



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Чистовик

Пусть $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ (1) и $a = 2^x \cdot 7^y$ (4),
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$ (2)
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$ (3)

тогда $b = 2^{14-x} \cdot 7^{10-y}$ (из (1) и (4)) \Rightarrow из (2)
 $c = 2^{20-x} \cdot 7^{37-y}$ (из (3) и (4)) \Rightarrow из (2)

$$\begin{aligned} 34-2x &= 17 & 47-2y &= 17 \\ x &= \frac{17}{2} & y &= 15 \\ x &\notin \mathbb{Z} & b &= \frac{2^{14-x}}{7^{-5}} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 2^{14-x} \cdot 7^{10-y} \cdot z, \quad \text{где } z = 2^m \cdot 7^n.$$

из (2)
 $\Rightarrow 14-x+m+20-y=17$
 $x = \frac{17+m}{2} \in \mathbb{Z}$

~~Минимальная степень будет, если $14-x+m=0$
 $14 - \frac{17+m}{2} + m = 0$
 $28 - 17 - m + 2m = 0$
 $m = -11$
 $x = 3$~~

Минимальная степень будет, если $14-x+m=0$

$$\begin{aligned} 14 - \frac{17+m}{2} + m &= 0 \\ 28 - 17 - m + 2m &= 0 \\ m &= -11 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

\Rightarrow из (2) $10-y+n+37-y=17$
 $y = \frac{30+n}{2} \in \mathbb{Z}$

Минимальная степень будет, если $10-y+n=0$

$$\begin{aligned} 20 - 30 - n + 2n &= 0 \\ n &= 10 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

$$abc = 2^x \cdot 7^y \cdot 2^{20-x} \cdot 7^{37-y} \cdot 2^{\frac{14-x}{2}} \cdot 7^{\frac{10-y}{2}} \cdot 2^{-11} \cdot 7^{-11} = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Ответ: $2^{20} \cdot 7^{37}$

стр. 1 из 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Числовик

№2

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)(a-7b)+8b^2} = \frac{\frac{1}{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}-7\right)+8} = \frac{\frac{a}{b}+1}{b\left(\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}-7\right)+8\right)}$$

т.к. $\frac{a}{b}$ - не сократимая дробь

Можно поделить на $\left(\frac{a}{b}+1\right)$, если $8 : (a+b)$.

$$m = \left(\frac{a}{b}+1\right) \cdot b = a+b \quad (\text{т.к. сначала сократим на } b)$$

т.е. $8 : m \Rightarrow$ наибольшее $m=8$ (при котором

можно сказать, что и числитель, и знаменатель можно сократить на m).

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чистовик

$$t = 2x^2 + 2x + 1$$

$$k = 2 - 7x$$

$$t + k = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k$$

$$\begin{cases} t+k = (k+\sqrt{t})^2 \\ k+\sqrt{t} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + t \\ k+\sqrt{t} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(k+2\sqrt{t}-1) = 0 \\ k+\sqrt{t} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-7x = 0 & (1) \\ 2-7x + 2\sqrt{2x^2+2x+1} - 1 = 0 & (2) \\ 2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$(1): x = \frac{2}{7} \quad \left(\sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2\cdot\frac{2}{7} + 1} + 2 - \frac{7\cdot 2}{7} > 0 \right)$$

- верно

$$(2): 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1$$

$$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1) = 49x^2 - 14x + 1 \\ 7x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \geq \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = 121 + 123 = 244$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} < 0 \quad x \geq \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{11+2\sqrt{61}}{41} = x$$

$$1 \neq 2x^2+2x+1$$

$$0 \neq 2x^2+2x$$

^{mk.}
(x > 0)

$$\Rightarrow 2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 0 \text{ не выполнено}$$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

стр. 2 из 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

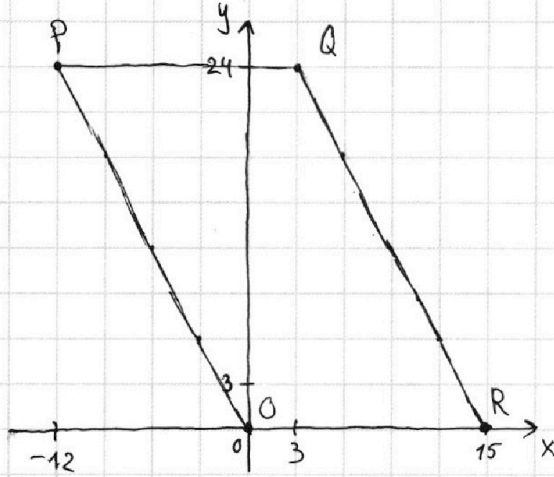
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чистовик

№5



Всего целых точек:

$$24 \cdot 15 = 360.$$

$$y_1 \in [0; 24] \text{ и } y_2 \in [0; 24].$$

$$x_1 \in [-12; 15] \text{ и } x_2 \in [-12; 15].$$

$$y_2 - y_1 = 12 + 2(x_1 - x_2) \leq 24$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

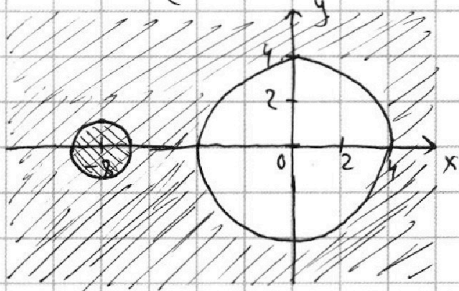


Чистовик

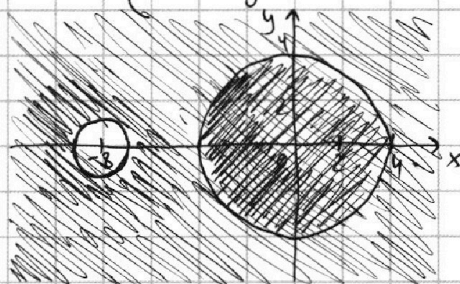
N6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

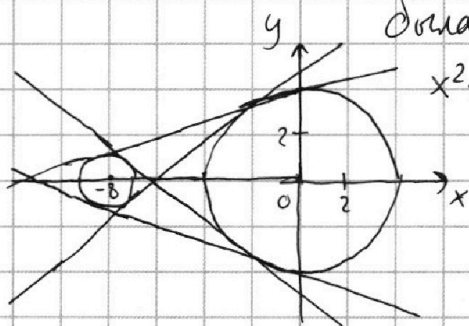
(2): 1)
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$



2)
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$



Чтобы было у системы ровно 2 решения, необходимо, чтобы прямая вида $y = ax + 10b$ была быстрой касательной 2-ух окр.



$x^2 + y^2 = 4$ и $(x+8)^2 + y^2 = 1$.

4 варианта касательных

1)
$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 10b \\ (x_1+8)^2 + y_1^2 = 1 \end{cases} - 1 \text{ реш. (т.е. 1 пересек.)}$$

$$x_1^2 + 16x_1 + 64 + a^2x_1^2 + 20abx_1 + 100b^2 = 1$$

$$(a^2+1)x_1^2 + 2(8+10ab)x_1 + 63+100b^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 64 + 160ab + 100a^2b^2 - 63a^2 - 63 - 100a^2b^2 - 100b^2 =$$

$$= 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0 \quad (\text{т.к. 1 реш.})$$

$$63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 6400a^2 - 6300a^2 + 100 \geq 0$$

$$b = \frac{80a \pm 10\sqrt{a^2+1}}{100} = \frac{8a \pm \sqrt{a^2+1}}{10} \quad (a^2 \geq -1 \text{ (верно для } \forall a))$$

см. продолжение стр. 3 из 7

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Чистовик

$$2) \begin{cases} y_2 = ax_2 + 10b \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases} \quad \bullet \quad 1 \text{ реш. (1 пересек)}$$

$$x_2^2 + a^2 x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 - 4 = 0$$

$$(a^2 + 1)x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 + 4 - 100b^2 = 0$$

$$a^2 + 1 = 25b^2$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$1. \quad \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = 8a$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64a^2 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$2. \quad \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$3\sqrt{a^2 + 1} = 8a$$

$$\begin{cases} 9a^2 + 9 = 64a^2 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$3. \quad -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$3\sqrt{a^2 + 1} = -8a$$

$$\begin{cases} 9a^2 + 9 = 64a^2 \\ a \leq 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$4. \quad -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = -8a$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64a^2 \\ a \leq 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{1}{\sqrt{63}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

стр. 4 из 7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

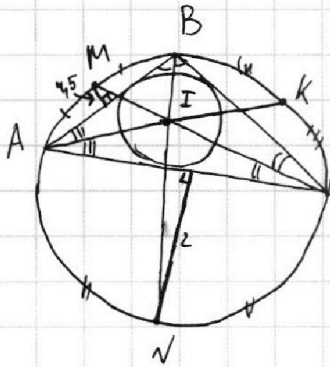
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

№ 7

AI - ?



1) $\angle ABN = \angle NBC$
 $\angle ACM = \angle MCB$ (т.к. опираются на равные дуги)

2) $\Rightarrow BN \cap MC = I$ (I - центр вписанной окр.)

3) $K \in AI$

~~BAK = KAC~~ $\angle BAK = \angle KAC$

$\Rightarrow BK = KC$ (т.к. равные углы)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

~~$$a = 2^x \cdot 7^y$$

$$c = 2^{20-x} \cdot 7^{37-y}$$

$$b = 2^{14-x} \cdot 7^{10-y}$$

$$x = \frac{17}{2}$$

$$y = 15$$~~

~~$$bc = 14^{17} a^x$$

$$ab = 14^{10} 2^4 y$$

$$ac = 14^{20} \cdot 2^{17} z$$~~

~~$$a = 2^x \cdot 7^y$$

$$c = 2^{20-x} \cdot 7^{37-y}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} z$$

$$b = 2^{3+x} \cdot 7^{20+y}$$~~

$$a = 2^x \cdot 7^y$$

$$c = 2^{20-x} \cdot 7^{37-y}$$

$$b = 2^{14-x} \cdot 7^{10-y} z$$

$$z = 2^m \cdot 7^n$$

$$34 - 2x = 17$$

$$\frac{17+m}{2} = x$$

$$m = 1$$

$$x = 9$$

$$10 - y + 37 - y = 17$$

$$30 = 2y$$

$$y = 15$$

$$n = 5$$

$$2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^5 \cdot 2 = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$14 - x + m \geq 0$$

$$14 \geq -m + x$$

$$14 \geq -m + \frac{17+m}{2}$$

$$28 \geq -2m + 17 + m$$

$$15 \geq -m$$

$$m \geq -15$$

$$\frac{45+17}{2} = 31$$

$$45 + 11 - 31 = 25$$

$$4 + 3 = 7$$

$$5 + 1 = 8$$

$$10 - y + n + 37 - y = 17$$

$$40 = 2y + n$$

$$y = \frac{40-n}{2}$$

$$14 - 1 - 8 = 5$$

$$14 + 1 - 9 = 6$$

$$14 - 3 - 7 = 4$$

$$14 - x + m = 0$$

$$14 - \frac{17+m}{2} + m = 0$$

$$28 - 17 - m + 2m = 0$$

$$11 + m = 0$$

$$m = -11$$

~~$$10 - y = n$$

$$y = 10 - n$$~~

$$20 + 2n = 40 - n$$

$$3n = 60 \quad n = 20$$

$$14 - 3 - 11 = 0$$

$$10 - y + n = 0$$

$$y = 10 + n$$

$$y = n + 10$$

$$2n + 20 = 30 + n$$

$$n = 10$$

$$10 - 30 + 20$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{19} \cdot 7^{19}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$a = 2^x \cdot 7^y$$

$$b = 2^{3+x} \cdot 7^{4+y}$$

$$c = 2^z$$

~~$$xy = 37$$~~

$$x = \frac{13}{2}$$

$$y = 15$$

$$x = \frac{12-m}{2} \quad m=1$$

$$2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^4 \cdot 2^{22} = \sqrt{x^2+1} \cdot \sin(\alpha+\gamma)$$

abc = ?

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)(a-7b)+8b^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \cdot \frac{a+b}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-7b)+8b^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a^2+2ab+b^2 = m^2 x_1^2$$

$$a^2-6ab+b^2 = m^2 x_2^2$$

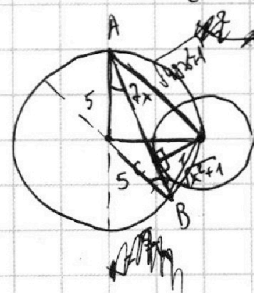
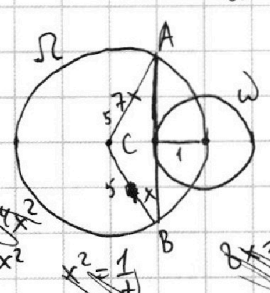
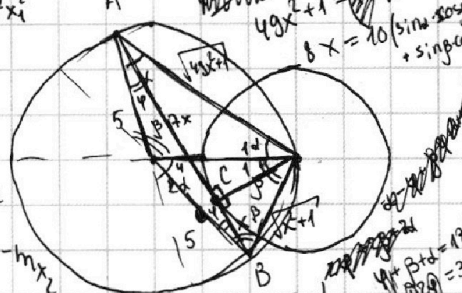
$$8ab = m^2 x_1^2 - m^2 x_2^2$$

$$\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-7b)+8b^2} = \frac{(\frac{a}{b}+1)^2}{(\frac{a}{b}+1)(\frac{a}{b}-7)+8}$$

$$b^2 = k a^2$$

$$b^2 - b^2 = k a^2 - k a^2 = \sin(\beta-\gamma)$$

$$8x = 10 \sin(\beta-\gamma)$$



$$ab = \frac{m^2 x_1^2 - m^2 x_2^2}{8}$$

$$(m x_1 - a) a = \frac{m^2 x_1^2 - m^2 x_2^2}{8}$$

$$8 m x_1 a - 8 a^2 = m^2 x_1^2 - m^2 x_2^2$$

$$8 a^2 - 8 m x_1 a + m^2 x_1^2 = m^2 x_2^2$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$t = 2x^2+2x+1$$

$$t-7x = 2x^2-5x$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out equations.~~

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + 7x = \sqrt{2x^2+2x+1} + 2$$

$$2x^2-5x+3 + 14x\sqrt{2x^2-5x+3} + 49x^2 = 2x^2+2x+1+4 + 4\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$14x\sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$\sqrt{t-7x+2} - \sqrt{t} = 2-7x$$

$$\sqrt{t-k} - \sqrt{t} = k$$

$$t-k = (k+\sqrt{t})^2$$

$$k+\sqrt{t} \geq 0$$

$$k-k = k^2 + 2\sqrt{t}k + t$$

$$k^2 + 2\sqrt{t}k + t = 0$$

$$k(k+2\sqrt{t}+1) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1 = 0 \\ 2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

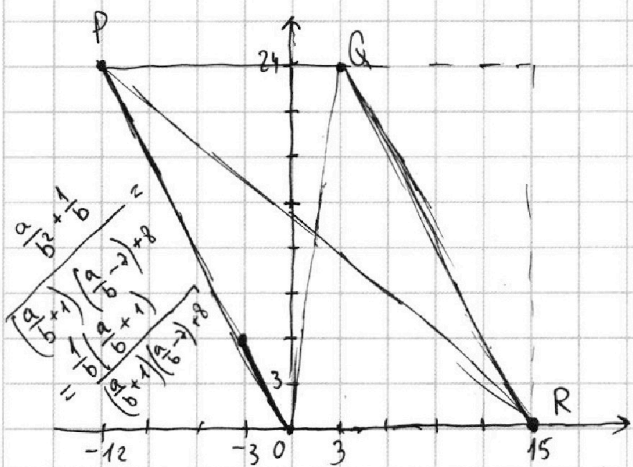
~~$$49x^2 - 42x + 9 = 0$$~~

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 3$$

$$\begin{cases} 4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 42x + 9 \\ 7x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41x^2 - 50x + 5 = 0 \\ x \geq -\frac{3}{7} \end{cases} \quad \frac{D}{4} = 625 - 205 = 420$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{420}}{41} = \frac{25 \pm 2\sqrt{105}}{41}$$



$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} + 1} + 8$$

$$y = kx$$

$$y = kx + b$$

$$24 = -12k + b$$

$$0 = 15k + b$$

$$b = -15k$$

$$-24k = 24$$

$$k = -1$$

$$b = 15$$

$$y = -x + 15$$

$$y_1 \leq 24$$

$$y_1 \geq 0$$

$$2x_1 \geq -y_1$$

$$-2x_1 \leq y_1$$

$$-2x_1 + 30 \geq y_1$$

$$2x_1 - 30 \leq y_1$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$y_2 \geq -2x_2$$

$$2x_1 - 2x_2 + 30 \geq y_2 - y_1 \geq -2x_2 + 2x_1 - 30$$

$$-12k = 24$$

$$y = -2x$$

$$y = -2x + 30$$

$$y_2 = -2x_2 + k$$

$$y_1 = -2x_1 + 14$$

$$y_2 - y_1 = 12 + 2(x_2 - x_1) \leq 24$$

$$2(x_1 - x_2) \leq 12$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$\frac{6+26}{2} \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 27$$

$$12 - 2x_2 + 2x_1$$

$$121 + 244 + 441 = 706$$

$$\frac{121 + \sqrt{67}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

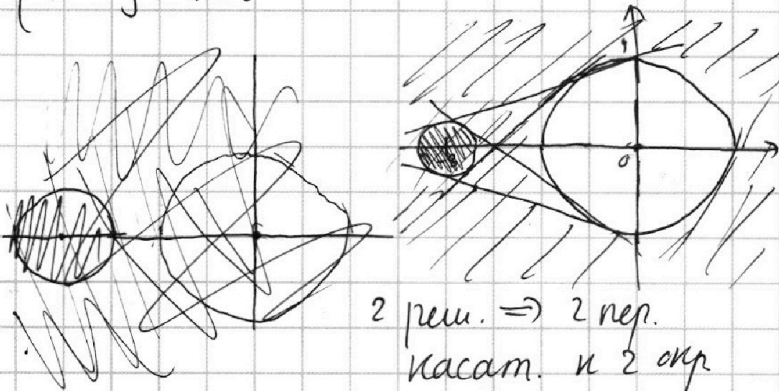
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & y = ax + 10b \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$



2 реш. \Rightarrow 2 пер.
касат. и 2 окр.

4 вар.

$$\begin{cases} (x_1+8)^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + a^2 x^2 + 10abx + 100b^2 = 1 \\ & (a^2+1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 16x + 64 = -3 \\ & 16x = -67 \\ & x = -\frac{67}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 10b \\ y_2 = ax_2 + 10b \end{cases}$$

$$1) x_1^2 + 16x_1 + 64 + a^2 x_1^2 + 20abx_1 + 100b^2 = 1$$

$$(a^2+1)x_1^2 + 2(10ab+8)x_1 + 63 + 100b^2 = 0$$

1 реш.

$$\frac{D}{4} = 100a^2 b^2 + 160ab + 64 - 63 - 100b^2 a^2$$

$$\begin{aligned} & = -100b^2 + 160ab + 1 = 0 \\ & 100b^2 - 160ab - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{D}{4} = 6400a^2 + 100 - 6300a^2 = 100a^2 + 100 \geq 0$$

$$100a^2 \geq -100$$

$$a^2 \geq -1$$

$$b = \frac{80a \pm \sqrt{a^2+1}}{100}$$

$$2) x_2^2 + a^2 x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 = 4$$

$$(a^2+1)x_2^2 + 20abx_2 + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100a^2 b^2 - 100b^2 a^2 + 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 25b^2 - 1$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2+1}}{5}$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2+1}}{5}$$

$$\begin{aligned} a^2 + 1 &= 8a^2 \\ a &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7a^2 &= 1 \\ a &= \pm \frac{1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2+1}}{100}$$

$$\sqrt{a^2+1} = 8a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$a+b = m \cdot k$$

$\frac{k}{n}$ - не сопр.

$$a^2 - 6ab + b^2 = m \cdot n$$

$$(a+b)^2 - 8ab = mn$$

$$k^2 \cdot m^2 - n \cdot m - 8ab = 0$$

$$k^2 m^2 - n \cdot m - 8a(mk - a) = 0$$

$$k^2 \cdot m^2 - (n + 8ak)m + 8a^2 = 0$$

$$D = (n + 8ak)^2 - 32a^2 k^2 = n^2 + 16ank + 32a^2 k^2 = l^2$$

$$m = \frac{n + 8ak \pm l}{2k^2}$$

$$a \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

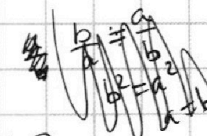
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 6$$

$$m = \frac{a}{b} \frac{1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}}{1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{6ab}{a}}$$

$$\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

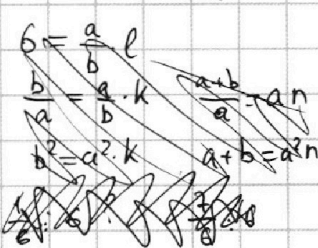
$$m = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

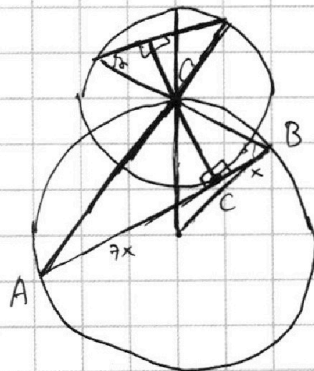
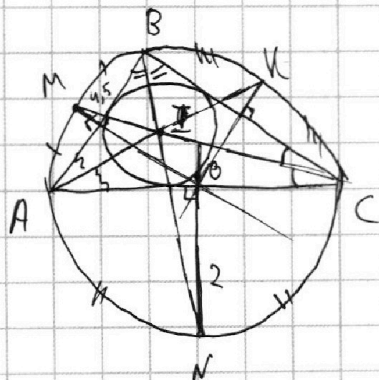


$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} : \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{ab} : \frac{a}{b}$$



AI-?



22-