



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

до 1

Заметим, что $abc : 7^{39}$. Тогда пусть a имеет в своем разложении на простые множители 7^{12} , а $c - 7^{27}$. Таким образом ~~все~~ условия на кратность 7^{11} и 7^{18} выполняются и в abc будет минимальная возможная степень 7 .

Пусть a_2, b_2, c_2 - степени 2 в разлож. на простые множители a, b, c соотв.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ c_2 + a_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \text{ хотя бы } 56, \text{ т.к. } a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}_{\text{нн}} = 0$$

$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2$ хотя бы 28 . Пример: $a_2 = 11, b_2 = 5, c_2 = 12$ (все условия выполнены)

Очевидно, что добавлять какие-то простые мн-ли, кроме 2 и 7 , нет смысла, т.к. на них нет условий, но они увеличат abc .

Ответ: мин. возможн. произв. $abc = 7^{39} \cdot 2^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Найдем НОД $(a+b, a^2-7ab+b^2)$ используя алгоритм Евклида:
 $(a+b, a^2-7ab+b^2) = (a+b, a^2-7ab+b^2 - (a+b)(a+b)) =$
 $= (a+b, -7ab-2ab) = (a+b, -9ab)$
т.е. вычли $(a+b)(a+b)$ раз

Заметим, что $a+b \nmid a$ и $a+b \nmid b$, т.к. a и b - взаимно
просты. При этом $9ab$ делится на a, b и 9

\Rightarrow наибольшее возможное $m = 9$.

Пример: $a=4, b=5: \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

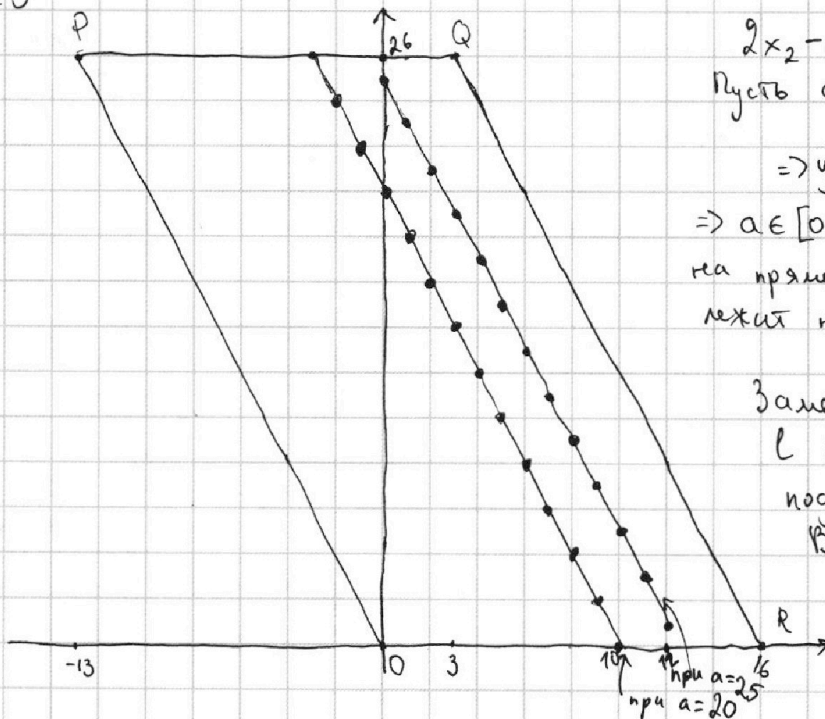
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

Пусть $a = 14 + 2x_1 + y_1$

$$\Rightarrow y_2 = a - 2x_2 \text{ (прямая } l)$$

$\Rightarrow a \in [0; 32]$, т.к. PO лежит на прямой $y_2 = -2x_2$, а QR лежит на прямой $y_2 = 32 - 2x_2$.

Заметим, что при a -чет, l будет пересекать 14 подходящих точек (т.е. точек B, которые подходят в пару с этим a). А при a -нечет, l будет пересекать 13 подходящих точек.

(т.е. сколько точек A задают a)

Рассмотрим, сколько раз a принимает каждое своё значение. Заметим, что $a \geq 14$, т.к. иначе $y_1 = -2x_1$, где $x_1 \in [1; 14]$, а такая прямая будет полностью вне PQRO, т.к. PO является $y = -2x$. При наблюдении возможна $a = 32$:

$$32 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \Rightarrow \text{подойдет } 14 \text{ точек } A$$

$a \leq 32$ подходит, т.к. даже при

$$a = 32 = 32 - 2x_1 + y_1,$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \text{ (подходит)}$$

$\Rightarrow a \in [14; 32]$. При этом при a -чет, подойдут 14 возможных точек A, которые задают это самое a , и для каждой такой точки A подойдут 14 точек B, т.е. пар (A, B) - $14 \cdot 14$ для a -чет. Аналогично для a -нечет пар (A, B) - $13 \cdot 13$. Всего четных a - 10, а нечетных a - 9.

(Заметим, что прямые "из точек B" и "из точек A" не пересекаются, т.к. первая прямая задается как $y_2 = a - 2x_2$, а вторая как $y_1 = (a - 14) - 2x_1$, $a \neq a - 14$)

$$\Rightarrow \text{ответом будет: } 10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 13 \cdot 13 = 1960 + 1521 = 3481$$

Ответ: 3481 пара



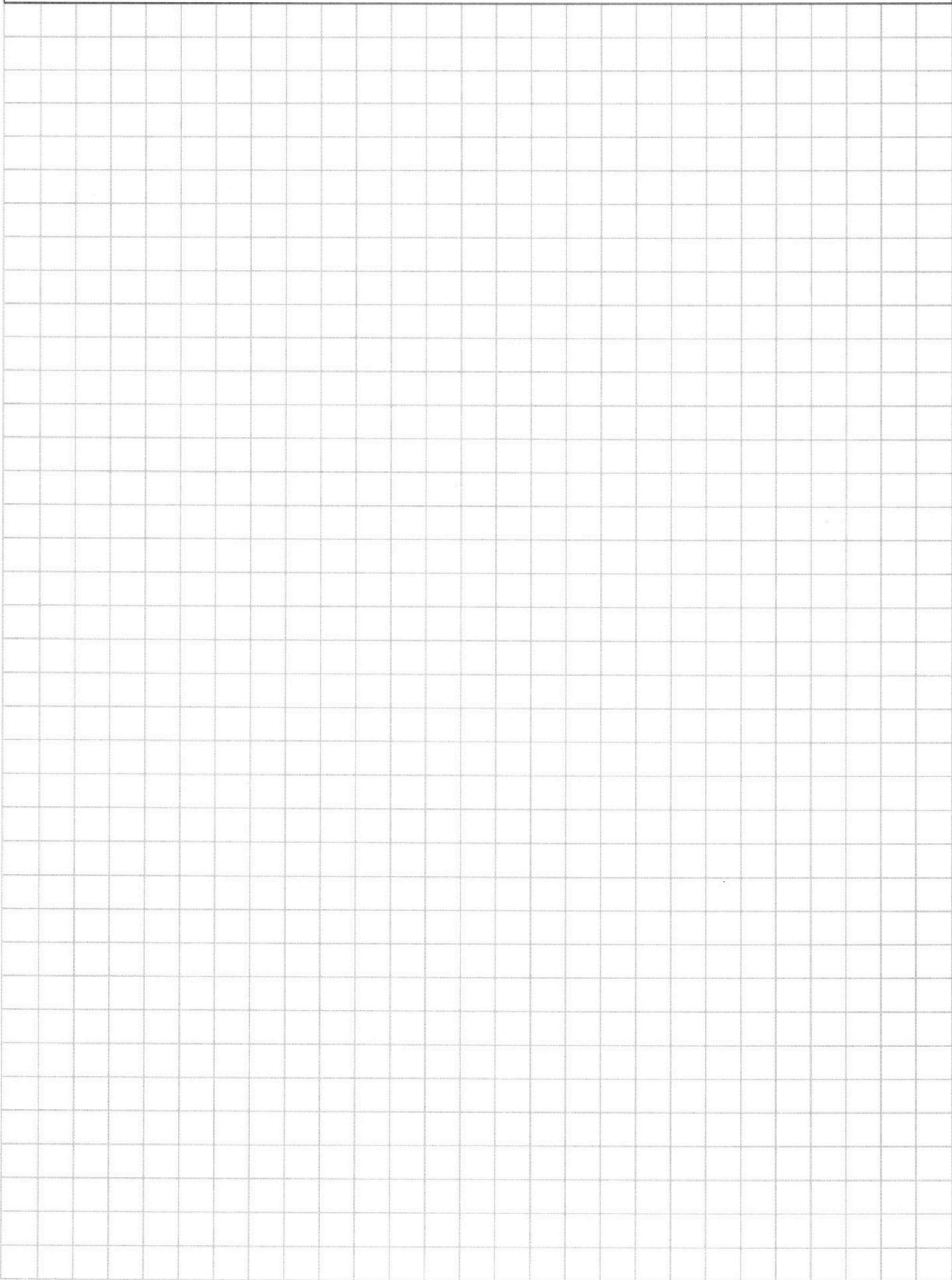
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертовик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \rightarrow y = 8b - ax \\ (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 &= \\ &= x^2 + y^2 - 24y + 128 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 24 \\ 80 \\ 182 \end{array}$$

$$(x^2 + (8b - ax)^2 - 1)(x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 24y + 128) \leq 0$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 \leq 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 192b + 24ax + 128 &= \\ = (a^2 + 1)x^2 + (6ab + 24a)x + (64b^2 - 192b + 128) \end{aligned}$$

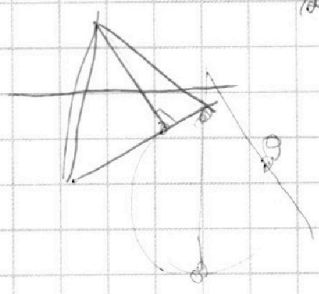
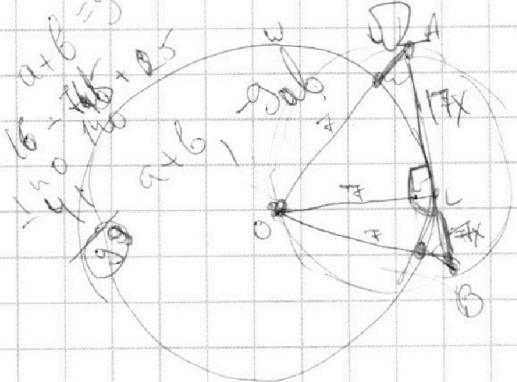
$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) \leq 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) \Rightarrow 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0$$

$$x = \frac{16ab \pm 2\sqrt{a^2 - 64b^2 + 1}}{2(a^2 + 1)}$$

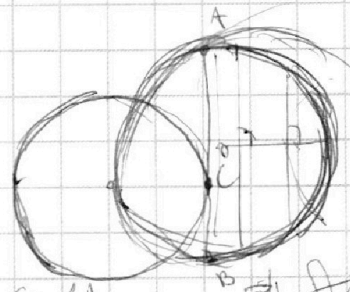
$$\frac{8ab + \sqrt{D}}{a^2 + 1} \leq x \leq \frac{8ab - \sqrt{D}}{a^2 + 1}$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

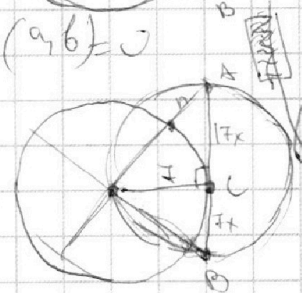


$$\begin{array}{r} 40 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 680 \\ 1190 \\ \hline 2090 \end{array}$$

$$17x + 7x = 24x$$

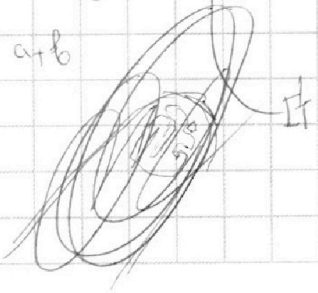


$$\begin{aligned} 289x^2 + 49 &= 49 + 14n + n^2 \\ 19x^2 + 49 &= 49 + 14m + m^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (7+x)^2 + 7^2 &= (7+n)^2 \\ (7+x)^2 + 7^2 &= (7+m)^2 \\ 14m &= 49x^2 \\ 14n &= 289x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) &=? \\ \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} & \\ (a+b, -8ab) & \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3$

$D = 36 - 24 = 12$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$9x + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$81x^2 + 36x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 18x = 1 + 3x^2 + 9x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$8(x^2 - 9x + 1) =$

$(9x - 1)^2 - 1$

$(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 = (1 - 9x)^2$

$3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 81x^2$

$78x^2 - 12x + 1 = 0$

$D = 144 - 4 \cdot 78 \cdot 1 = -104$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{-104}}{156}$

$x = \frac{12 \pm 2\sqrt{-26}}{156} = \frac{6 \pm \sqrt{-26}}{78}$

$x = \frac{6 \pm i\sqrt{26}}{78}$



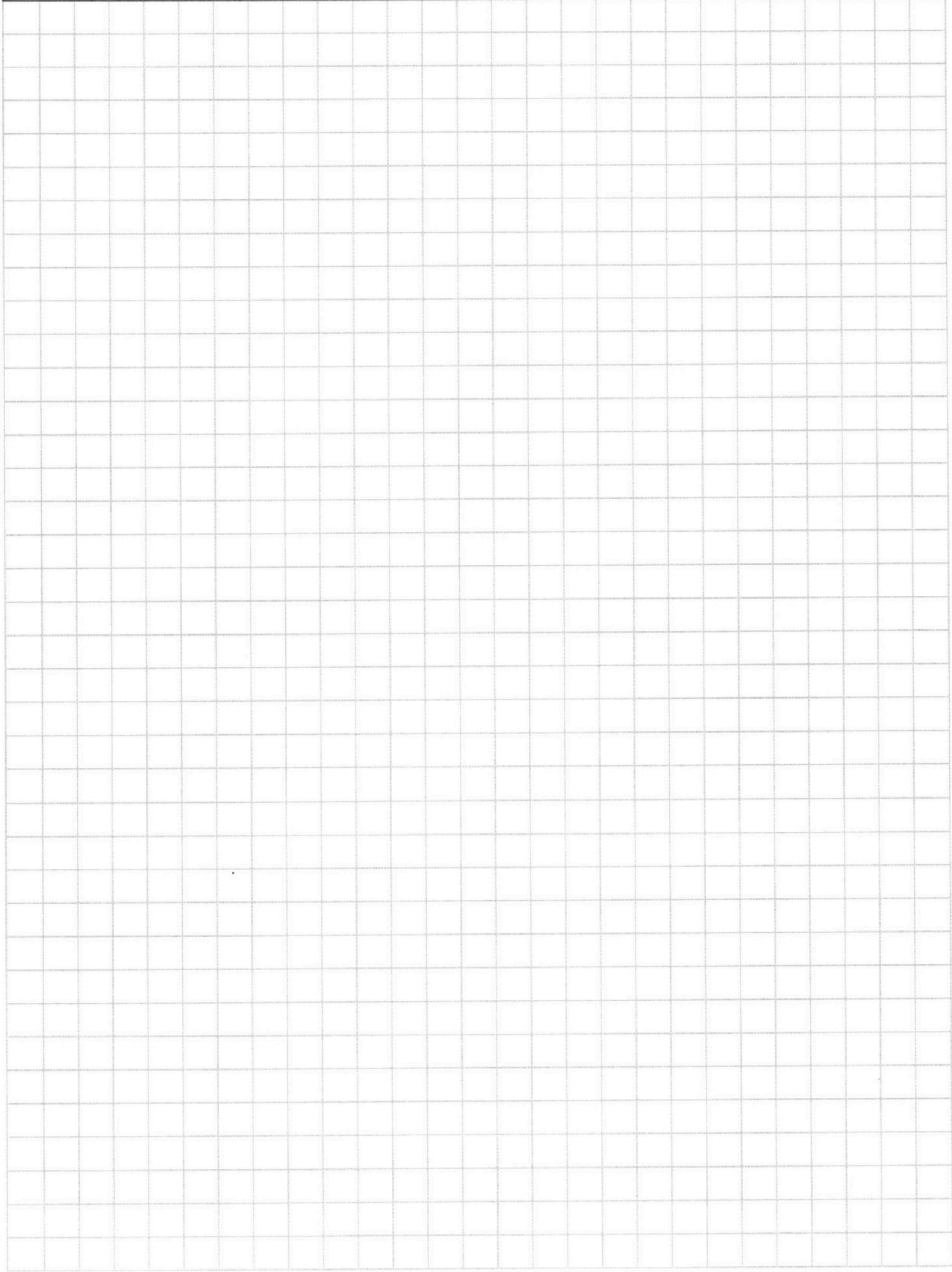
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





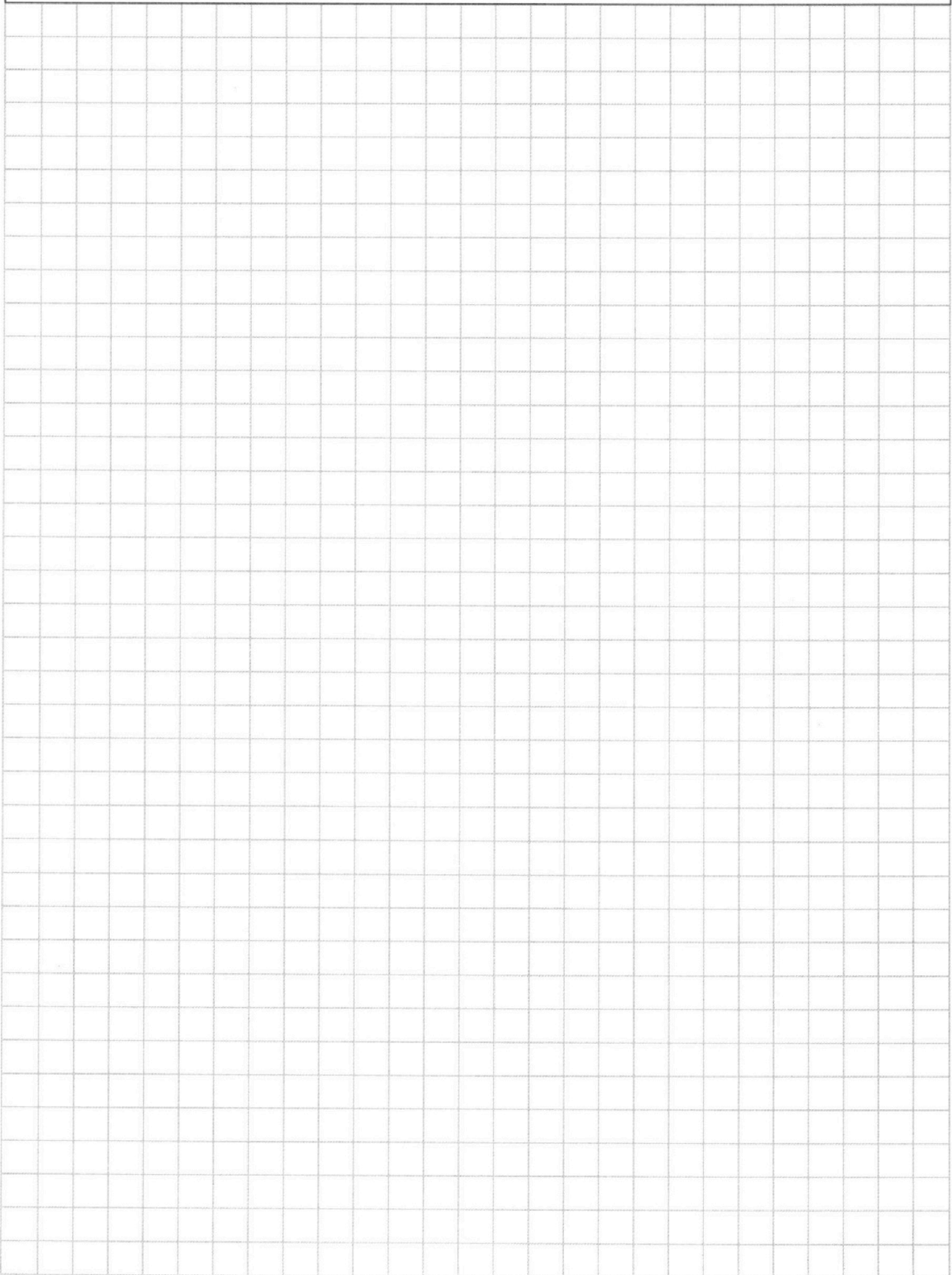
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$
 $A(1,1) \Rightarrow 2x_2 + y_2 = 17$

$y_2 = 23$
 $x_2 = -4$

$y_2 = 23$
 $x_2 = -3$

$y_2 = 21$
 $x_2 = -2$

$2x_1 + y_1 = 14$
 $x_1 = -7$

$\min a = -7$

$\min(a(x_1, y_1)) = -26$

$2x_1 + y_1 = 17$
 $x_2 = \frac{17 - y_1}{2}$

$A(1,2)$
 $2x_2 + y_2 = 18$
 $x_2 = 9 - \frac{y_2}{2}$

$y_2 = 26$
 $x_2 = -13$

$14 = 14 + 2x_1 + y_1$
 $2x_1 + y_1 = 0$
 $14 (P_0)$
 $a \geq 14$
 14
 $2x_1 + y_1 = 14$
 $\text{бюджет } 13$
 $2x_1$

$14 = 14 + 2x_1 + y_1$
 $2x_2 + y_2 = -14$
 $2x_2 = -14 - y_2$
 $x_2 = -7 - \frac{y_2}{2}$

$19 = 14 + 2x_1 + y_1$
 $2x_2 + y_2 = 9$
 $2x_2 = 9 - y_2$
 $x_2 = 4.5 - \frac{y_2}{2}$

$17 - 2x_2$
 13

$0 = 2x_1 + y_1$
 $17 \cdot 14 + 16 \cdot 13 = 13$

$y_2 = 18 - 2x_2$
 $y_2 = 19 - 2x_2$
 $y_2 = 20 - 2x_2$
 $x_2 = -13$
 13
 $32 = 14 + 2x_1 + y_1$

$14 + 2x_1 + y_1 = 16$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 18$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 20$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 22$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 24$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 26$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 28$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 30$
 $14 + 2x_1 + y_1 = 32$

$x_1 \in (-13; 16)$
 $y_1 \in (0; 26)$

$a - 14 \in [-14; 18]$

$y_1 = 3 - 2x_1$
 $13^2 = (1690) - 169$
 169
 1521
 $+1960$
 1960
 3481