



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = n_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n_2 \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot n_3$$

$$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \quad \text{Найдем } k = \min(a^2 b^2 c^2)$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{15 \cdot 2} \cdot 7^{11 \cdot 2} \cdot 2^{17 \cdot 2} \cdot 7^{18 \cdot 2} \cdot 2^{23 \cdot 2} \cdot 7^{39 \cdot 2} = 2^{22} \cdot 7^{22} \cdot 2^{22} \cdot 7^{22} \cdot 2^{22} \cdot 7^{22} = 2^{66} \cdot 7^{66}$$

$$abc = 2^{h_a+h_b+h_c} \cdot 7^{m_a+m_b+m_c} = 2^{h_a+h_b+h_c} \cdot 7^{m_a+m_b+m_c}$$

$$ab = 2^{h_a+h_b} \cdot 7^{m_a+m_b} \quad bc = 2^{h_b+h_c} \cdot 7^{m_b+m_c}$$

$$ac = 2^{h_a+h_c} \cdot 7^{m_a+m_c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a+h_b \geq 15 \\ m_a+m_b \geq 11 \end{cases} \quad \begin{cases} h_b+h_c \geq 17 \\ m_b+m_c \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} h_a+h_c \geq 23 \\ m_a+m_c \geq 39 \end{cases}$$

Найдем минимум  $\min(h_a+h_b+h_c)$  и  $\min(m_a+m_b+m_c)$

$$a_2 \text{ условия: } \begin{cases} 2h_a + 2h_b + 2h_c \geq 55 \\ 2m_a + 2m_b + 2m_c \geq 66 \end{cases} \quad \begin{cases} h_i \in \mathbb{Z} \\ m_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a+h_b+h_c \geq \lceil \frac{55}{2} \rceil \\ m_a+m_b+m_c \geq \lceil \frac{66}{2} \rceil \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_a+h_b+h_c \geq 28 \\ m_a+m_b+m_c \geq 34 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{34}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab}$$

Если эту дробь

можно сократить на  $m$ , то  $a+b = mq, q \in \mathbb{N}$

$$[(a-b)^2-5ab] = mp, p \in \mathbb{N} \quad \Downarrow a = mq - b$$

$$\Downarrow (a-b)^2 \equiv 5ab \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow (mq - 2b)^2 \equiv 5b(mq - b) \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow (m^2q^2 - 4mqb + 4b^2) \equiv 5bmq - 5b^2 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow m(m^2q^2 - 4qb) + 4b^2 \equiv m - 5qb - 5b^2 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 \equiv -5b^2 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 = h_1 m + k \\ -5b^2 = h_2 m + k \end{cases} \Rightarrow 4b^2 + 5b^2 = (h_1 + h_2)m$$

$$\Leftrightarrow 9b^2 = (h_1 + h_2)m \quad \Downarrow \begin{cases} h_1 > 0 \\ h_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9b^2 : m \quad \Leftrightarrow (3b)^2 : m \quad \exists b \in \mathbb{N}$$

Если  $m$  не полный квадрат, то







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 2x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$3x^2 - 6x + 2 \neq 3x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{3x^4 - 9x^2 - 9x^2 + 2} = 1 - 18x + 8(x^2$$

$$2\sqrt{3x^4 - 9x^2 - 9x^2 + 2} = -95x^2 + 15x + 2$$

$$36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = \dots$$

Можно заметить, что если к подкоренному выражению  $3x^2 + 2x + 1$  прибавить  $1 - 9x$ , то получится подкоренное выражение  $3x^2 - 6x + 2$

$$3x^2 + 2x + 1 = a, \quad 1 - 9x = b \Rightarrow \sqrt{a+b} \mp \sqrt{a} = b$$

$$\Rightarrow a+b + a - 2\sqrt{a^2+ab} = b^2 \Rightarrow b^4 + b(4\sqrt{a^2+ab} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow b^2(b^2 + 4\sqrt{a^2+ab} - 1) = 0$$

$$1) b^2 = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \quad x = 1/9$$

$$2) \sqrt{a^2+ab} = 1 - b^2 \quad 16(a^2+ab) = 1 - 2b^2 + b^4$$

$$16a^2 + 16ba + (2b^2 - b^4 - 1) = 0 \quad \Delta_{1/4} = 64b^2 - 32b^4 + 16b^4 + 16 =$$

$$= 16b^4 + 32b^2 + 16 = 16(b^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-8b \pm 4(b^2 + 1)}{16} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/4 - 1/4b & (i) \\ a = -1/4 - 3/4b & (ii) \end{cases}$$

$$(i) 12x^2 + 12x + 4 = 1 - 1 + 9x \quad \Rightarrow 12x^2 + 3x = 0 \quad \Delta < 0$$

$$(ii) 12x^2 + 12x + 4 = -1 - 3 + 27x \quad \Rightarrow 12x^2 - 15x + 8 = 0 \quad \Delta < 0$$

Ответ:  $x \in \{1/9\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+y-bb=0 & (i) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (ii) \end{cases}$$

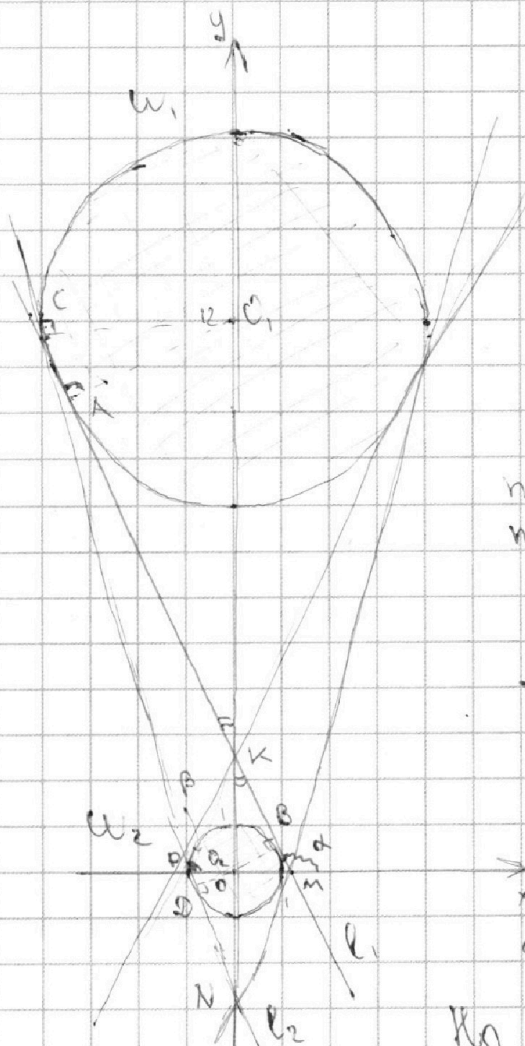
(i)  $y = -ax + bb$  - прямая,  $\theta$  угла наклона  $-a$ , т.  $(0; bb)$

(ii) 1)  $\begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$  -

область внутри окр. с центром в т.  $(0; 0)$  и радиусом 1,  
но снаружи окр. с центром в т.  $(0; 12)$  и радиуса 4

2)  $\begin{cases} x^2+y^2 > 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$  -

область внутри окр. с центром в т.  $(0; 12)$  и радиуса 4,  
но снаружи окр. с центром в т.  $(0; 0)$  радиуса 1



2 решения возникают только  
при одновременном касании  
прямой обеих окружностей  
(4 случая)

Касательные можно раз-  
делить на 2 типа:  
- внешние (не пересекающие  $Oy$ )  
- внутренние (пересекающие  $Oy$   
между окр.)

Для каждого типа пара  
прямых имеет одну точку  
пересечения с  $Oy$  (одно значение  $bb$ )  
а  $\theta$  угла наклона с противоположными  
знаками.

I) Внутренние касательные  
(см. рис)

Прямые  $l_1 \cap W_1 - т. А$ ,  $l_2 \cap W_2 - т. В$

$$\Rightarrow O_1 A \perp l_1, O_2 B \perp l_2$$

$$\Rightarrow \triangle AOK \sim \triangle BOK \Rightarrow \frac{OK}{O_1 K} = \frac{O_1 A}{O_2 B} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Но } O_1 K + KO_2 = O_1 O_2 = R \Rightarrow т. К (0; 2,4)$$

$$\Rightarrow bb = 2,4 \Leftrightarrow b = 0,2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Delta O_2KB$   $\operatorname{tg} KO_2B = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - BKO_2) = \operatorname{ctg} BKO_2 = \frac{KB}{KO_2}$

$\Delta KBO_2$   $\cos KO_2B = \frac{OB}{O_2K} = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos^2 KO_2B = \frac{25}{144}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} KO_2B = \frac{144}{25} - 1 = \frac{144 - 25}{25} = \frac{119}{25} \Leftrightarrow \operatorname{tg} KO_2B = \frac{\sqrt{14161}}{25}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} KMX = -\operatorname{tg} KMO_2 = -\operatorname{tg} KO_2B = -\frac{\sqrt{14161}}{25} = -a$

$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{14161}}{25} \Rightarrow \text{Логарифм } (a;b) : (\frac{\sqrt{14161}}{25}; 0,3), (-\frac{\sqrt{14161}}{25}; 0,3)$

## II) Внешние касательные

Пусть  $l_1 \cap W_1 = T, C$   $l_2 \cap W_2 = T, D \Rightarrow O_1C \perp l_2, O_2D \perp l_1$

$\Rightarrow \Delta O_1CN \sim \Delta O_2DN$  ( $T, N - l_2 \cap O_1O_2$ )  $\Rightarrow \frac{O_1N}{O_2N} = \frac{O_1C}{O_2D} = \frac{4}{1}$

Но  $O_1N - O_2N = O_1O_2 = 12$

$\Rightarrow T, N(0; 4) \Rightarrow 8b = -4 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$

$\Delta O_2DN$   $\cos NO_2D = \frac{O_2D}{NO_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} NO_2D = \sqrt{15}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} CPX = -\operatorname{tg} O_2PD = -\operatorname{tg} DO_2N = -\sqrt{15} = -a$

$\Rightarrow a = \sqrt{15} \Rightarrow \text{Логарифм } (a;b) : (\sqrt{15}; -\frac{1}{2}), (-\sqrt{15}; -\frac{1}{2})$

Ответ:  $(\frac{\sqrt{14161}}{25}; 0,3), (-\frac{\sqrt{14161}}{25}; 0,3), (\sqrt{15}; -\frac{1}{2}), (-\sqrt{15}; -\frac{1}{2})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2a+b - 2\sqrt{a^2+ab} = b^2$$

$$2a+b = b^2 + 2\sqrt{a^2+ab}$$

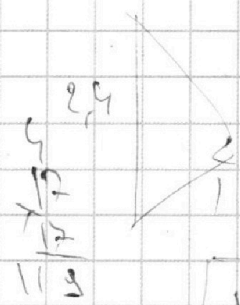
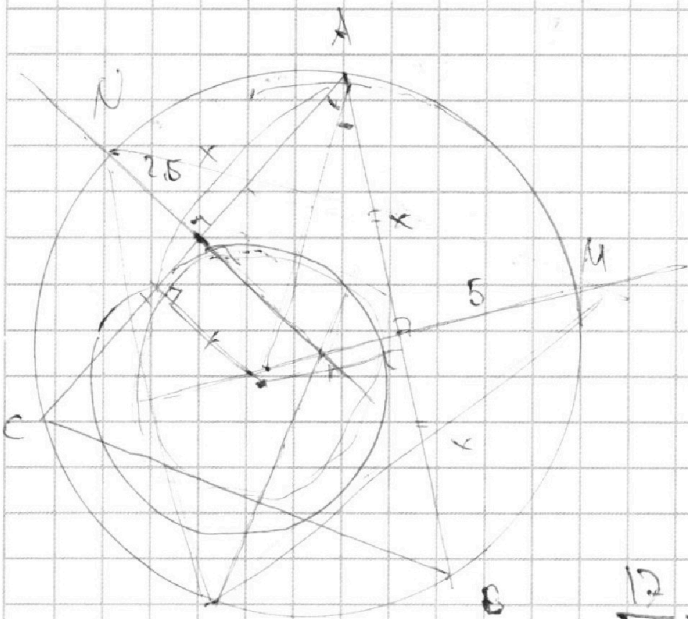
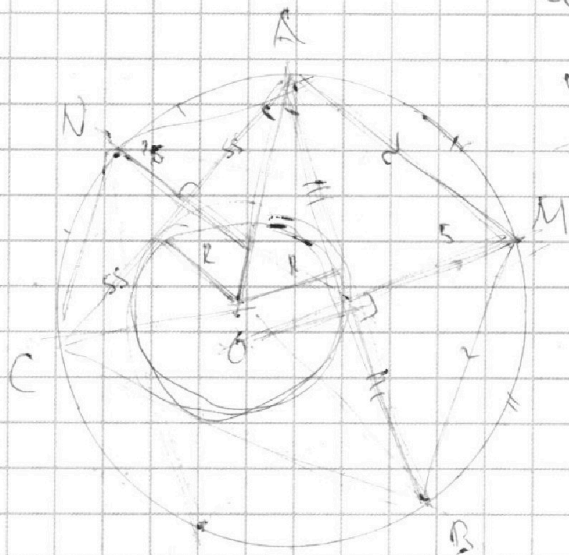
$$4a^2 + 4ab + b^2 = b^4 + 4b^2\sqrt{a^2+ab} + 4(a^2+ab)$$

$$16(b^4 + 2b^2 + 16) =$$

$$\frac{-8b + 4b + 4}{b^6} = \frac{4-4b}{b^6} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{b^3}$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$2 = 225$$



$$\sqrt{\frac{14}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{5}$$

$$\frac{12}{5} + \frac{1}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\sqrt{199}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

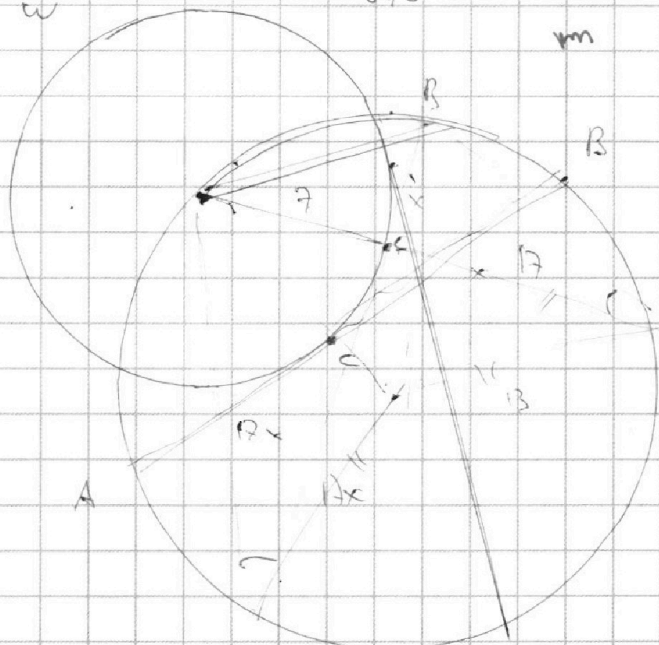
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ω (7)



$$1+x^2 = 6 \cdot 6(49 + 19x^2)$$

$$(1+x^2)(49 + 19x^2) = 6 \cdot 6$$

$$12, 12, 24$$

$$\frac{12}{12x} = \frac{1}{12}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{49 + 6}}{2}$$

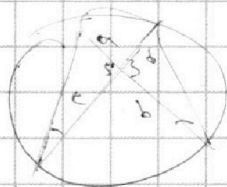
$$= 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{55}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha - 1}$$

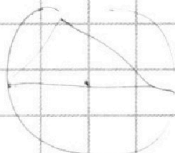
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{55}}{2}$$

A 2 (13)



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$ab = cd$$



$$ab = h_1 \cdot 2r$$

$$bc = 2r \cdot h_2$$

$$ca = 2r \cdot h_3$$

$$a^2 b^2 c^2$$

НОК

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$-1 - 3x + 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = h$$

$$= 1 - 3x + 3x^2 + 12x$$

$$\frac{49 + 49x^2}{49(49 + 19x^2)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cancel{9x^4} + \cancel{8x^3} + \cancel{8x^2} + \cancel{9x}^3$$

$$abc = 2^{23} \cdot 2^3$$

$$\cancel{9x^4} - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x$$

$$b = 1$$

$$c = 2^{17} \cdot 2^{16}$$

$$9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x =$$

$$a = 2$$

$$= 9x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 12x$$

$$\begin{array}{r} 626 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$abc = 2^7$$

$$49 + 119x^2 + 49x^2 + 119x^4 = 626$$

$$ab =$$

$$119x^4 + 168x^2 - 627 = 0$$

$$168$$

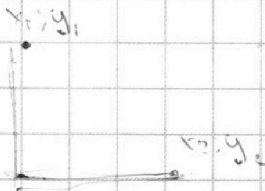
$$x = \frac{-84 \pm \sqrt{84^2 + 119 \cdot 627}}{119}$$

$$\begin{array}{r} 626 | 2 \\ 328 | 2 \\ 164 | 2 \\ 13 | 73 \end{array}$$

$$4 \cdot 13^2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 13$$

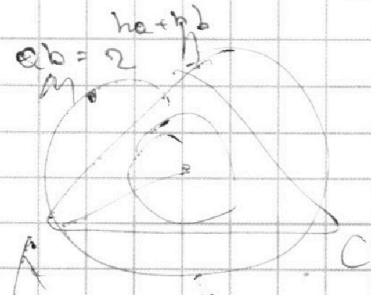
$$626 =$$



g

$$abc = 2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^7$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$



$$(mq - 2b) \equiv 5b(mq - b) \pmod{m}$$

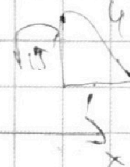
$$-2b \equiv -5b^2 \pmod{m}$$

$$4b^2 = hm + k$$



$$5b = h_2 m + k$$

$$2b^2 = gm$$



$$\frac{10}{1} = 1 \cdot 10$$

25