



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть максимальная степень делимости z
в a — это x (т.е. $a:2^x, a/2^{x+1}$), b — это y ,
(т.е. $b:2^y, b/2^{y+1}$), c — это z (т.е. $c:2^z, c/2^{z+1}$)

Тогда $ab:2^x \cdot 2^y, ab/2^{x+y} \cdot 2, \text{ и } ab:2^{x+y}, ab/2^{x+y+1}$
 ~~$ab:2^{15}, \text{ и } x+y \geq 15$~~

Тогда $bc:2^y \cdot 2^z, bc/2^{y+z} \cdot 2, \text{ и } bc:2^{y+z}, bc/2^{y+z+1}$
 $bc:2^{17}, \text{ и } y+z \geq 17$

Тогда $ac:2^x \cdot 2^z, ac/2^{x+z} \cdot 2, \text{ и } ac:2^{x+z}, ac/2^{x+z+1}$
 $ac:2^{23}, \text{ и } x+z \geq 23$

$$\text{и } \begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 15+17+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{55}{2}$$

$$\text{и } x+y+z \geq 27 \frac{1}{2}$$

т.к. x, y, z — макс. степени делимости z в a, b, c
соответственно, $x, y, z \in \mathbb{Z}, x, y, z \geq 0$

и $x+y+z \in \mathbb{Z}$

$$\text{и } x+y+z \geq 28$$

$$abc:2^x \cdot 2^y \cdot 2^z, \text{ и } abc:2^{x+y+z}, \text{ и } abc:2^{28}$$

$$ac:7^{39}, \text{ и } abc:7^{39}$$

$$\text{т.к. НОД}(7, 2) = 1, abc:2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ и } abc > 0, \text{ и } abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Необязательно наименьшее возможное abc
это $2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример: $a = 7^{16} \cdot 2^{11}, b = 2^{14}, c = 7^{23} \cdot 2^{13}$

Тогда $ab = 7^{16} \cdot 2^{15} : 2^{15} \cdot 7^{16}, bc = 7^{23} \cdot 2^{17} : 2^{17} \cdot 7^{23}$

$$ac = 7^{39} \cdot 2^{24} : 7^{39} \cdot 2^{23}$$

$$abc = 7^{16} \cdot 2^{11} \cdot 2^{14} \cdot 7^{23} \cdot 2^{13} = 7^{39} \cdot 2^{28}$$

Ответ: $7^{39} \cdot 2^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Пусть мы можем сократить эту дробь ^{кратное} на m ,
т.е. $a+b : m$, $(a+b)^2-9ab : m$

т.к. $a+b : m$, $(a+b)^2 : m$

т.к. $(a+b)^2-9ab : m$ ~~на~~ $9ab : m$

Отсюда выйдутся 2 случая:

1) $ab : m$, но т.к. a/b несократима $\text{НОД}(a,b)=1$,
и если $ab : m$, то или $a : m$, или $b : m$, но
~~если~~ т.к. $a+b : m$, если $a : m$, то и $b : m$, а если
 $b : m$, то и $a : m$, ~~то~~ т.к. $\text{НОД}(a,b)=1$ $m=1$

2) $9 : m$, и $m=3$

Получается мы не можем сократить нашу
дробь ни на какое простое число, кроме 3

Пусть мы сократим на 3^x , где $x \geq 3$, тогда
мы сможем сократить на $3^3 = 27$

Пусть $a+b : 27$, ~~и~~ $a+b : 3$, т.к. $\text{НОД}(a,b)=1$
 $a \equiv_3 -b$, ~~и~~ $a \equiv_3 1$, $b \equiv_3 -1$, или
 $a \equiv_3 -1$, $b \equiv_3 1$, в обоих случаях $ab \equiv_3 -1$, и $ab : 3$
и $9ab \nmid 9 \cdot 3$, и $9ab \nmid 27$, но $(a+b)^2-9ab : 27$, т.к.
мы сможем сократить на 27, и $(a+b)^2 : 27$,
т.к. $a+b : 27$, и $9ab : 27$. Противоречие.

Следовательно мы можем сократить ~~на~~,
~~и~~ не больше, чем на 3^x , где $x \leq 2$

Следовательно наибольшее $m = 3^2 = 9$

Пример: $a=1$, $b=2$

Тогда $a/b = 1/2$ - несократимая дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{1-7 \cdot 2+2 \cdot 2} = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{т.е. данная дробь}$$

мы сможем сократить
на 9

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (1 - 9x)$$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

1) $1 - 9x = 0$, т.к. $x = \frac{1}{9}$ ~~$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$~~
 ~~$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$~~

2) $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$

тогда $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 9x$

т.к. $9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 4(9 + 69) = 4 \cdot 78 = 8 \cdot 39 = 8 \cdot 3 \cdot 13$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13}}{69} = \frac{2}{23} \pm \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$x = \frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)$$

Перед проверкой найдем область определения.

$$3x^2 + 3x + 1 = 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x - 1)^2 - 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0, \text{ т.к. мы берём корень, т.к. } 3(x - 1)^2 \geq 1$$

т.к. $(x - 1)^2 \geq \frac{1}{3}$, т.к. $\left|x - 1\right| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \\ x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

1) $\frac{1}{9} < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$, т.к. $\sqrt{3} < 9\sqrt{3} - 9$, т.к. $9 < 8\sqrt{3}$, т.к. $81 < 864 - 3$

2) $\frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{23} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) < 0 < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$ \oplus не попадает в обл. опре.

3) $\frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$ т.к. $2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} < 23\sqrt{3} + 23$,
 т.к. $2\sqrt{26} < 21\sqrt{3} + 23$,
 т.к. $2\sqrt{26} < 12 < 23 + 15$

③

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$2(\sqrt{3} + \sqrt{26}) \sqrt{23(\sqrt{3} - 1)}$$

$$2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3} - 23}$$

$$4 \cdot 26 \sqrt{21^2 \cdot 3 + 23^2 - 2 \cdot 23 \cdot 21 \sqrt{3}}$$

$$2 \cdot 23 \cdot 21 \sqrt{3} \sqrt{21^2 \cdot 3 + 23^2 - 4 \cdot 26} = 1323 + 529 - 80 - 24 =$$

$$= 1243 + 505 = 1748$$

$$996 \sqrt{3} \sqrt{1748}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{\frac{1748}{996}} = \frac{437}{249}$$

$$249 \sqrt{3} \sqrt{437}$$

$$249^2 \cdot 3 \sqrt{437^2}$$

$$186003 \sqrt{190969}$$

$$186003 < 190969$$

$$\text{or } \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \textcircled{1}$$

or the main answer remains the same as before

$$\text{Answer: } \left\{ \frac{1}{9}; \frac{2}{23} \left(1 - \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right); \frac{2}{23} \left(1 + \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ + 92 \\ \hline 966 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ + 42 \\ \hline 441 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 441 \\ 441 \\ \hline 1323 \\ + 1323 \\ \hline 2646 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ + 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 249 \\ 4 \\ \hline 996 \\ 48 \\ \hline 62001 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 437 \\ 4 \\ \hline 1748 \\ 24 \\ \hline 3059 \\ + 1311 \\ \hline 1748 \\ \hline 190969 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

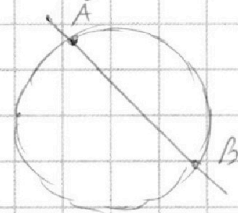
$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

~~... (y-12)^2 \ge 16~~
 $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ -
 две непересекающиеся
 окружности

Предположим:

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

Если прямая $y = -ax + 8b$ пересекает одну из окружностей в 2^x точках, тогда у нашей системы бесконечное кол-во решений, т.к. любая точка отрезка соединяющего эти две точки пересечения (хорда одной из окружностей) является решением системы. (Все точки отрезка AB являются решением системы)



Предположим прямая $y = -ax + 8b$ - касательная к одной из окружностей

(если она будет касаться одной, и не пересекать другую, тогда будет 1 решение, если не пересекать обе, то 0, если пересекать хотя бы одну в 2^x точках, тогда бесконечное кол-во решений).

$$\text{и } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

имеют единственные решения при заданных a и b (у I системы 1 решение, у II 1 решение)

$$\text{I } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (ax - 8b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{и. } (a^2+1)x^2 - 16abx + (64b^2-1) = 0 \text{ имеет единств. реш.}$$

$$\text{и. } D_{\text{и}} = 0, \text{ и. } \frac{D}{4} = 0$$

$$\frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (64b^2-1)(a^2+1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$\text{II } \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 + 24(ax - 8b) + 144 = 16 \end{cases}$$

$$\text{и. } (a^2+1)x^2 - x(16ab - 24a) + (64b^2 - 8 \cdot 24b + 144 - 16) = 0$$

$$16ab - 24a = 8a(2b - 3)$$

имеет единств. реш.
и. $D = 0$, и. $\frac{D}{4} = 0$

$$64b^2 - 8 \cdot 24b + 144 - 16 = 64b^2 - 8 \cdot 24b + 128 = 64b^2 - 3 \cdot 64b + 64 \cdot 2 =$$

$$= 64(b^2 - 3b + 2)$$

~~$$\frac{D}{4} = 16a^2(2b-3)^2 - 64(b^2-3b+2)(a^2+1) = 16a^2(4b^2-12b+9) - 64(b^2-3b+2)(a^2+1)$$~~

$$\frac{D}{4} = 16a^2(2b-3)^2 - 64(b^2-3b+2)(a^2+1) = 16a^2(4b^2-12b+9) -$$

$$- 64(b^2-3b+2)(a^2+1) = 64a^2b^2 - 16 \cdot 12ba^2 + 16 \cdot 9a^2 - 64a^2b^2 + 16 \cdot 12ba^2 - 64a^2 - 64(b^2-3b+2) =$$

$$- 64(b^2-3b+2) = 16(9a^2 - 8a^2) - 64(b^2-3b+2) = 0$$

$$\text{и. } a^2 - 4(b^2 - 3b + 2) = 0, \text{ и. } a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$\text{и. } \begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ a^2 = 4(b^2 - 3b + 2) \end{cases} \quad \begin{cases} 64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8 \\ 60b^2 + 12b - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 9 \cdot 60 = 6 \cdot (6 + 90) = 6 \cdot 96 = 6 \cdot 6 \cdot 16 = (6 \cdot 4)^2 = 24^2$$

$$\text{и. } b = \frac{-6 \pm 24}{60} \quad b = \frac{-1 \pm 4}{10}, \text{ и. } \begin{cases} b = -0,5 \\ b = 0,3 \end{cases}$$

$$a^2 = \sqrt{64b^2 - 1}, \text{ и. } \begin{cases} a = \sqrt{\frac{64}{4} - 1} \\ a = \sqrt{\frac{64 \cdot 9}{100} - 1} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{16 \cdot 9 - 25} : 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{144 - 25} : 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = \frac{\sqrt{119}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

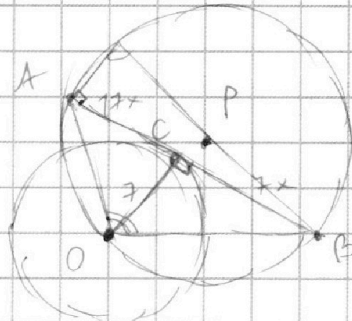


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$b^2 : m$ $a+b : m$
 $(a+b)^2 : m^2$
 $a^2 + 2ab + b^2$



$9ab : m$, ~~$a+b : m$~~

1) $ab : m$, $m \ll \text{НОД}(a,b) = 1$ $\begin{cases} a : m \\ b : m \end{cases}$ $\Rightarrow a+b : m$

$\Rightarrow \begin{cases} a : m \\ b : m \end{cases}$ (X)

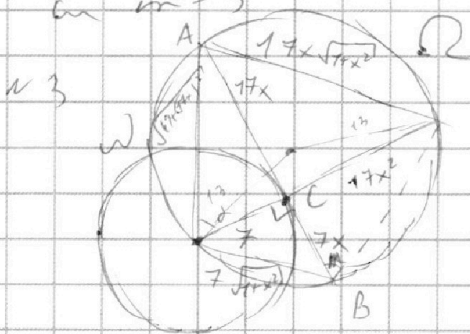
2) $ab : k$ $m = 3k$ 3) $ab : k$ $m = 9k$

$a+b : 3k$ $\Rightarrow a+b : k$
 $\Rightarrow \begin{cases} a : k \\ b : k \end{cases}$

$\Rightarrow k = 1$
 $\Rightarrow m = 3$

$a+b : 9k$ $\Rightarrow a+b : k$
 $\Rightarrow \begin{cases} a : k \\ b : k \end{cases}$

$\Rightarrow k = 1$
 $\Rightarrow m = 9$



$\sim 4 \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 19x$

(1) $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

(2) $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

(1) $D = 36 - 6 \cdot 4 = 12$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

(2) $D = 9 - 12 < 0$

$(1-9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right) = 1-9x$

$1-9x = 0$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$

$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$

$\begin{cases} x \geq 1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x \leq 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

m

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

черновики

$$\begin{aligned} a &= 2^{x_a} \cdot 7^{y_a} \cdot k_a \\ b &= 2^{x_b} \cdot 7^{y_b} \cdot k_b \\ c &= 2^{x_c} \cdot 7^{y_c} \cdot k_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &= 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_a + x_b + x_c &\geq \frac{15+17+39}{2} = 27\frac{1}{2} \\ m \cdot x_a + x_b + x_c &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 15 \\ y_a + y_b \geq 11 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ y_b + y_c \geq 18 \\ x_a + x_c \geq 23 \\ y_a + y_c \geq 39 \end{cases}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^2 \cdot 7^7}$$

$$a = 2^2 \cdot 7^7 \cdot c$$

$$ac = a^2 \cdot 2^{-2} \cdot 7^{-7} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$a = 7^{16} \cdot 2^{10} \sqrt{2}$$

$$a = 7^{16} \cdot 2^{11}$$

$$c = 7^{23} \cdot 2^{13}$$

$$b = 2^4$$

$$abc = 7^{39} \cdot 2^{28}$$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} & a &: 2^x \\ bc &: 2^{17} & b &: 2^y \\ ac &: 2^{23} & c &: 2^z \end{aligned}$$

$$x + y \geq 15$$

$$y + z \geq 17$$

$$x + z \geq 23$$

$$(x+y+z) \geq \frac{15+17+23}{2}$$

$$(x+y+z) \geq \frac{40+15}{2}$$

$$= 27\frac{1}{2}$$

$$a \cdot x + y + z \geq 28$$

$$\frac{1+8}{(1+8)^2 - 9 \cdot 1 \cdot 8} = \frac{9}{9} = 1$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac : 2^{23+17+15} \cdot 7^{39+11+18}$$

$$2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68}} = 7^{34} \cdot 2^{27} \sqrt{2} \cdot k$$

$$m \cdot abc \min(abc) = 7^{34} \cdot 2^{28}$$

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$c = 2^3 \cdot 7^{28}$$

$$b =$$

r2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a^2+2ab+b^2)-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\begin{aligned} a+b &: m & (a+b) &= 1 \\ 9ab &: m & a &= \frac{1}{m} - b \end{aligned}$$

$$9ab \equiv_m -9b^2 \equiv 0$$

$$m \mid b^2$$

$$9 : m \quad \max(m) = 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

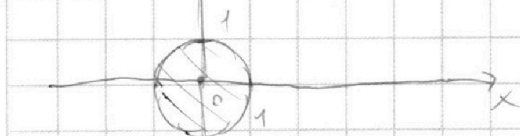
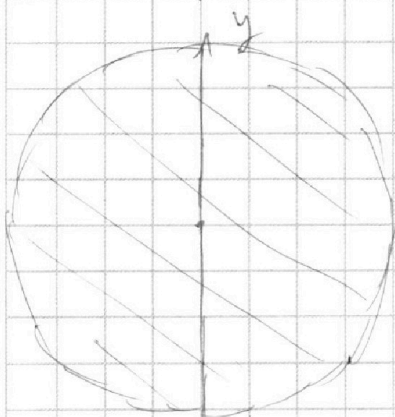
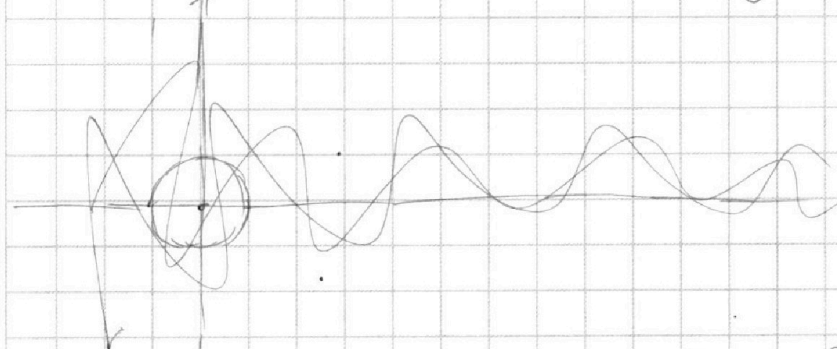
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$



$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (ax - 8b)^2 = 1$$

$$x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) = 0$$

$$D = 16^2 a^2 b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 0$$

$$4(16 \cdot 4a^2b^2 - 64a^2b^2 - 64b^2 + a^2) = 0$$

$$64b^2 - a^2 - 1 = 0$$

$$b^2 = (a^2 + 1) : 64$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

~~$$\begin{cases} x^2 + (y - 12)^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \\ x^2 + a^2x^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases}$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



методом

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$x^2 + (ax - 8b)^2 + 24(ax - 8b) + 144 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 + 24ax - 24 \cdot 8b + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 - x(16ab - 24a) + 64b^2 - 24 \cdot 8b + 144 - 16 = 0$$

$$\begin{aligned} & \text{II} \\ & \cancel{8 \cdot 24} \cdot 3a \\ & 9a(2b - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{II} \\ & 64b^2 - 3 \cdot 64b + 128 = 0 \end{aligned}$$

$$128 = 8 \cdot 16 = 8^2 \cdot 2 = 64 \cdot 2$$

$$64(b^2 - 3b + 2)$$

$$16a^2(2b - 3)^2 - (a^2 + 1)64(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$a^2(2b - 3)^2 - a^2 \cdot 4(b^2 - 3b + 2) - 4(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$a^2(4b^2 - 12b + 9) - 4a^2(b^2 - 3b + 2) - 4(b^2 - 3b + 2) = 0$$

$$9a^2 - 8a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$a^2 = 4(b^2 - 3b + 2)$$

$$\text{II} \quad 64b^2 - 1$$

$$64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 9 \cdot 60 = 36 + 540 = 576$$

$$b = \frac{-6 \pm \sqrt{576}}{60} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{576}{36}}}{10} = \frac{-1 \pm 4}{10}$$

$$b = 0,3; \quad b = -0,5$$

$$a^2 = 64b^2 - 1 = \frac{64}{4} - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$a^2 = 64b^2 - 1 = \frac{16 \cdot 9}{100} - 1 = \frac{16 \cdot 9 - 25}{25} = \frac{119}{25}$$

*112/32
10/3
0*

$$\begin{array}{r} 576 \overline{) 36} \\ \underline{36} \\ 0 \\ \underline{216} \\ 216 \\ \underline{216} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 16 \\ \hline 144 \\ \\ \\ \underline{-25} \\ \hline 119 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) - 1} + \sqrt{\cancel{3x^2 + 3x + 1} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} + \sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$y = x - 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3(y + \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3y^2 + 9y + 3 \cdot \frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\sqrt{3y^2 - 1} + \sqrt{3y^2 + 9y + 7} = 1$$

$$\sqrt{z} + \sqrt{z + 9y + 8} = 1$$

$$\frac{z}{23} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \Delta \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{7}{17x} = \frac{7x}{y}$$

$$y = \frac{7x \cdot 17x}{7} = 17x^2$$

$$7^2 + (7x)^2 = 7^2(1+x^2)$$

$$(17x)^2 + (17x^2)^2 = 17^2(x^2 + x^4) = 17^2 x^2(1+x^2)$$

$$(7x)^2 + (17x^2)^2 = x^2 \cdot 49 + 17^2 x^4 = x^2 \sqrt{49 + 17^2 x^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{7x}{\sqrt{49 + 17^2 x^2}}$$

$$17x \sqrt{1+x^2} = \frac{26 \cdot 17x}{\sqrt{49 + 17^2 x^2}}$$

$$\frac{17x \sqrt{1+x^2}}{\sin \alpha} = 2R = 26$$

$$17x (\sqrt{1+x^2} \sqrt{49 + 17^2 x^2}) = 26 \cdot 17x$$

x 26	x 17
26	17
+ 156	+ 119
52	286
676	289
	2
	578

$17x = 0$
 $\sqrt{1+x^2} \sqrt{49+17^2 x^2} = 26$
 $x = 0$ (⊖)
 $(1+x^2)(49+(17^2 x^2)) = \cancel{49+17^2 x^2}$

$$17^2 x^4 + (49 + 17^2) x^2 + 49 - 26^2 = 0$$

$\frac{z}{23} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}$
 $2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3} + 23}$
 $\frac{2}{23} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}$
 $2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3} - 23}$
 $23 + 2\sqrt{26} \sqrt{21\sqrt{3}}$
 $\frac{1}{45}$

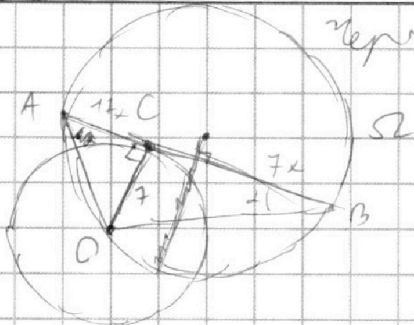
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{17^2 + 7^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R = 26$$

$$AC = 26 \sin \alpha = \frac{26}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$AC = \sqrt{(17x)^2 + 7^2}$$

$$\sqrt{((17x)^2 + 7^2)(1+x^2)} = 26$$

$$17^2 x^4 + (7^2 + 17^2)x^2 + 7^2 - 26^2 = 0$$

$$17^2 y^2 + (7^2 + 17^2)y - 19 \cdot 33 = 0$$

$$289y^2 + 338y - 627 = 0$$

~~$$D = 13^4 + 17^2 \cdot (13^2 - 7^2) =$$~~

$$D = 13^4 + 17^2 \cdot (13^2 - 7^2) =$$

$$= 13^4 + 2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 + 17^4 - 17^2 \cdot 7^2 =$$

$$= (13^2 + 17^2)^2 - 17^4 - 7^2$$

~~$$69 = 3 \cdot 23$$~~

$$69 = 3 \cdot 23$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 69 \\ \hline 4 \\ 216 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 36 + 276 =$$

$$= 312 = 2156 =$$

$$= 4 \cdot 78 =$$

$$= 8 \cdot 39 =$$

$$= 8 \cdot 3 \cdot 13$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 13}}{69} = \frac{2}{23} \pm \frac{2\sqrt{69}}{3 \cdot 23} = \frac{2}{23} \pm \frac{2}{23} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{23} \left(\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{26}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\begin{array}{r} 7^2 = 49 \\ 17^2 = 289 \\ 7^2 + 17^2 = 338 \\ \hline 169 = \frac{13^2}{2} \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 33 \\ \hline 19 \\ \hline 297 \\ \hline 33 \\ \hline 627 \end{array}$$

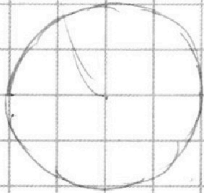
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24x = 12 \cdot 7x$$

$$(13+y)(13-y) = (12x)^2$$

$$169 - y^2 = 144x^2$$

$$y = \sqrt{169 - 144x^2}$$

$$(17x^2 + 7^2)(x^2 + 1) = 16 \cdot 13^4$$

$$17^2 x^4 + (17^2 + 7^2)x^2 + (7^2 - 16 \cdot 13^4) = 0$$

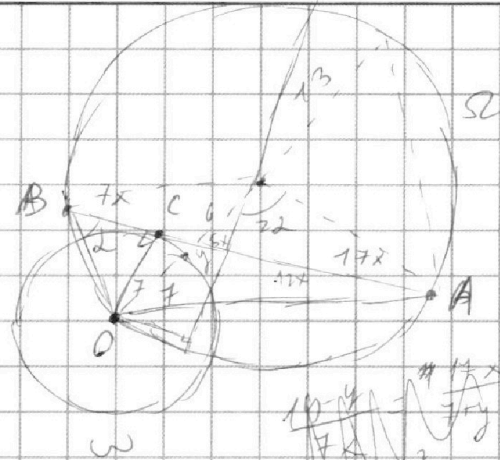
$$289x^4 + 2 \cdot 169x^2 -$$

~~289~~

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left(\frac{14}{x_2 - x_1} - 2 \right)$$

$$y = \left(\frac{14}{x_2 - x_1} - 2 \right) (x - x_1) + y_1$$



$$AO = 2R^2 - 2 \cdot 13^2 \cos^2 \alpha = 2 \cdot 13^2 (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha$$

$$4 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha$$

$$4 \cdot 13^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sqrt{(17x)^2 + 7^2}$$

$$\frac{4}{17^2}$$

$$= \frac{119}{289}$$

$$\frac{17}{289}$$

$$\frac{11}{289} + \frac{49}{49}$$

$$\frac{338}{49} = 2 \cdot 169$$

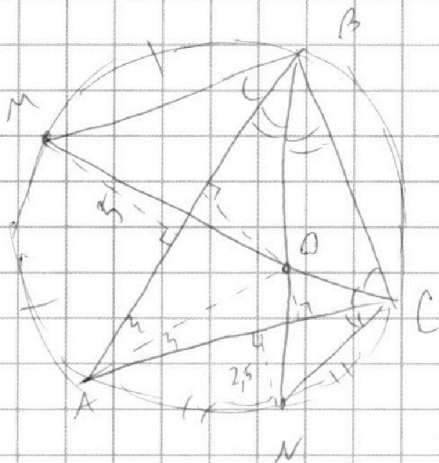
$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 169 \\ \hline 169 \\ 1521 \\ \hline 1014 \\ 169 \\ \hline 10561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 296976 \\ + 11366 \\ \hline 296976 \\ + 10561 \\ \hline 296976 \\ + 10561 \\ \hline 296976 \end{array}$$

$$296976$$

$$49$$

$$296927$$



$$\frac{v}{5} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

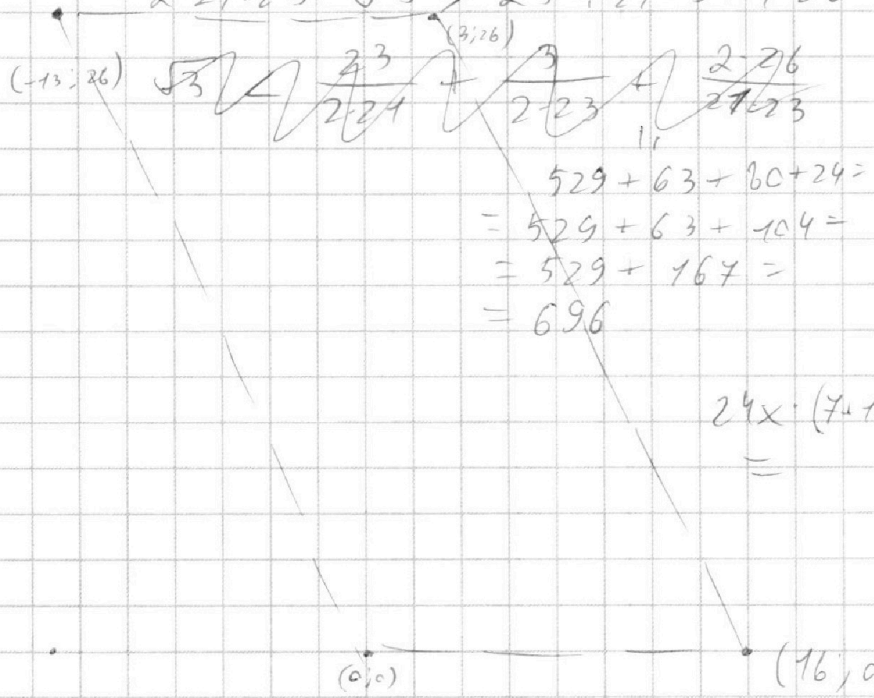
$$\frac{2}{23} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{26}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} < 23\sqrt{3} - 23$$

$$2\sqrt{26} < 21\sqrt{3} - 23$$

$$4 - 26 < 21 \cdot 3 - 2 \cdot 21 \cdot 23\sqrt{3} + 23$$

$$2 \cdot 21 \cdot 23 \cdot \sqrt{3} \approx 23^2 + 21 \cdot 3 + 4 \cdot 26$$

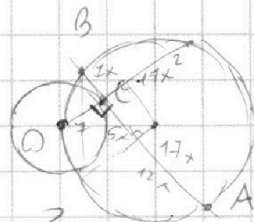


$$\begin{aligned} 529 + 63 + 104 &= \\ = 529 + 63 + 104 &= \\ = 529 + 167 &= \\ = 696 & \end{aligned}$$

$$24x \cdot (7 + 7x^2) =$$

$$\begin{array}{r} 874 \quad 437 \\ 1748 \\ \hline 996 \\ 498 \\ \hline 249 \end{array} = 5x$$

$$\begin{aligned} 17x^2 + 7 - 7 &= \\ \frac{17x^2 - 7}{2} &= \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 469 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 23 \\ \hline 126 \\ 84 \\ \hline 966 \end{array}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

~~$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{y_2 - y_1}{2} \\ x_2 - x_1 &= \frac{y_2 - y_1}{2} \end{aligned}$$~~

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_2 - y_1 = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$2(16 + 13) + (0 - 26) =$$

$$= 2 \cdot 29 - 26 = 29 + 3 = 32$$



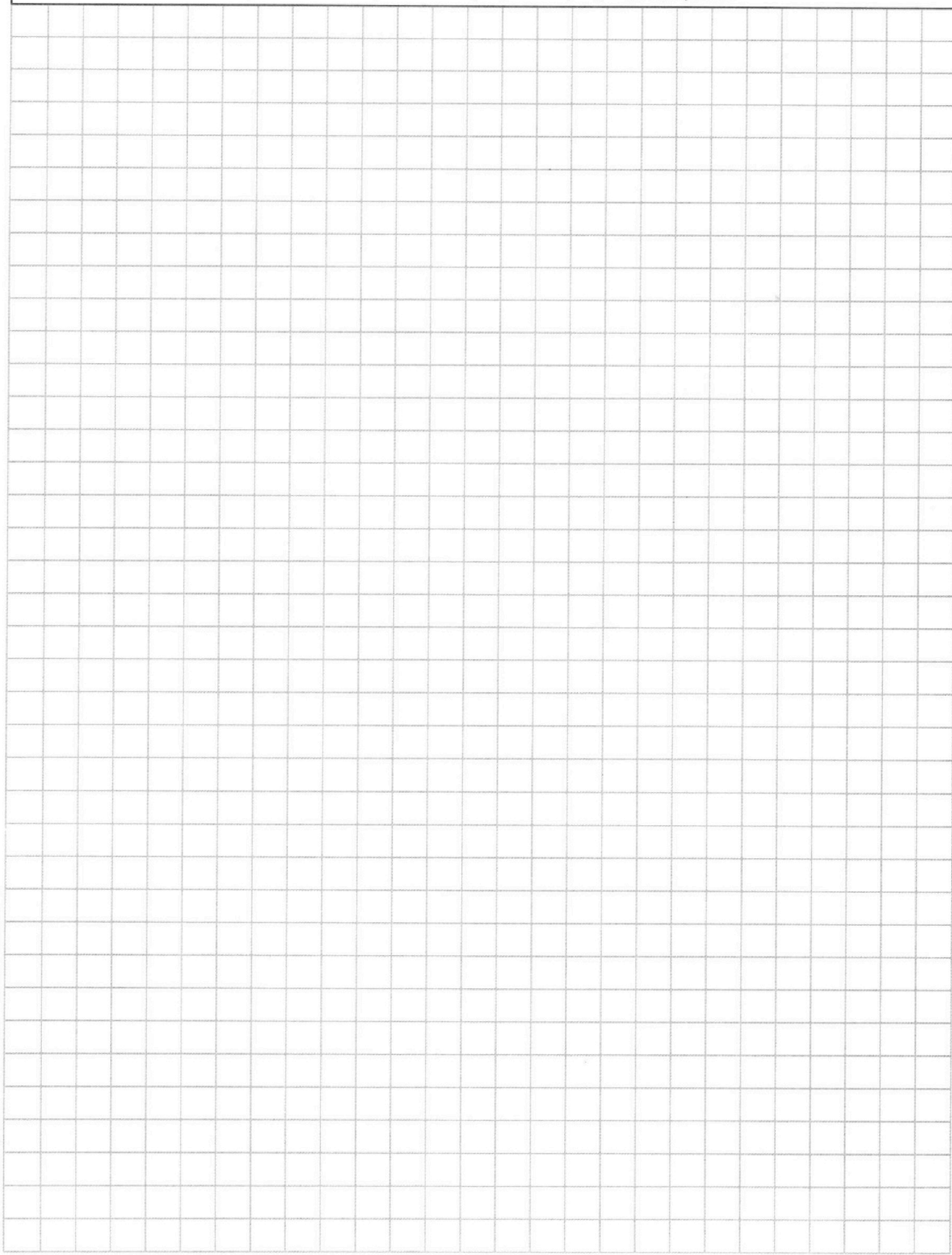
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



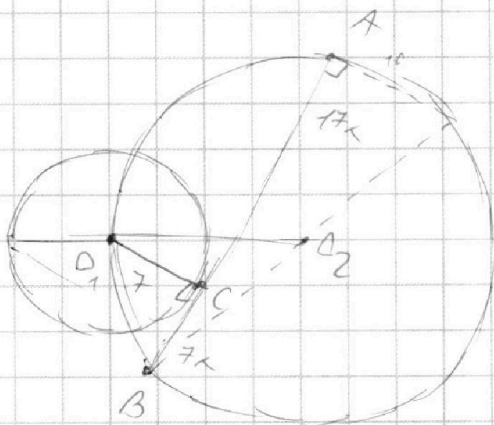
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 24^2 &= 144 \cdot 4 = 576 \\ 26^2 &= 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 = \\ &= 400 + 240 + 36 = \\ &= 676 \end{aligned}$$