a+b)^2 \vdots m$, $a^2+2ab+b^2 \vdots m$. Тогда, $a^2+2ab+b^2-a^2-6ab+b^2$, $8ab \vdots m$. $a+b \vdots m$, $a \underset{m}{\equiv} -b$, тогда из $8ab \underset{m}{\equiv} 0$ $(8ab \vdots m) \equiv -8b^2 \equiv 0$. $-8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$, тогда $8b^2 \vdots m$, аналогично $8a^2 \vdots m$. ~~Но [illegible] 8ab~~ m. Ранее было доказано, что a и b взаимнопросты с m, тогда можно сказать, что из $8b^2 \vdots m$, $8 \vdots m$, а значит $8 \geq m$. Тогда посмотрим может ли быть $m=8$. Да может, например при $a=3$ и $b=5$, тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{9+25-6\cdot 15} = \frac{8}{34-90} = -\frac{8}{56}$, заметим что $56 \vdots 8$ и $8 \vdots 8$.

Ответ: $m=8$ - наибольшее возможное значение m.

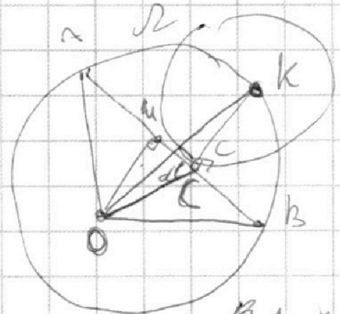
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



Пусть O- ~~середин~~ центр Ω, тогда пусть M- середина AB, тогда из OA = OB (радиусы) следует Δ ABO- равнобедренный, тогда OM также и высота. $\frac{AC}{CB}=7$, AC=7CB. AC+CB=AB, тогда AB=8CB. M-середина AB, тогда AM=$\frac{8\cdot CB}{2}$=4CB, MC=$\frac{8CB}{2}$−CB = 3CB. Заметим что тогда в Δ по теореме Пифагора в ΔAOM MO=$\sqrt{AO^2-AM^2}$= =$\sqrt{25-16CB^2}$. В Δ OCM OC=$\sqrt{OM^2+MC^2}$=$\sqrt{25-16CB^2+9CB^2}$=$\sqrt{25-7CB^2}$

Пусть K - ~~середина~~ центр ω, тогда KC=1 (радиус ω) Пусть ∠OCA=α. Тогда ∠OCK=α+90°, так как KC⊥AB (AB касается ω). По теореме косинусов для Δ OCK: $OK^2=OC^2+CK^2-2\,OC\cdot CK\cdot\cos\angle OCK$ OK=5 (радиус Ω), CK=1 (радиус ω) $\cos\angle OCK=\cos(90°+\angle\alpha)=\cos(90°-\angle\alpha)=$ $=\sin\alpha$. Тогда $25=25-7CB^2+1+2\,OC\cdot\sin\angle\alpha$, заметим, что в Δ OCM $OC\cdot\sin\alpha=OM$, так как это прямоугольный Δ с углом α. Тогда $-7CB^2+1+2OM=0$

$-7CB^2+1+2\cdot\sqrt{25-16CB^2}=0$. $2\sqrt{25-16CB^2}=7CB^2-1$, возведем обе части в квадрат

$4(25-16CB^2)=49CB^4-14CB^2+1$

$49CB^4+$ ~~[illegible]~~ $+50CB^2-99=0$ ~~[illegible]~~ - квадратное уравнение относительно CB^2. $D=50^2+99\cdot4\cdot49=2500+19404=21904=148^2$.

Тогда $CB^2=\frac{-50+148}{49\cdot2}=\frac{98}{98}=1$, другой корень меньше нуля, не подходит, тогда $CB^2=1$, CB=1, так как CB>0.

AB=8CB=8.

Ответ: AB=8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

Ограничения: $2x^2-5x+3\geq 0$, так находится под корнем. Найдем недопустимые значения x, решив $2x^2-5x+3=0$.
$D=25-4\cdot 2\cdot 3=1$. $x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{5-1}{4}=1$, Тогда, $x\notin(1;\frac{3}{2})$. Аналогично $2x^2+2x+1\geq 0$. $D=4-2\cdot 4\cdot 1=-4$, $D<0$, значит $2x^2+2x+1$ всегда >0.

Возведем обе части в квадрат:

~~$(2x^2-5x+3)+(2x^2+2x+1)-2\sqrt{(2x^2-5x+3)\cdot(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4$.~~

~~$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4$, сократим подобные и возведем в квадрат:~~

~~$\left(-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}\right)^2=(45x^2-25x)^2$~~

~~$4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3)=45^2x^4-2\cdot 45\cdot 25x^3+25^2x^2$~~

~~$2009x^4-2226x^3$~~

~~45^2: 45, 45, 225, 180, 2025~~ ~~25^2: 25, 25, 125, 50, 625~~ ~~25, 90, 2250~~

Пусть $2x^2-5x+3=a$, $7x-2=b$, тогда исходное неравенство переписывается в виде
$\sqrt{a}-\sqrt{a+b}=-b$, возведем обе части в квадрат:
$a+a+b-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$, $2a+b-b^2=2\sqrt{a^2+ab}$;
$4a^2+b^2+b^4+4ab-4ab^2-2b^3=4a^2+4ab$. $b^2+b^4-4ab^2-2b^3=0$.
$a=\frac{b^2+b^4-2b^3}{4b^2}=\frac{1+b^2-2b}{4}=\frac{(b-1)^2}{4}$, подставим исходные значения:

$2x^2-5x+3=\frac{(7x-3)^2}{4}$ $8x^2-20x+12=49x^2-42x+9$
$41x^2-22x-3=0$.

$D=22^2+3\cdot 4\cdot 41=484+492=976=(4\sqrt{61})^2$

$x_1=\frac{22+4\sqrt{61}}{82}=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}<1$, $x_2=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}<1$, оба
$\sqrt{61}<8$.

Корни удовлетворяют ~~от~~ ограничениям

Ответ: $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$, $x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$.

22, 22, 44, 44, 484
41, 12, 82, 41, 492
976 | 4, 244 | 4, 61
16, 16

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.

Заметим, что данный параллелограмм образуется пересечениями прямых $y=24$ (там точки P и Q), $y=-2x$ (P и O), $y=-2x+30$ (R и Q), $y=0$ (R и O). Тогда если точка лежит внутри параллелограмма, ~~[illegible]~~ про неё верно, что если x и y её координаты, то $24 \geq y \geq 0$, $y \geq -2x$, $y \leq -2x+30$. $y+2x \geq 0$, но $y+2x \leq 30$.

~~Заметим, что если точка лежит [illegible] внутри параллелограмма и у неё целые координаты, то она лежит на прямой параллельной [illegible]~~

Заметим, что через любую точку, лежащую внутри параллелограмма, можно провести прямую, параллельную стороне этого параллелограмма. Тогда для простоты можно считать, что можно провести внутри параллелограмма лишь 29 прямых вида $y=-2x+a$, где $a \in [1; 29]$ и a - целое, на которых будут ~~лежать целые точки. Всего получится 29 [illegible], которые лежат внутри параллелограмма или на его границах. Поскольку $y \in [0; 30]$ $[0; 24]$, то заметим, что внутри или на границах параллелограмма будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек. Заметим, что не все [illegible] точек, если прямая [illegible]~~ Заметим, что при этом не были посчитаны точки с ~~коорд~~ лежать эти целые точки внутри или на границах параллелограмма.

Заметим, что у 16 этих прямых есть по две целые точки на границах параллелограмма, поскольку $0 \leq y \leq 24$, то на них будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек, а на оставшихся 15 прямых будет 12 целых точек. Если точка лежит на прямой $2x+y=a$, то ~~[illegible]~~ ей втору можно поставить все точки лежащие на прямой $2x+y=a \pm 12$, если такая лежит внутри параллелограмма. ~~[illegible]~~ У a и $a \pm 12$ одинаковая чётность, поэтому на этих прямых будет лежать одинаковое количество (если a - чётное, то 13, если a - нечётное, то 12.

Тогда заметим, что если точка лежит на прямой $y+2x=a$ и $a \in [12; 18]$, то ей ~~[illegible]~~ можно сопоставить две прямые, чтобы их разность координат равнялась 12. Если $a \in [0; 12)$ или $(18; 30)$, то для них однозначно подбирается прямая, коэффициент и у которой $a \in [12; 18]$, тогда остаётся лишь посчитать ~~[illegible]~~ кол-во ~~чётных и не чётных прямых~~ прямых с чётным и нечётным коэффициентом a.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Задача 5 (продолжение)

от 12 до 18 и чётных числа и три нечётных. Тогда для каждых 13 точек с 4 прямых с чётным коэффициентом a будет по 2 прямых, ~~для которых~~ с которыми можно взять 100-13 точек, чтобы получилась пара, удовлетворяющая условию (так как прямые вида $2x+y=a$, то ~~разность~~ если $2x_1+y_1=a_1$ и $2x_2+y_2=a_2$, разность $2x_1+y_1-2x_2-y_2=a_1-a_2$), тогда будет

$4\cdot13\cdot2\cdot13=169\cdot8$ - пар, и для прямых с нечётными коэффициентами a аналогично будет $4\cdot2\cdot12^2=144\cdot8$ пар.

Тогда всего $169\cdot8+144\cdot8=8(169+144)=8\cdot313=$

$=2504$

Ответ: 2504 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6 Выразим y.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases} \qquad y = 10b + ax$$

$((x+8)^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1)(x^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 4) \le 0$

$x^2 + 16x + 64$

~~$x^2 + 16x + 64 + 100b^2 + a^2x^2 - 20abx - 1$~~

$(x^2 + y^2 + 63 + 16x)(x^2 + y^2 - 4) \le 0.$

~~Обе~~ эти задачи отличаются на 63 + 16x. ~~Если $x^2+y^2-4>0$ то при $63+16x$ [illegible] $x^2+y^2+63+16x$ [illegible]~~

$(x^2 + 63 + 16x + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx)(x^2 - 4 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx) \le 0.$

Это произведение, если одно выражение больше нуля, а другое меньше нуля. При достаточно больших a что оба выражения больше нуля. Значит не все значения подходят.

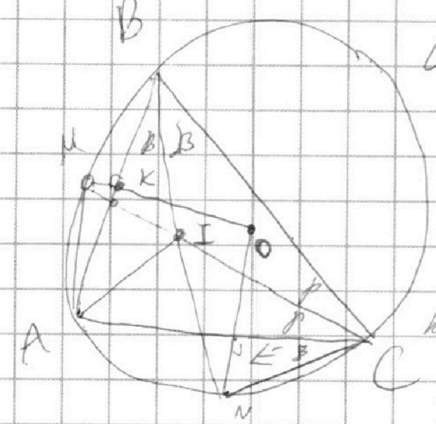
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



M и N – середины дуг AB и AC, значит BN и CM – биссектрисы, тогда пусть их пересечение – I. Также заметим, что биссектриса ∠ пересекается с серединным перпендикуляром к хорде, которую стягивает дугу, делимую этой биссектрисой пополам на описанной окружности. Тогда ~~эти~~ OM и ON – серединные перпендикуляры к AB и AC, где O – центр описанной окружности △ABC. Пусть K и E – середины AB и AC, тогда по условию MK = 4,5, EN = 2. Пусть ∠B = 2∠β, а ∠C = 2∠γ. Тогда в △NEC ~~и~~ $NE = CN \cdot \sin\angle\beta$. $2 = CN \cdot \sin\beta$. По теореме синусов $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = 2R$, где R – радиус ~~ок~~ описанной окружности △ABC. Так же $\frac{AM}{\sin\angle\gamma}$ (AM биссектриса) $= 2R$. Тогда $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = \frac{AM}{\sin\angle\gamma}$,

$NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$, $AM = \frac{4,5}{\sin\angle\gamma}$ так как △AKM – прямоугольный с углом γ. Тогда $\frac{2}{\sin^2\angle\beta} - \frac{4,5}{\sin^2\angle\gamma} = \frac{\sin^2\angle\gamma}{\sin^2\angle\beta} = \frac{4,5}{2} = 2,25$; ∠γ и ∠β < 90°, так как это углы в раздвоенном пополам, тогда $\sin\angle\gamma > 0$, $\sin\angle\beta > 0$, $\frac{\sin\angle\gamma}{\sin\angle\beta} = 1,5$. $\sin\angle\gamma = 1,5\sin\angle\beta$. $CN = \frac{2}{\sin\angle\beta}$,

$AM = \frac{4,5}{\sin\angle\gamma} = \frac{3}{\sin\angle\beta}$, тогда $\frac{AM}{CN} = \frac{3}{2}$, $AM = 1,5\,CN$.

По лемме о трезубце IN = AN = CN, AM = MI = MB. △MIB – равнобедренный, ~~Тогда~~ также ∠BNA = ∠BAC, опирающиеся на одну дугу. Тогда, по теореме косинусов для

△NIA. $AI^2 = NI^2 + AN^2 - 2AN \cdot NI \cdot \overset{\cos 2\angle\gamma}{\cancel{\cos\angle\gamma}} =$

~~AN~~ AN = NI = CN, $\cos 2\angle\gamma =$ ~~$2\sin^2\beta$~~ $1 - 2\sin^2\gamma$. $NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$

~~$AI^2 = 2CN^2 + 2CN^2 - 4CN^2 \cdot \sin^2\angle\gamma \cdot \frac{8}{\sin^2\angle\beta} + \frac{8}{\sin^2\angle\beta} - \frac{16}{\sin^2\angle\beta} \cdot 1,5^2\sin^2\angle\beta$~~

~~$= \frac{16}{\sin^2\angle\beta}(1 - 1,5\sin^2\angle\beta) =$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7

$1 - 2\sin^2\gamma$

$AI^2 = 2CN^2 - 2CN^2(~~2\sin^2 2\gamma - 1~~) = 4~~CN^2~~ + 4CN^2 \cdot \sin^2 2\gamma =$

$CN = \frac{2}{\sin 2\beta}$ $\sin^2\gamma = 2,25\sin^2\beta$

$= \frac{16}{\sin^2 2\beta} + 4 \cdot \frac{4}{\sin^2 2\beta} \cdot 2,25 \cdot \sin^2\beta = \frac{16}{\sin^2\beta} = 36.$

~~Попробуем найти $\sin 2\beta$. Заметим, что [illegible]~~

~~$\cos^2\gamma = 1 - \sin^2 \gamma = 2,25 \sin^2\beta$, $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$.~~

$AI^2 = 36$, $AI = 6$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6

~~$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leq 0 \end{cases}$ $ax=y-10b$ $x=\frac{y-10b}{a}$ Второе неравенство верно при~~

~~$(x+8)^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2=4$ или $x^2+y^2<4$, $(x+8)^2+y^2>1$ и $x^2+y^2>4$ и $(x+8)^2+y^2<1$~~

~~$x^2+y^2+64+16x$~~ ~~$x^2+y^2+16x<-63$~~

~~Пусть $(x+8)^2+y^2-1=0$, тогда подставим $x=\frac{y-10b}{a}$,~~

~~$\frac{(y-10b)^2}{a^2}+\frac{16y-160b}{a}+64+y^2-1=0$~~

Черновик

?

~~AB = 8~~

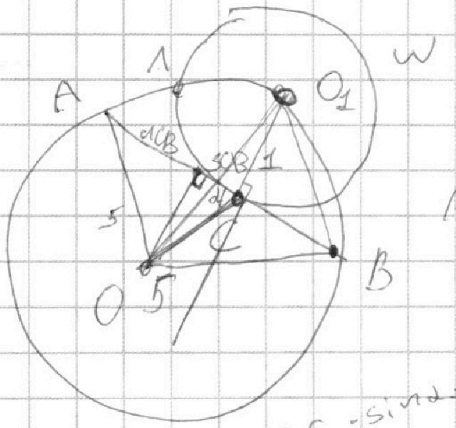
Тогда AB =

AC = CB

$\frac{AC}{CB}=4$

AC = 4CB

AB = 8CB



$\sqrt{25-16CB^2}$

$OC\cdot\sin\alpha=\sqrt{25-16CB^2}$

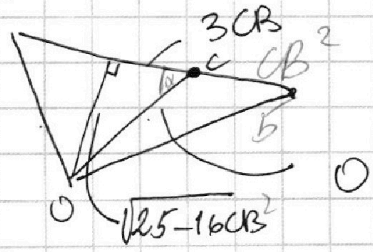
$OC^2=25-4CB^2$

152
152
304
30
456
$\boxed{23104}$
45

148
148
1184
592
148
$\boxed{21904}$

160000

448
448
3584
1792
1792
200604



В △ O_1OC

$OC^2=25-16CB^2+9CB^2=$
$=25-4CB^2$

$90°-\alpha$

$25=1+OC^2-2OC\cdot\cos(\alpha+90°)$

$1+OC^2+2OC\cdot\sin\alpha$

$OC\cdot\cos\alpha=3CB$

$OC^2+CB^2+2OC\cdot CB\cdot\cos\alpha=5=$

$25=1+25-4CB^2+2\sqrt{25-16CB^2}$.

$25-4CB^2+CB^2+6CB^2=5$

$1-4CB^2+2\sqrt{25-16CB^2}=0$

$25-12CB^2=5$

$CB^2=\frac{20}{12}$)

$\boxed{CB=\frac{5}{3}}$

1130
1130
1290
142
28490

AB = 8

$100-64CB^2=49CB^4-14CB^2+1$

$49CB^4+50CB^2-99=0$

$CB^2=a$ $2500+99\cdot4\cdot49$

99
49
891
396
4851

19404
2500
21904

21904 | 41
16
89
4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

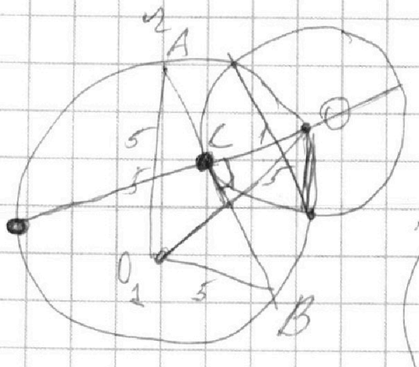
Черновик

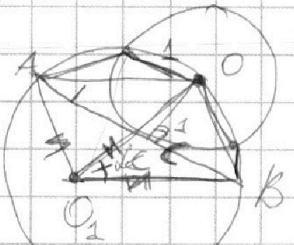
AC=4CB

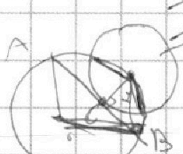
AC · CB=4CB²

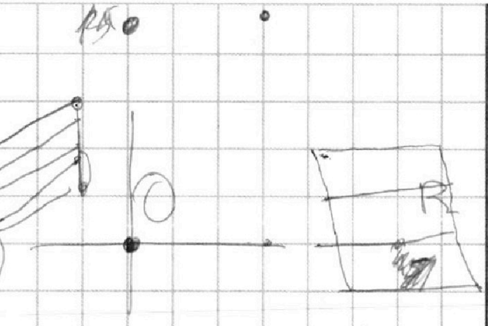
OC.

$\frac{AC}{CB}=4$ AC=4CB









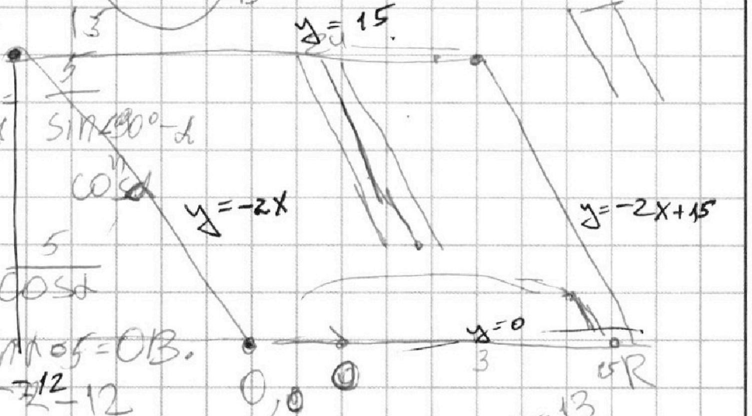
$\frac{OB}{\sin 2\alpha}=\frac{5}{\sin(90°-\alpha)}$

$\cos\alpha$

$\frac{OB}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{5}{\cos\alpha}$

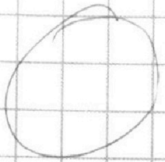
$2\sin\alpha\cdot 5=OB.$

$\frac{OB}{\sin\alpha}=10$



~~-12~~ -12

$14\frac{1}{2}+1=13$



y≥0

y≤15

$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)}=10$

Тогда y≥-2x

y≤-2x+15

2x+y≤15

24
24
96 12
48
576
+144
720

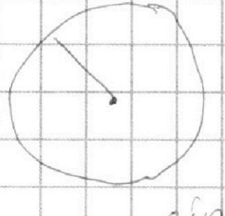
$12^2+24^2=720$

y= ~~b~~x+b. b=0.

-12 · 2

225
16
1350
225
3600

$2\sin^2\alpha-1$



~~$\sin 2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$~~

~~$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$~~ = ~~$1-2\cos^2\alpha$~~

~~$\sin^2\alpha(1-2\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha$~~

~~$\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$~~

$\sin^4\alpha-\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=$ ~~$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$~~

~~$(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$a^2+2ab+b^2 \vdots m^2$

$8ab \vdots m$

$a+b \vdots m$

$a+b=mk$ $8ab=mn$

$a=mk-b$ $8bmk-8b^2=mn$

$8b^2 \vdots m$ $\boxed{8a^2 \vdots m}$

$8ab \vdots m$, a и b взаимнопросты

$8b(a-b) \vdots m$

Если $b \vdots m$, то $a \not\vdots m$, тогда $8 \vdots m$.

Если a: делители m, а b не делится ← a и b взаимнопросты

с m. Тогда $m \le 8$. Пример 3 и 5?

$9+25-6\cdot 15 =$ 90

$34-90=56 \vdots 8$.

$4,5 \cdot 2$

$\boxed{\sin\angle\gamma = 1,5\sin\angle\beta}$

$\sin\angle\beta =$

Для любого a - ?

Если

$y=ax$

$\sqrt{(x^2+8^2)}-1$

$(x^2+16x+63+a^2x^2)(x^2+a^2x^2-4)\le 0$.

$x^2=\frac{4}{a^2+1}$

$x=$

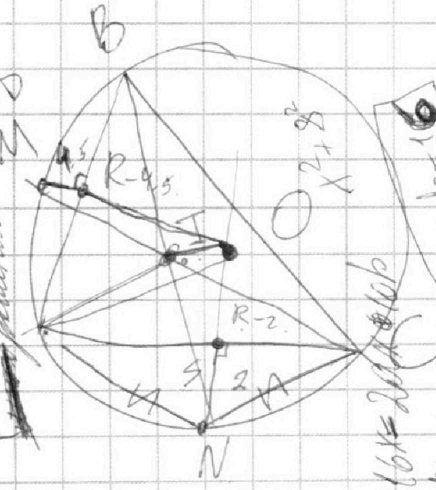
$x^2+y^2-4y=0$

Тогда $x=0$

$x^2+16x+63+a^2x^2\le 0$

$x^2+a^2x^2$

$y^2=x^2+4$

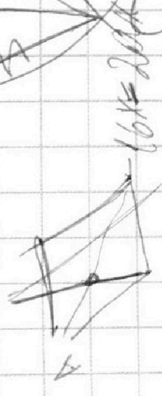


$16x=20ax+10b$

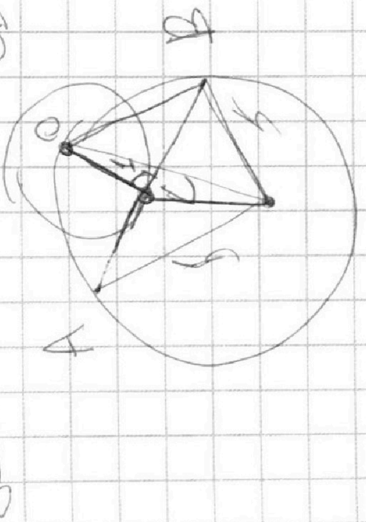
$x^2+16x+64$

$\boxed{200b=16}$

$\frac{AC}{CB}=4$



$y=\boxed{ax+10b}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

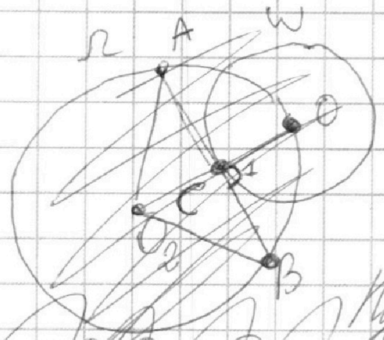
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 3~~ Черновик

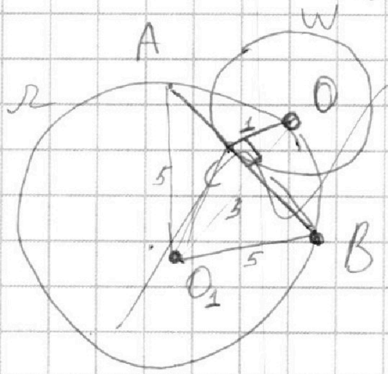


Дано: ω, Ω - окружности, центр ω лежит на Ω. AB принадлежит Ω и касается ω в точке C. $\frac{AC}{CB} = 4$

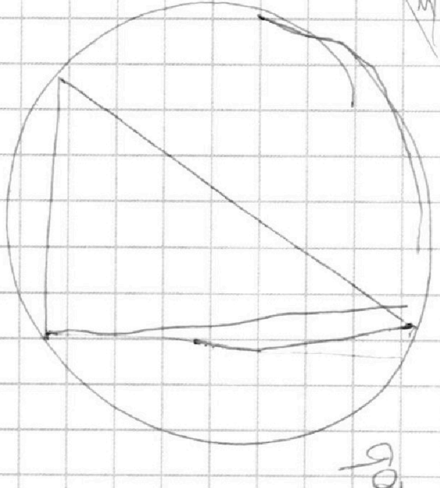
Радиусы ω и Ω 1 и 5.

AB - ?

~~Пусть O - центр ω, O2 - центр Ω. OC и O2O - радиусы данных окружностей, которые~~



~~O1 и O - центры Ω и ω соответственно. OC ⊥ AB, так как AB касается ω. AO1 = O1B = = O1O (радиусы) = 5. OC = 1 (радиус ω).~~



$\sin\gamma = 1{,}5\sin\beta$

AB = AM·cos β

BC =

Задача 8

Внимательно ?

$\sin^2\beta = \frac{1}{4}$

16·4 = 64 − 36 = 28