



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Заметим, что  $abc : 7^{39}$ . Тогда пусть  $a$  имеет в своем разложении на простые множители  $7^{12}$ , а  $c - 7^{27}$ . Таким образом ~~все~~ условия на кратность  $7^{11}$  и  $7^{18}$  выполняются и в  $abc$  будет минимальная возможная степень  $7$ .

Пусть  $a_2, b_2, c_2$  - степени  $2$  в разлож. на простые множители  $a, b, c$  соотв.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ c_2 + a_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \text{ хотя бы } 56, \text{ т.к. } a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}_{\text{нн}} = 0$$

$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2$  хотя бы  $28$ . Пример:  $a_2 = 11, b_2 = 5, c_2 = 12$  (все условия выполнены)

Очевидно, что добавлять какие-то простые мн-ли, кроме  $2$  и  $7$ , нет смысла, т.к. на них нет условий, но они увеличат  $abc$ .

Ответ: мин. возможн. произв.  $abc = 7^{39} \cdot 2^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Найдем НОД  $(a+b, a^2-7ab+b^2)$  используя алгоритм Евклида:  
 $(a+b, a^2-7ab+b^2) = (a+b, a^2-7ab+b^2 - (a+b)(a+b)) =$   
 $= (a+b, -7ab-2ab) = (a+b, -9ab)$   
т.е. вычли  $(a+b)(a+b)$  раз

Заметим, что  $a+b \nmid a$  и  $a+b \nmid b$ , т.к.  $a$  и  $b$  - взаимно  
просты. При этом  $9ab$  делится на  $a, b$  и  $9$

$\Rightarrow$  наибольшее возможное  $m = 9$ .

Пример:  $a=4, b=5$ :  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

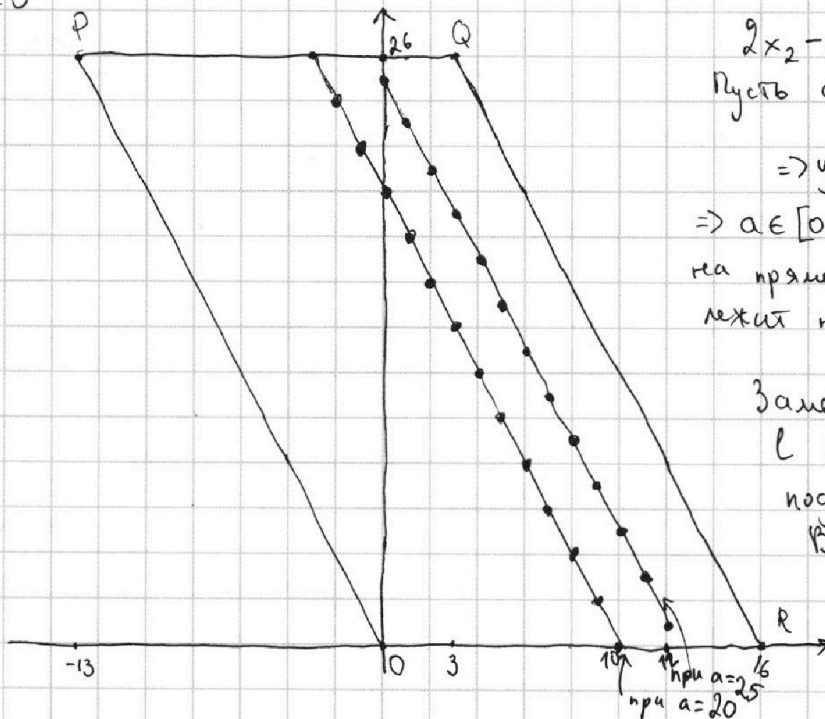
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

Пусть  $a = 14 + 2x_1 + y_1$

$$\Rightarrow y_2 = a - 2x_2 \text{ (прямая } l)$$

$\Rightarrow a \in [0; 32]$ , т.к. PO лежит на прямой  $y = -2x$ , а QR лежит на прямой  $y = 32 - 2x$ .

Заметим, что при  $a$ -чет,  $l$  будет пересекать 14 подходящих точек (т.е. точек B, которые подходят в пару с этим  $a$ ). А при  $a$ -нечет,  $l$  будет пересекать 13 подходящих точек.

(т.е. сколько точек A задают по  $a$ )

Рассмотрим, сколько раз  $a$  принимает каждое своё значение. Заметим, что  $a \geq 14$ , т.к. иначе  $y_1 = -2x_1$ , где  $x_1 \in [1; 14]$ , а такая прямая будет полностью вне PQRO, т.к. PO является  $y = -2x$ . При наблюдении возможна  $a = 32$ :

$$32 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \Rightarrow \text{подойдет } 14 \text{ точек } A$$

$a \leq 32$  подходит, т.к. даже при

$$a = 32 = 32 - 2x_1 + y_1,$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \text{ (подходит)}$$

$\Rightarrow a \in [14; 32]$ . При этом при  $a$ -чет, подойдут 14 возможных точек A, которые задают это самое  $a$ , и для каждой такой точки A подойдут 14 точек B, т.е. пар (A, B) -  $14 \cdot 14$  для  $a$ -чет. Аналогично для  $a$ -нечет пар (A, B) -  $13 \cdot 13$ . Всего четных  $a$  - 10, а нечетных  $a$  - 9.

(Заметим, что прямые "из точек B" и "из точек A" не пересекаются, т.к. первая прямая задается как  $y_2 = a - 2x_2$ , а вторая как  $y_1 = (a - 14) - 2x_1$ ,  $a \neq a - 14$ )

$$\Rightarrow \text{ответом будет: } 10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 13 \cdot 13 = 1960 + 1521 = 3481$$

Ответ: 3481 пара





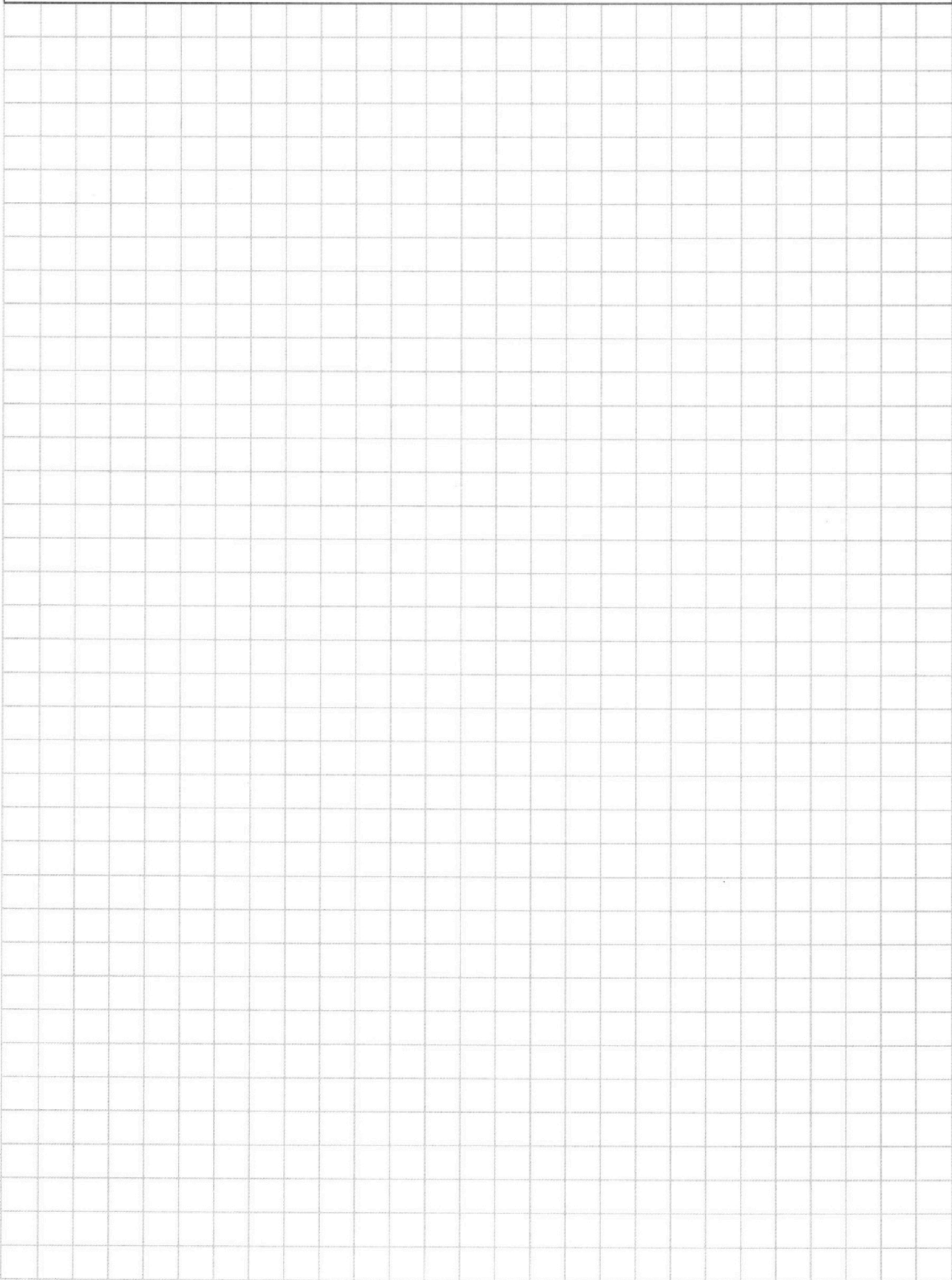
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертовик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \rightarrow y = 8b - ax \\ (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 &= \\ &= x^2 + y^2 - 24y + 128 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 24 \\ 80 \\ \hline 182 \end{array}$$

$$(x^2 + (8b - ax)^2 - 1)(x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 \leq 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 16abx + 24ax + 128 &= \\ = (a^2 + 1)x^2 + (64b^2 - 192b + 128) & \end{aligned}$$

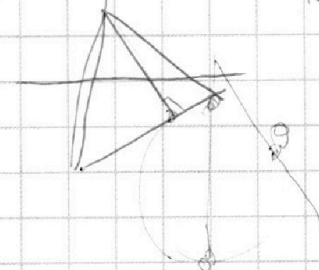
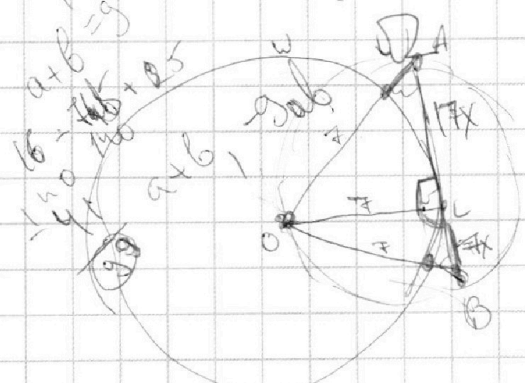
$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) \leq 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) \Rightarrow 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0$$

$$x = \frac{16ab \pm 2\sqrt{a^2 - 64b^2 + 1}}{2(a^2 + 1)}$$

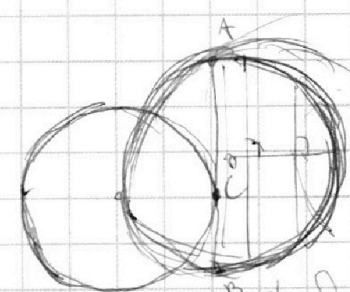
$$\frac{8ab + \sqrt{D}}{a^2 + 1} \leq x \leq \frac{8ab - \sqrt{D}}{a^2 + 1}$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

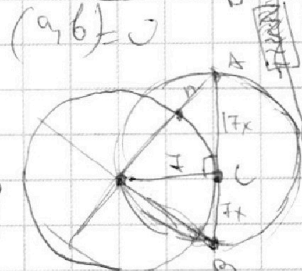


$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 17 \\ \hline 680 \\ \hline 2080 \end{array}$$

$$17x + 7x = 24x$$

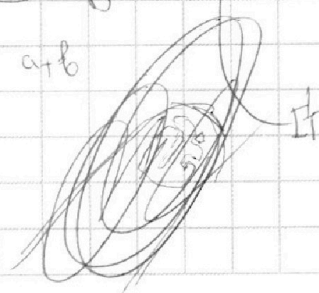


$$\begin{aligned} 289x^2 + 49 &= 49 + 14n + n^2 \\ 19x^2 + 49 &= 49 + 14m + m^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (7+x)^2 + 7^2 &= (7+n)^2 \\ (7+x)^2 + 7^2 &= (7+m)^2 \\ 14m &= 49x^2 \\ 14n &= 289x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) &=? \\ \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} & \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$   $a+b, -9ab$

$D = 9 - 4 \cdot 3$   $\frac{4}{5}$

$D = 36 - 24 = 12$   $9x + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$   $8x^2 + 3x^2 - 6x + 2 + 18x = 1 + 3x^2 + 9x + 1 + 2$

$(3 \pm \sqrt{3})x -$   $8(x^2 - 5x + 1) =$

$\frac{15}{2} \cdot 33$   $(9x - 1)^2 = 1$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$   $ab$

$(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}) - (6 - 2\sqrt{6})x$   $(a+i)b + a(b+i)$





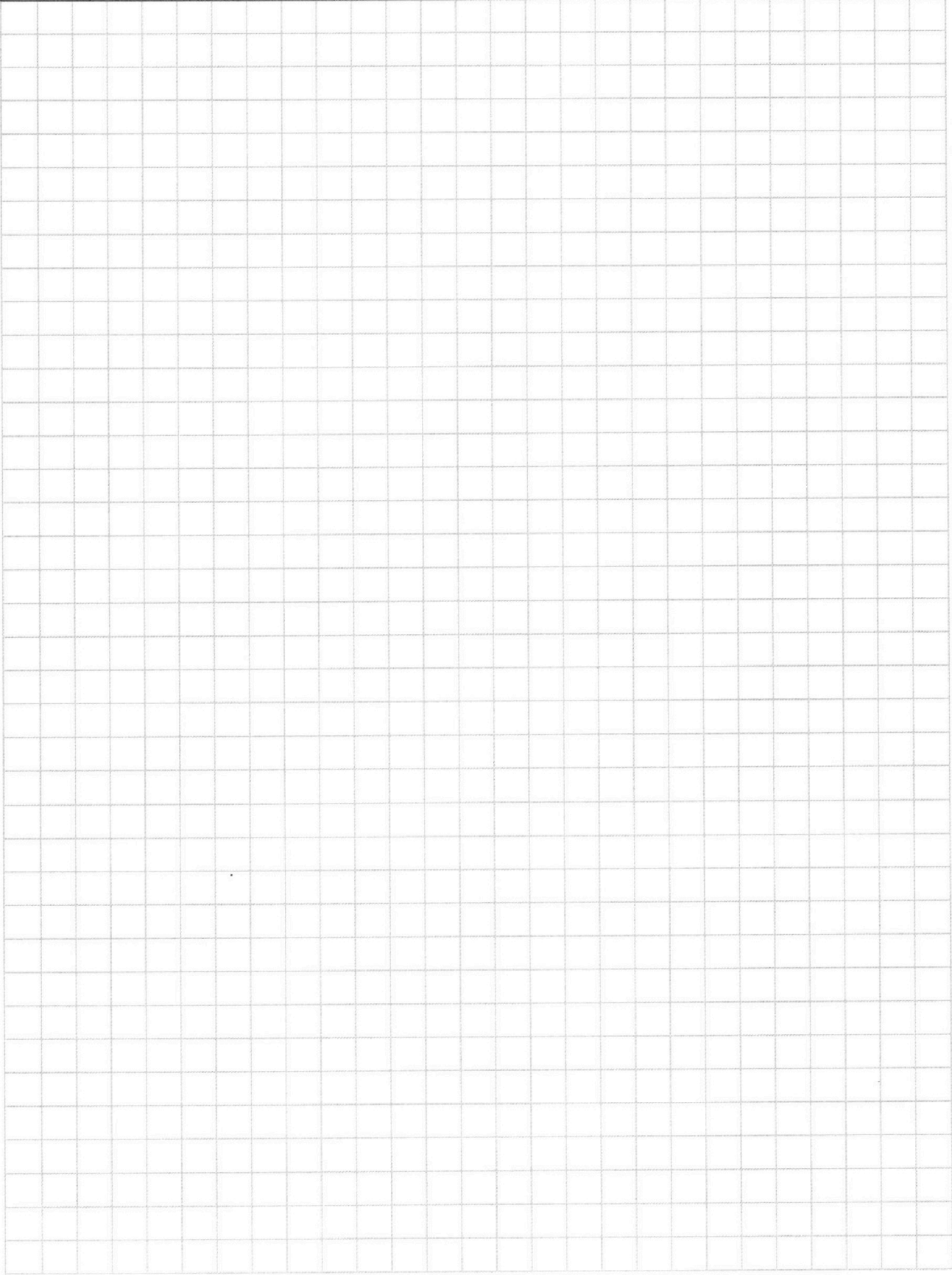
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







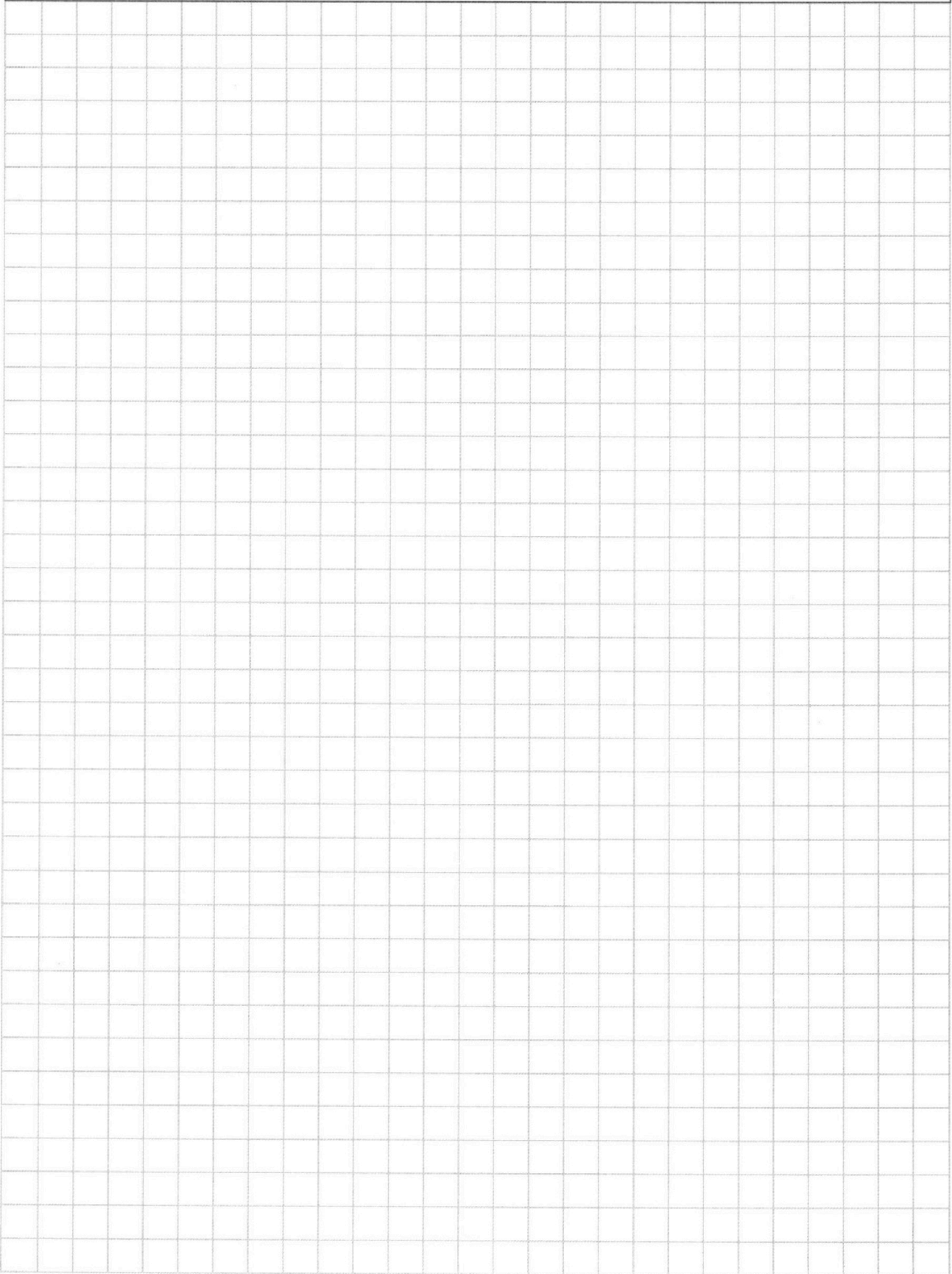
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$   
 $A(1,1) \Rightarrow 2x_2 + y_2 = 17$

$y_2 = 23$   
 $x_2 = -4$

$y_2 = 23$   
 $x_2 = -3$

$y_2 = 21$   
 $x_2 = -2$

$2x_1 + y_1 = 14$   
 $x_1 = -7$

$\min a = -7$

$\min(a(x_1, y_1)) = -26$

$2x_1 + y_1 = 17$   
 $x_2 = \frac{17 - y_1}{2}$

$A(1,2)$   
 $2x_2 + y_2 = 18$   
 $x_2 = 9 - \frac{y_2}{2}$

$y_2 = 26$   
 $x_2 = -13, 16$

$14 = 14 + 2x_1 + y_1$   
 $2x_1 + y_1 = 0$   
 $14 (P0)$   
 $a \geq 14$   
 $14$   
 $2x_1 + y_1 = 17 - 2x_2$   
 $\min a = 15$   
 $13$   
 $0 = 2x_1 + y_1$   
 $17 \cdot 14 + 16 \cdot 13 = 13$

$y_2 = 18 - 2x_2$   
 $y_2 = 19 - 2x_2$   
 $y_2 = 20 - 2x_2$   
 $x_2 = -13$   
 $0 = 14 - 2x_1 - 14$   
 $y_1 = -2x_1 - 14$   
 $20 - 2x_2 = 26$   
 $-2x_2 = 6$   
 $x_2 = -3$

$32 = 14 + 2x_1 + y_1$   
 $14 + 2x_1 + y_1 = 32$   
 $18$   
 $14 + 2x_1 + y_1 = 14$   
 $2x_1 + y_1 = 0$   
 $14$   
 $16$   
 $18$   
 $22$   
 $24$   
 $26$   
 $28$   
 $30$   
 $32$

$x_1 \in (-13; 16)$   
 $y_1 \in (0; 26)$   
 $a - 14 \in [-14; 18]$

$2x_1 + y_1 = 3$   
 $y_1 = 3 - 2x_1$   
 $13^2 = (1690) - 169$   
 $169$   
 $1521$   
 $+1960$   
 $1960$   
 $3481$