



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] \star Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

λ При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] \dagger Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] \downarrow Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] \dagger На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] \downarrow Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
• страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть
$$\begin{cases} ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14} \\ ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{k_3}} \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{7^5}$$

$$a = \sqrt{\frac{2k_1 k_3}{k_2}} \cdot 2^8 \cdot 7^{15}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k_2 k_3}{k_1}} \cdot 2^{11} \cdot 7^{22}$$

\Rightarrow каждое из трех выражений — в. ч. целого, целое $\frac{2k_1 k_2}{k_3} \geq 7^{10}$,

иначе b — не целое и $\frac{2k_1 k_2}{k_3}$ — целое, тогда b не целое:

1) $\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow k_1 k_2 = k_3 \cdot 2 \cdot 7^{10}$

$$k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow \frac{2k_1 k_3}{k_2} = 2^2 \cdot 7^{10} \cdot \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \text{ — в. ч. целого}$$

или $k_3 : k_2$

аналогично $\frac{2k_2 k_3}{k_1} = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 7^{10}$

\Rightarrow или $k_3 : k_1$ — в. ч. целого и $\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2^2 \cdot 7^{10}$

Итого малые множители, значит, или $k_1 = k_2 = k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$$b = 2^5 \cdot \frac{1}{7^5} \cdot 2 \cdot 7^5 = 2; \quad a = 2^8 \cdot 7^{15} \cdot \frac{2 \cdot 7^{10}}{2 \cdot 7^{10}} = 2^8 \cdot 7^{15}$$

$k_1 k_2 k_3 \geq 2 \cdot 7^{10}$ и $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$. Тогда $b = \frac{2^6}{k_3}$

$$a = \frac{2^5 \cdot 7^{10}}{k_2}; \quad c = \frac{2^{12} \cdot 7^{22}}{k_1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подберём числа k_1, k_2, k_3 , чис a, b, c -нам и $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$.

$k_1 = 7^0, k_3 = 2, k_2 = 1$. a, b, c -нам и усл. задачи выполняем

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 7^{10}} \cdot 2^5 \cdot 7^{12} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ищем: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Р.5: $a = 2^9 \cdot 7^0$
 $b = 2^{12} \cdot 7^{14}$ ← при $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$
 $c = 2^5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a \equiv k \pmod m$, тогда $b \equiv m-k \pmod m$, иначе из
условия $a+b$ не будет делиться на m , причем $k \not\equiv 0 \pmod m$,
иначе $\frac{a}{b}$ сводится к m .

$$\left. \begin{aligned} a^2 &\equiv k^2 \\ -6ab &\equiv -6k(m-k) \\ b^2 &\equiv m^2 - 2mk + k^2 \end{aligned} \right\} + \quad \begin{aligned} a^2 - 6ab + b^2 &\equiv k^2 - 6km + 6k^2 + m^2 - 2mk + k^2 \equiv \\ &\equiv 8k^2 - 8mk + m^2 \equiv 8k^2 \end{aligned}$$

И.к. $a^2 - 6ab + b^2$ делится точно сравним с 0 по $m \pmod m$, иначе
невозможно извлечь делитель m , но $8k^2 \equiv 0 \pmod m$ и $k^2 \not\equiv 0 \pmod m$,
то $8 \equiv 0 \pmod m \Rightarrow m \leq 8$.

Пример на $m=8$: $k=7, b=1$: $\frac{7+1}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$.

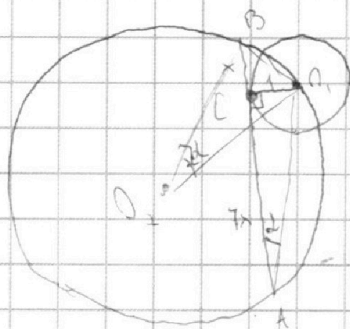
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) по т.п. описанной AO, C : $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$
 $\cos \alpha = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$; ч.к. AB кас. CO, MO

$\angle O, CA = 90^\circ$; AB - касательная

2) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}$

углы 2α и α в 2 раза больше вписанного, значит, не могут быть равны

3) по т.п. описанной $\Delta BO, O_2$: $\frac{BO_2}{\sin 2\alpha} = 2R = 10 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{BO_2}{10} =$

$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{10} = \frac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}$ $\Rightarrow 140x = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{4x^2+1}$

$140^2 x^2 = (x^2+1)(4x^2+1)$

$x^2 = t$; $140^2 t = 49t^2 + 50t + 1$; $49t^2 + t(50-140^2) + 1 = 0$

2) по т.п. описанной $\Delta AO, B$: $\frac{BO}{\sin \alpha} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \frac{10}{\sqrt{4x^2+1}}$

$t = x^2$; $t+1 = \frac{100}{49t+1} \Rightarrow 49t^2 + 50t - 99 = 0$

$t = 1$ - корень; $(t-1)(49t+99) = 0$

2-й корень $< 0 \Rightarrow$ не корень $\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow AB = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = -(7x - 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2$$

$$-(7x - 2) + (7x - 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 2 = 0$$

(1)

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \quad (2)$$

(1) μ -на $x = \frac{2}{7}$

(2) ~~рассм.~~ $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$; $D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{D}{4a} = \frac{-4}{4} = -1$$

(2) Рассмотрим графики функций $2x^2 - 5x + 3$ и $2x^2 + 2x + 1$.

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{8} = \frac{1}{8}; \quad f(0) = 3$$

$$x_0 = -\frac{-5}{8} = \frac{5}{8}$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$D = -4 \Rightarrow y_0 = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}; \quad g(0) = 1$$

$$x_0 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{при } x > 0 \quad g(x) > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

$$\text{при } x < 0 \quad f(x) > 3 \Rightarrow \sqrt{f(x)} > \sqrt{3} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

где x из решения
системы 2-х уравнений

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{при } x=0: \sqrt{3} + \sqrt{1} = 4 - \text{не верно}$$

\Rightarrow ур-ние 2 не лев. корни

$$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$\text{Проверка: } \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{8}{49} + 3} = \sqrt{3 - \frac{62}{49}} =$$
$$= \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = \sqrt{\frac{8 + 49 + 28}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = 0 = 2 - 7 \cdot \frac{2}{7} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{лев. корни}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

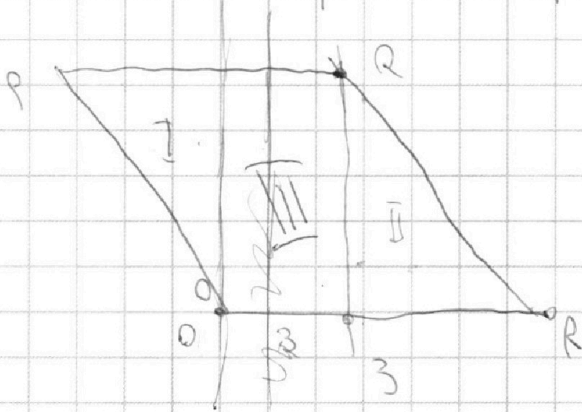
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Геометрически изобразим эти параллельные и поделим его на 2 части

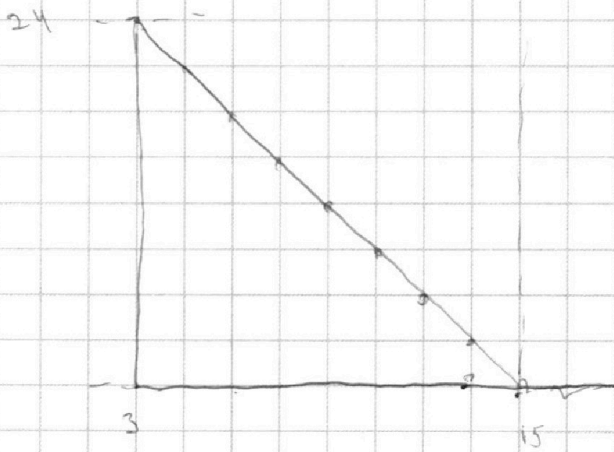


Объём вытекает из 2 частей:

I и II.

Для начала будем считать скорость потока в 1 час. Это, что в другой системе исс - из р - сфера центра и под углом в 45 градусах от центра - и.е. диаметр. Тогда вычитаем часть из I и II.

Будем для удобства считать часть из 2-ой части:



Известно, что $\angle QRO$ и $\angle ORP$ -

- взаимно перпендикулярны.

$$\angle ORP = \angle RQP = 45^\circ$$

Тогда выносим
геометрически изобразим

параллельными.

Будем считать часть $\angle QRO$ сфера на 45 и для $\angle ORP$.

Итак, часть $\angle QRO$, $\angle ORP$. $\angle QRO$ и $\angle ORP$ - части $\angle QRO$. Также сфера

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

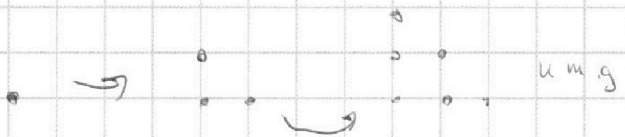
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Теперь расш. уч.-ник из точек уже даны. справа начеб.



Возьмем, самая левая точка, т.е. как будем считать на y_0 ряду:

$$(3; 0), \text{ где } (0; 0) - 2; \text{ где } (1; 0)$$

$$\text{где } (3; 0) - 2; \text{ где } (7; 0) - 3 \text{ и т.д. до } 7, \text{ и т.д. на } y_1$$

↑
взяв все из него, что на канале через. без учета 1

Точка из 7 вычленил

$$\Rightarrow \text{На } y_0 \text{ ряду } 1 + \dots + 7 + 7 \text{ (или } 1 + \dots + 7 + 3 \cdot 3 \text{)} - 10 \text{ точек ряда}$$

$$\text{на } y_1 \text{ ряду } 1 + \dots + 7 + 7 \cdot 2 - 9 \text{ точек ряда}$$

$$\text{на } y_2 \text{ ряду } 1 + \dots + 7 + 7 \cdot 3 - 8 \text{ точек ряда}$$

$$\text{на } y_{10} \text{ ряду } 1 \text{ точка}$$

на ряду выше точка не будет \Rightarrow ищем сумму в 1 часть:

$$1 + 1 + 2 + 1 + 2 + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + 7) + 7 \cdot 6 =$$

$$= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 70 + 31 + 25 = 95 + 31 = 126 \text{ точек}$$

$$\Rightarrow \text{в } 2\text{-х частях } (126 \cdot 2 = 252 \text{ точки})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Мы считаем, что все верно, т.к. выражения "1" - "2" и "2" - "1" отрицательны

$$\Rightarrow x_2 \geq x_1$$

$$y_2 \geq y_1$$

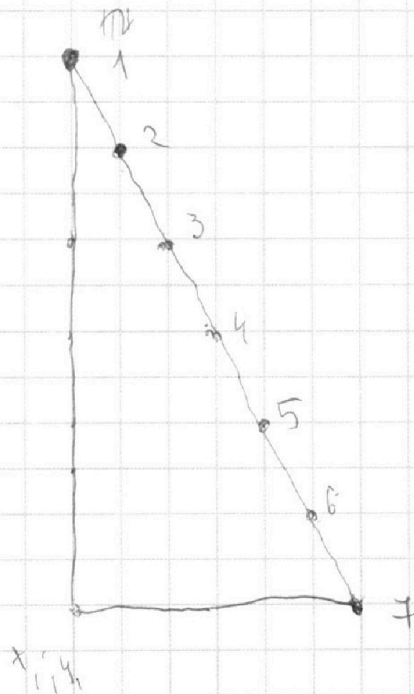
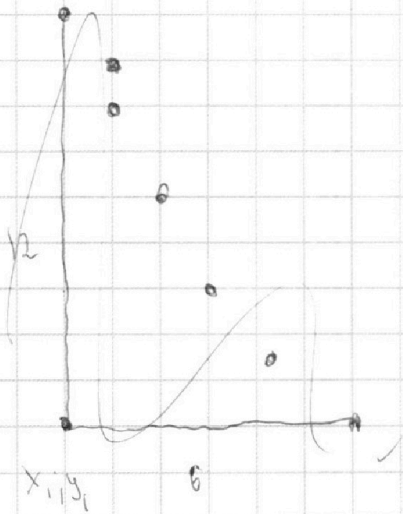
Получим решение уравнения $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

В итоге на отрезках отрезки: $(0; 12); (1; 10); (2; 8); (3; 6); (4; 4);$

$(5; 2); (6; 0).$

Три из них будут больше по сравнению с другой частью. ~~Итого~~

Упорядочим эти точки:



Все 7 вариантов верны.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решить задачу методом вычитания, для I - II, II - III, I - III. и вычислить из III.

Важно, что такие же числа, для III - II и I и III вы-во надо отнять.

Для III - II:

Для первого 12 раз по 4 вы-во вычитаем: $4 \cdot 4 = 16$, и т.д. все вычитаем.

Все вычитаем. Для второго вычитаем вы-во вычитаем вычитаем. на 1.

$$4 \cdot 7 \cdot 11 + (6 + 1) = 4 \cdot 7 \cdot 11 + 21 \quad \text{для III - II}$$

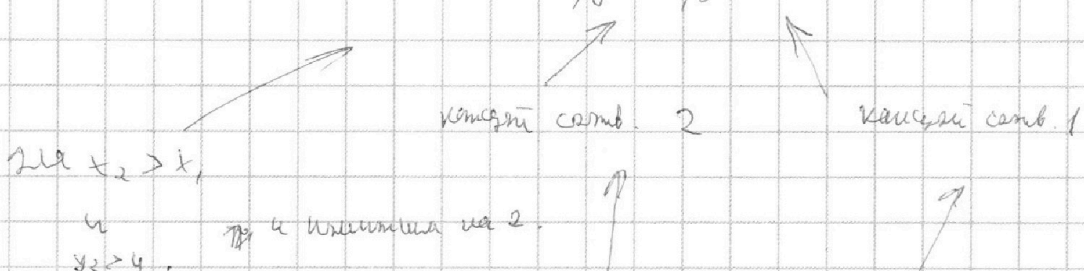
$$\Rightarrow \text{для II - III} + \text{III} + \text{III} - \text{I} : 2(324) = 658 \text{ вычитаем}$$

Сложим, для I - II:

$\Delta y = 0, 1, 2, 3, 4$ $\Delta y \geq 4$ Δy может быть только 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

-1; 0; 1; 2; 3; 4

\Rightarrow все вычитаем II - I вычитаем на $y = 0, y = -1, y = -2$



$$23 \cdot 2 + 1 - 2 = 46 + 1 - 2 = 45$$

$$45 - 1 = 44$$

$$25 - 2 = 23$$

$$\text{Итого: } (68 + 23) \cdot 2 = 91 \cdot 2 = 182$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала разберемся со 2 окружностями:

то 2 окружности соприкасаются

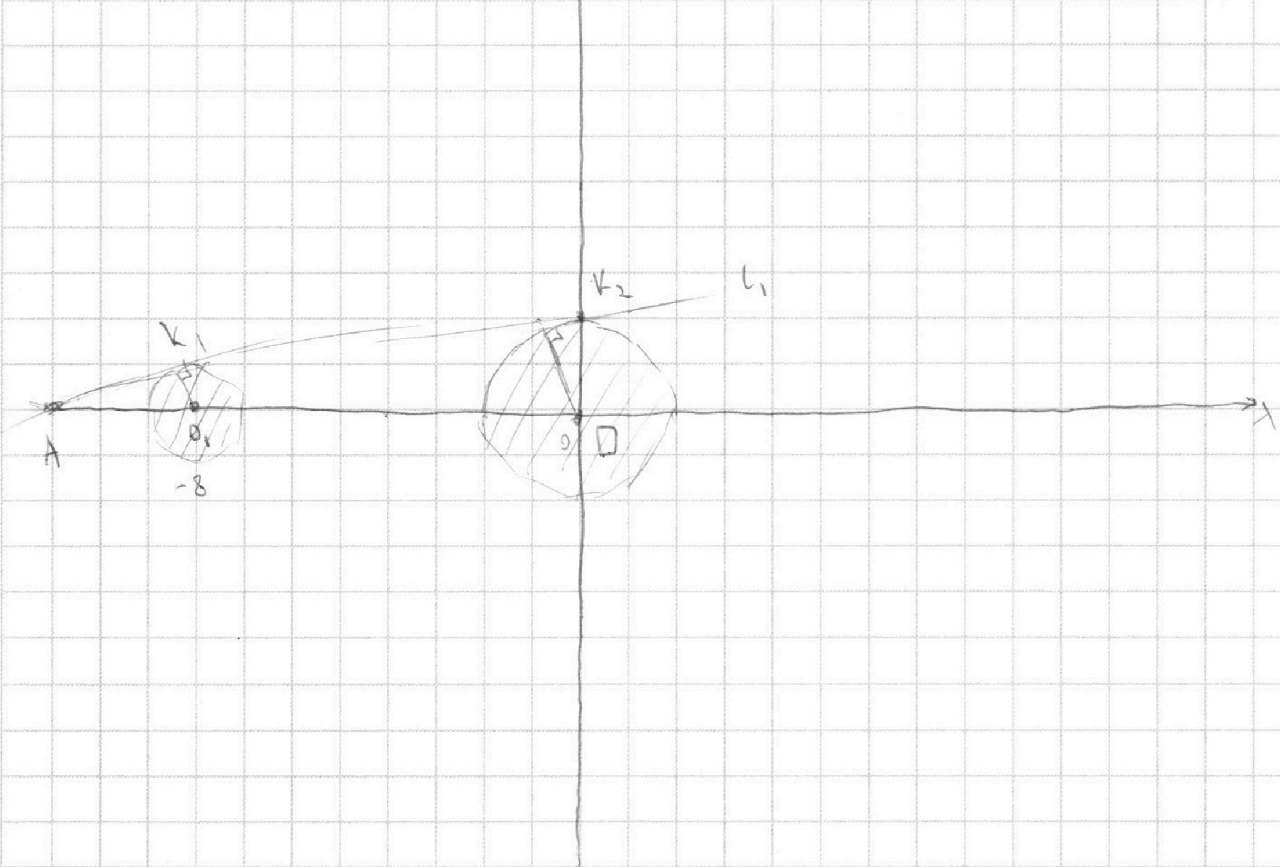
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

← р-на ГМТ 2-х крив. 2-го вида, с
v=2.

↗ р-на ГМТ 1-го вида, с
v=1

Изообразные на коор. плоскости:

x y



Пл.х. принадлежат прямой или не принадлежат либо 1, либо 0, либо бес.

или - во обш. виде, но $ax - y + 10b = 0$ - касательная к внешней окружности;

или другая касательная. Всего у 2-х окружн. имеют либо 1 касательная:

2 внешние и 2 внутренние.

Для начала найдем 1 внешнюю. - l_1

Прямая она через O_1 и O_2 . Тогда $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$; $AO_1 + 8 = AO_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

значит, $A_0 = 16$; $A_0 = 8 \Rightarrow m(-16; 0) \in \text{цели}$

$$-a \cdot (-16) - 0 + 10b = 0$$

$$16b = 16a \Leftrightarrow 5b = 3a.$$

По т. Пифагора: $AK_1 = \sqrt{64^2 - 12^2} = 3\sqrt{47} \Rightarrow \text{tg } \angle K_1 A_0 = \frac{1}{3\sqrt{47}} = \frac{OK_2}{16} \Rightarrow OK_2 = \frac{16}{3\sqrt{47}}$

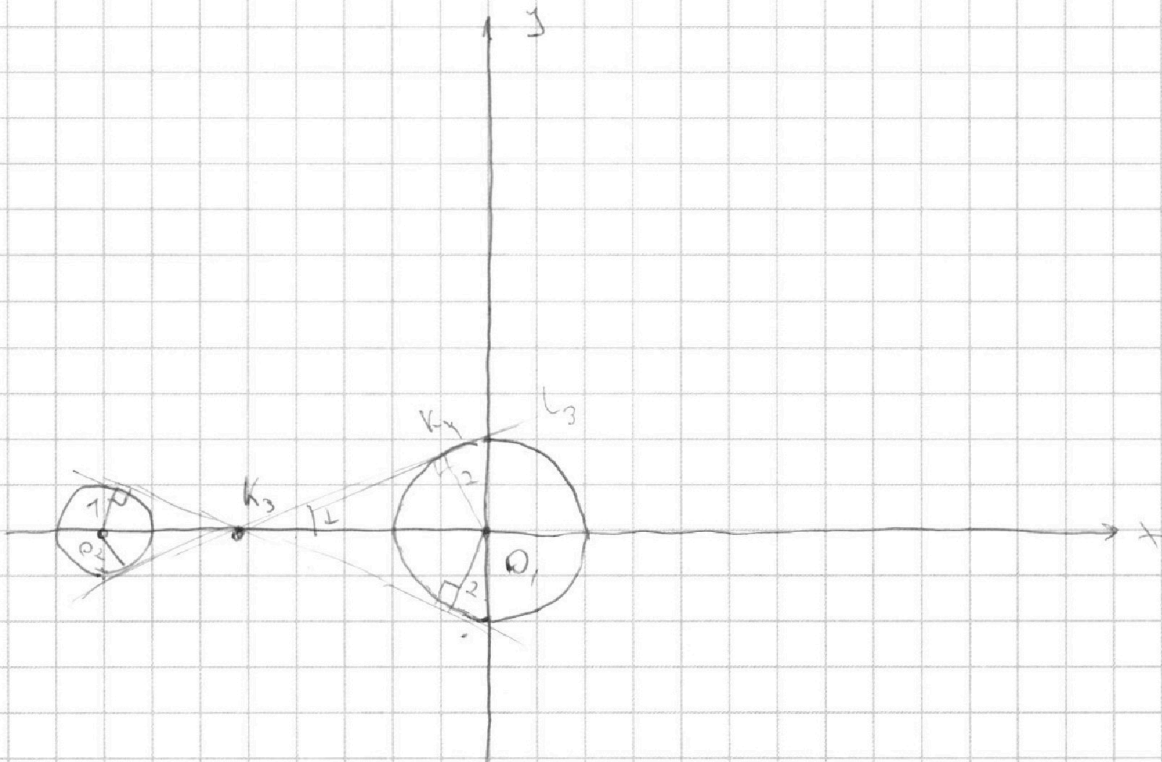
$$\Rightarrow a \cdot (0) - \frac{16}{3\sqrt{47}} + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16}{3\sqrt{47}}$$

$$b = \frac{16}{30\sqrt{47}} = \frac{8}{15\sqrt{47}} \Rightarrow a = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{15\sqrt{47}} = \frac{1}{3\sqrt{47}}$$

Максимум и "минимум" функции. кас. $\Rightarrow a = \pm \frac{1}{3\sqrt{47}}$.

Случай с "выпукл." функцией кас.:



Из условия $\frac{O_2 K_3}{O_1 K_3} = \frac{1}{2}$; $O_2 K_3 + O_1 K_3 = 8 \Rightarrow O_1 K_3 = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \text{т. } \left(-\frac{16}{3}; 0\right) \in \text{прям. } L_3$$

$$a \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) - 0 + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16a}{3} \Leftrightarrow 5b = \frac{8a}{3}$$

$$\text{По т. Пифагора } k_3^2 k_4^2 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{16^2 - 12}{9}} = \sqrt{\frac{161}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{11} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{3}{\sqrt{11}} = a.$$

Значит и координаты концевых точек $y=0 \Rightarrow a = \pm \frac{3}{\sqrt{11}}$

Ответ: $a = \pm \frac{3}{\sqrt{11}}$; $a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$

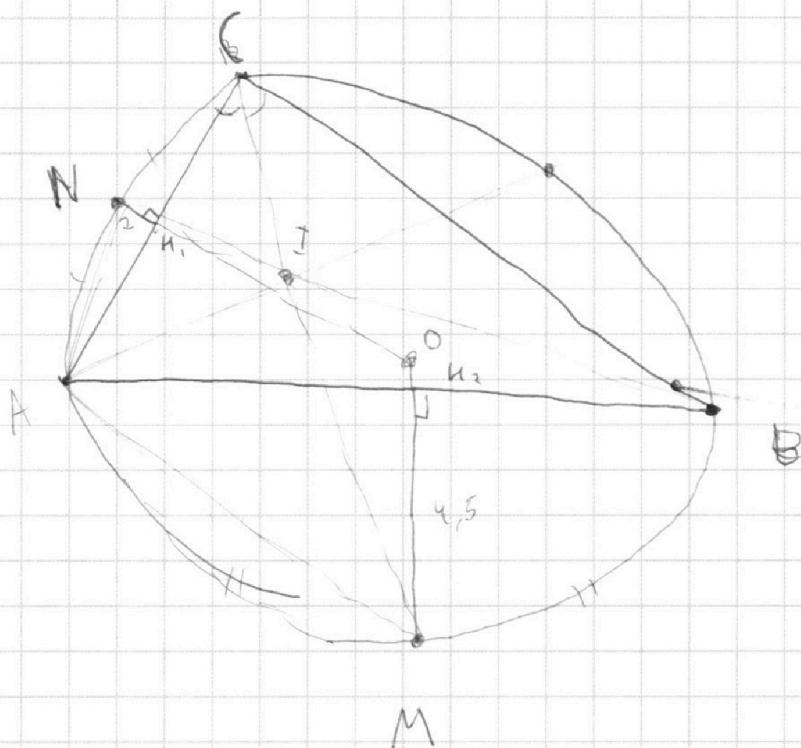
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) BN и CM пересекаются в O . Высоты HN_1 и CM_1 , и.к.

BN и CM - бис-сы : на равн. кр. равные углы

2) по теореме о треугольнике : $AN = NI$ и $AM = MI$.

3) $AN = NC \Rightarrow NH_1$ - сер. пер. к AC

аналогично MH_2 - сер. пер. к $AB \Rightarrow OH_1$ и OH_2 пересекутся в O

также $OH_1 = OH_2 + 2,5$, и.к. $OH_1 = OH_2$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

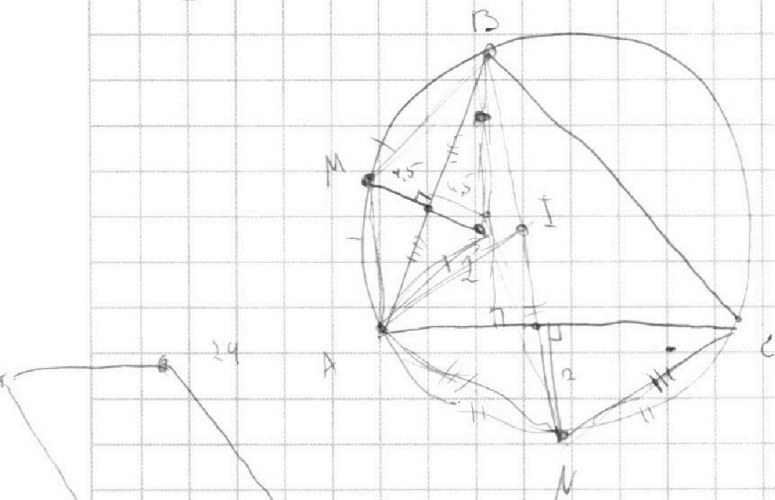
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

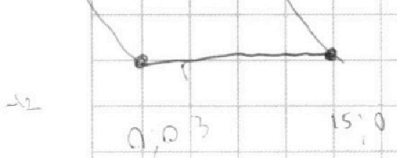


$\theta I - ?$

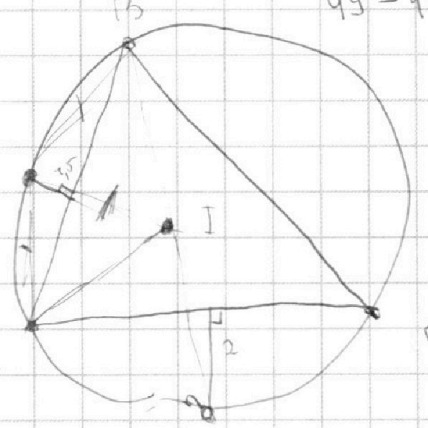
$$M \equiv 8$$

$$a = 7 \quad b = 1$$

$$\frac{49 - 42 + 1}{8}$$



кажд $m \rightarrow$ инт. А



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$m \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right)$$

$$\frac{2+3}{a+b} \quad (a-b)^2 - 3ab$$

~~2M~~

$$a \equiv k$$

$$b \equiv m-k$$

mod m .

$$a \equiv b$$

$$k \neq 0$$

$$\begin{cases} a^2 \equiv k^2 \\ 6ab \equiv 6k(m-k) \\ b^2 \equiv (m-k)^2 \end{cases} \equiv k^2 + 6k(m-k) + (m-k)^2 = k^2 + 6km - 6k^2 + m^2 - 2mk + k^2 = m^2 + 4mk - 4k^2 \equiv$$

$$0 \equiv 0 \pmod{m} \quad k \equiv 0 \pmod{m}$$

$$k \equiv 0 \pmod{m} \quad 4k^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$P = 2(x_2 - x_1) + 2(y_2 - y_1)$
 $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$
 $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$
 $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$x_2 > x_1$
 $y_2 > y_1$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$
 $2x_2 + y_2 = 12 + 3x_1$

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$
 $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sin \alpha} = 10$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{10}$

$2n + K = 12$
 $n = \frac{12 - K}{2} = 6 - \frac{K}{2}$

$K = 0, n = 6$
 $K = 2, n = 5$
 $K = 4, n = 4$
 $K = 8, n = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}$
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{62.5} \cdot 7^{64}$$

$$abc = \sqrt{2 k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$\Rightarrow 2k_1 k_2 k_3$ - квадрат ком. числа, иначе abc - не целое, так как ac не делится

1) $k_1 k_2 k_3 = 2$: $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$, $b = 2^6 \cdot 7^5$ - не целое
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

2) $k_1 k_2 k_3 = 8$: $abc = 2^{27} \cdot 7^{32}$, b - не целое.
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

3) Значит, $k_1 k_2 k_3$ простое 7 , иначе b - не целое: $k_1 k_2 k_3 = 7^2 \cdot 2$

Пусть: $abc = 2^{26} \cdot 7^{33}$, b не целое.
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\Rightarrow k_1 k_2 k_3 \geq 7^{10}$, иначе b не целое.

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$. $b = 2^6$
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}$

$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 \geq 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$
 $k_1 = 2 \cdot 7^5$
 $k_2 = 7^5$
 $k_3 = 1$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$
 $k_1 = 2 \cdot 7^5$
 $k_2 = 7^5$
 $k_3 = 1$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$
 $k_1 = 2 \cdot 7^5$
 $k_2 = 7^5$
 $k_3 = 1$

$2 k_1 k_2 k_3 = 2^2 \cdot k_2^2 \cdot 7^{10}$

$k = 2 \cdot 7^{10}$

$2k = 2^2 \cdot 7^{10}$

$k_1 = k_2 = k_3$

$k_1 k_2 k_3 = k_3^3 \cdot 2 \cdot 7^{10}$

$b = \frac{2}{k_3}$

$k_1 = k_2 = k_3$
 $k_3 = 2 \cdot 7^5$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$
 $ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}$
 $ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

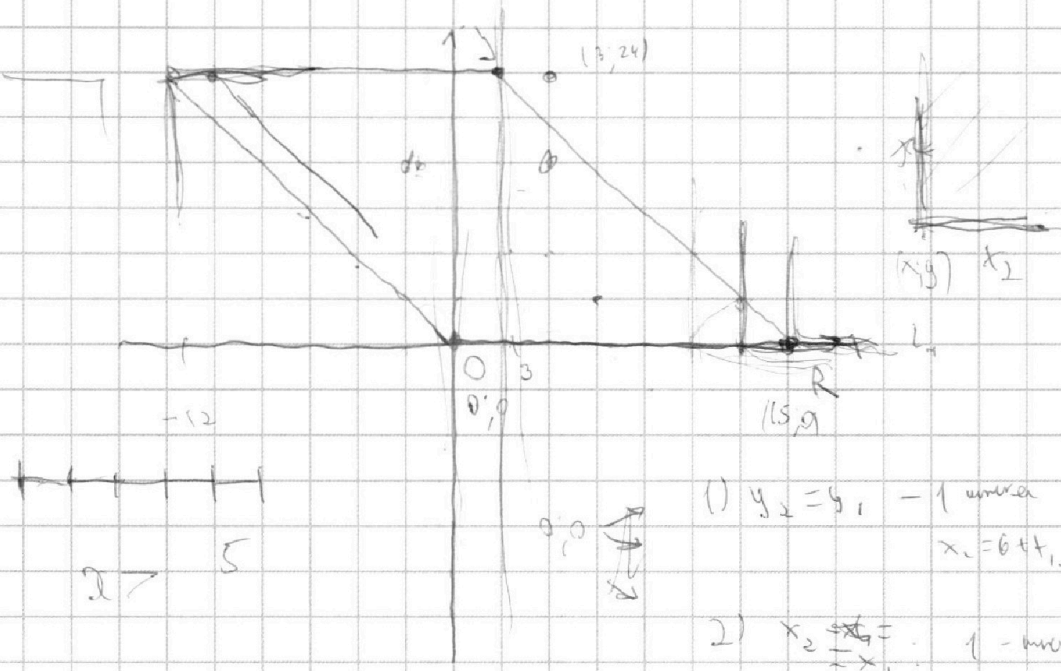
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$y_2 = y_1$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$1) x_2 > x_1$$

- 0,0
- 1,0
- 5,2
- 4,4
- 3,6
- 2,8
- 1,0
- 0,12

$$y_2 = y_1$$

$$x_2 > x_1 \text{ - } x_2 \text{ больше } 5 \text{ мин.}$$

$$x_2 < x_1$$

$$x_1 < x_2$$

$$x_2 < x_1$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) = 12 + 2(x_1 - x_2)$$

x_1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, сумма:

$$252 + 658 + 182 = 260 + 380 + 660 - 2 = 440 + 660 - 2 = 1100 - 2 = 1098 \text{ мм}^2$$



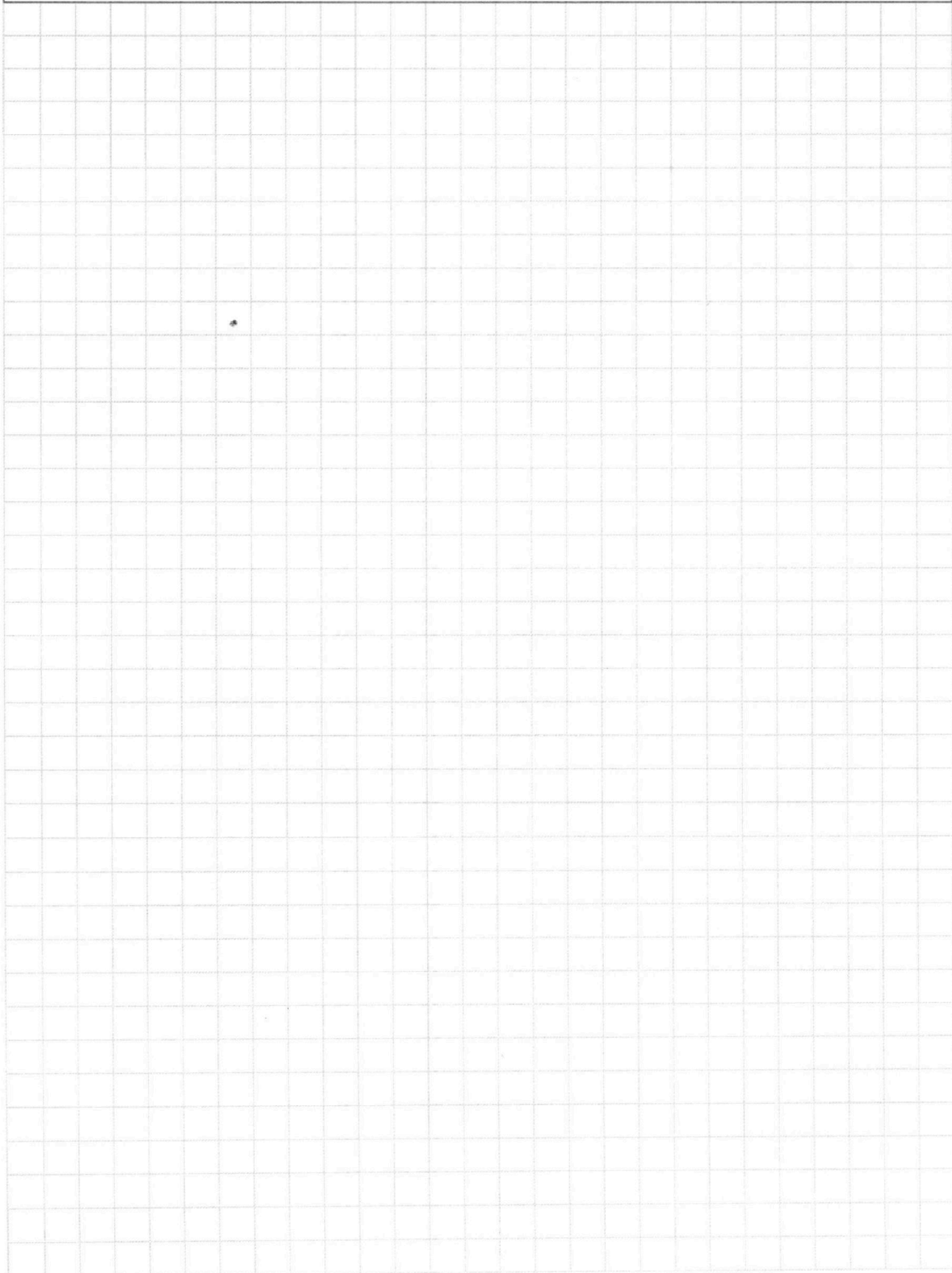
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a}{c} = 2^{82} \cdot 7^{227}$$

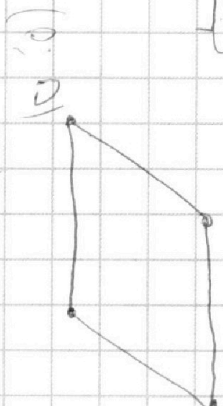
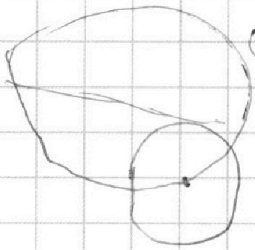
$$\frac{c}{a} = 2^4 \cdot 7^7$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 7^{44}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{22}$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{15}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^7$$



$$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{12}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{k_3}} \cdot 2^5 \cdot 7^7$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{2}$$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{8x}{\sin x} = 10$$

$$\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 7^2$$

$$\frac{k_1 k_2}{k_3} = 7^{10}$$

С15

$$k_1 k_2 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot k_3$$

$$2k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 7^{10} \cdot 2 \cdot k_3^2$$

$$\frac{2k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{k_3}{k_2} = 2 \cdot 7 \quad k_3 = 2k_2$$

$$ab = 7 \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} = 2^{11} \cdot 7^{20}$$

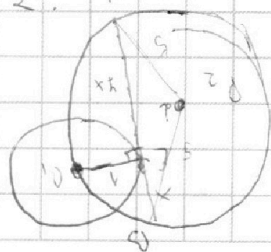
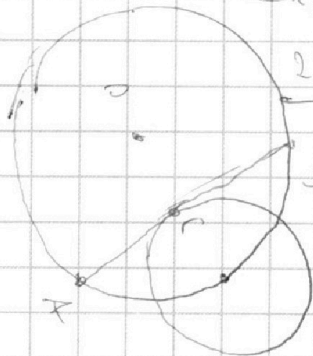
$$bc = 2^{14} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^9 \cdot 2^{21} \cdot 7^{34}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{14}$$

$$b = 2^5$$



$$\frac{4-5}{2} = 10$$

$$\frac{5-6}{2} = 11$$

$$\begin{matrix} 1-10 \\ 2-9 \\ \vdots \\ 11-10 \end{matrix}$$

18

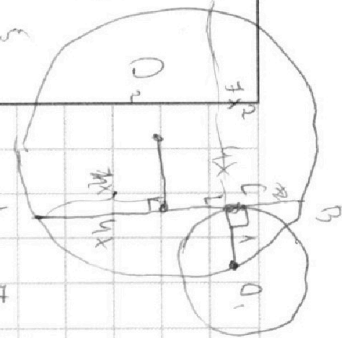
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\left. \begin{aligned} ab &= k_1 \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} \\ bc &= k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14} \\ ac &= k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{27} \end{aligned} \right\} *$$

$$\begin{aligned} 37 + 14 &= 51 \\ 27 + 20 &= 47 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$c^2 = \frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44}$$

$$abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{40} \cdot 7^{32}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1 \quad \begin{aligned} ab &= 2^{11} \cdot 7^{10} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{14} \end{aligned}$$

$$\frac{k_2 k_3}{k_1} \geq 2$$

$$\frac{k_2 k_3}{k_1} = 2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7; \quad \frac{b}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^7; \quad c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 \\ k_3 &= 2 \\ k_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k_3}{k_2} \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$c = a \cdot 2^3 \cdot 7^7 = 2^6 \cdot 7^{22} \cdot b$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{20} \cdot b \cdot \frac{k_3}{k_2}$$

$$b \neq a$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{15}$$

$$a = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$k_1 k_2 k_3 \geq 2$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 2$$

$$a = 2 \cdot 7^6 \quad b = 2 \cdot 7^{13}$$

$$\begin{aligned} ac &= 2^{21} \cdot 7^{37} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{44} \\ ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{c} = 2 \cdot 7^1$$

$$\frac{c}{b} = \frac{k_3}{k_1} \cdot 2^6 \cdot 7^{27} \quad | \cdot bc$$

$$\frac{a}{c} = 2 \cdot 7^7$$

$$b = \frac{2^{11} \cdot 7^{14}}{c}$$

$$c^2 = \frac{k_3 k_2}{k_1}$$

$$b = \frac{k_2 \cdot 2^{14} \cdot 7^{14}}{c}$$

$$\frac{k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{a}$$

$$b = \frac{2^{11} \cdot 7^{10}}{a} \Rightarrow ac = 2^2$$

$$\frac{k_2 \cdot 2^{14} \cdot 7^{14}}{c} = \frac{2^{11} \cdot 7^{10}}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x) S.$$

$$-(7x - 2)$$

$$-(7x - 2) + (7x - 2)$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$x \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} = \frac{-62}{49} + 3 =$$

$$\frac{5 \cdot 17}{49} = \frac{\sqrt{151}}{7} =$$

$$3 \cdot 49 - 62 =$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$= \frac{85}{49}$$

$$y_0 = -\frac{-4}{4} = 1$$

$$(50 - 1) \cdot 3 =$$

$$y_8 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$= 150 - 3 =$$

$$= 147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$28$$

$$\frac{46}{2} = 23$$

$$2 \cdot 680 - 2 = 650$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1.$$

$$y_8 = -$$

$$2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{4}$$

$$147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cos$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x^2 + 3}$$

$$y_8 = \frac{1}{2}$$

$$y_8 = \frac{1}{2}$$

$$13 \text{ (units)}$$

$$y^2 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 =$$

$$= (2x + 1)(x + 3) =$$

$$(2x + 3)(x + 1) = 0$$

$$= 2x^2 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3$$

$$x = -\frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{5}{2} + \frac{8}{35}$$

$$101 =$$

$$4y = 0; 1, 2, 3$$

$$\frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{30}{29} = \frac{30}{29}$$

$$24$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{4} = -1$$

$$x = \frac{-5 + 1}{4} = -1$$

$$x = \frac{-5 - 1}{4} = -2$$

$$x = -3$$

$$25$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$

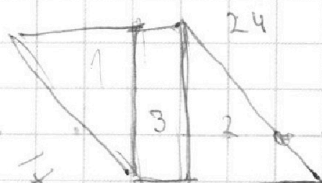
$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$



$$24$$

$$25$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

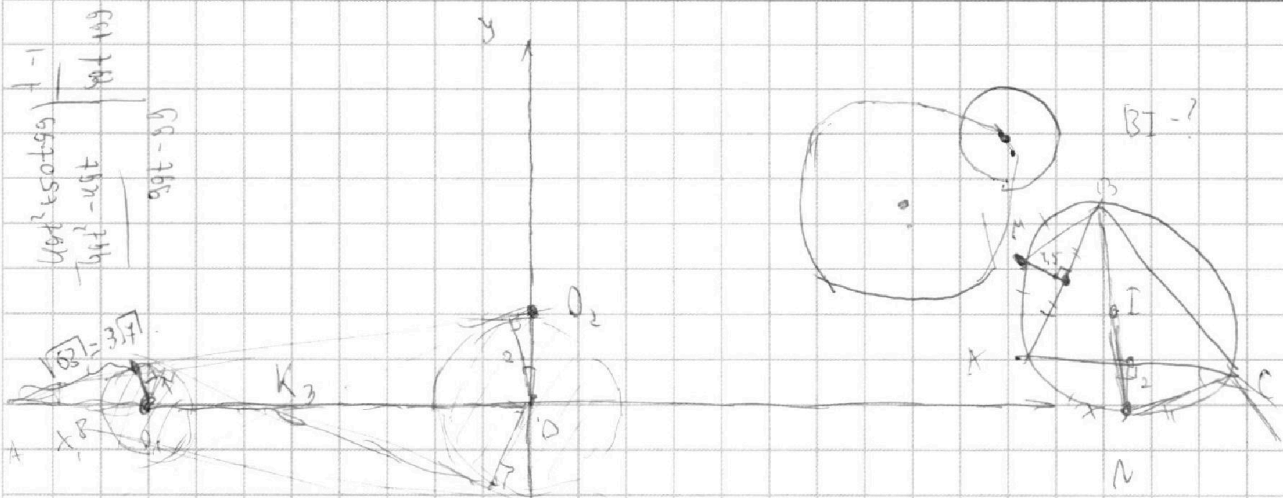
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AO_1 = 8$

$\frac{1}{2} = \frac{AO_1}{AO} \Rightarrow AO_1 = AO \cdot \frac{1}{2}$

$AO_1 + 8 = AO$

$\frac{1}{2} AO + 8 = AO \Rightarrow AO = 16$

$2 \cdot 122 = 244$

2 решения

$\Rightarrow ax - y + 10 = \dots$

1) $(x+3)^2 + y^2 \leq 1$

линия окружности

$x^2 + y^2 \geq 4$

$\frac{266 - 12}{9} = \frac{254}{9}$

$x^2 + y^2 - 4 = ax - y + 10$

$\sin \alpha = \dots$
 $\cos \alpha = \dots$

$x^2 - ax + y^2 + y - 14 = 0$

$\tan \alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{OO_2}{16}$

$AO_1 = \frac{1}{2} \cdot AO$

$AO_2 = \frac{16}{3\sqrt{3}}$



$\frac{1}{2}$

$AO = 16$

$AO_1 = 8$

$y = \frac{1}{3\sqrt{3}}x + \frac{20}{3\sqrt{3}}$

$\frac{1}{3\sqrt{3}}(x+6) = x^2 + y^2 - 4$

$\frac{16}{3} : \frac{8}{3}$

Vertical text on the left side of the page, possibly a page number or reference, including the number 50.