МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть максимальная степень вхождения 2 в a – это x (т.е. $a \vdots 2^x$, $a \not\vdots\, 2^{x+1}$), в b – это y, (т.е. $b \vdots 2^y$, $b \not\vdots\, 2^{y+1}$), в c – это z (т.е. $c \vdots 2^z$, $c \not\vdots\, 2^{z+1}$).

Тогда $ab \vdots 2^x \cdot 2^y$, $ab \not\vdots\, 2^x \cdot 2^y \cdot 2$, сл. $ab \vdots 2^{x+y}$, $ab \not\vdots\, 2^{x+y+1}$

$ab \vdots 2^{15}$, сл. $x+y \geq 15$

Тогда $bc \vdots 2^y \cdot 2^z$, $bc \not\vdots\, 2^y \cdot 2^z \cdot 2$, сл. $bc \vdots 2^{y+z}$, $bc \not\vdots\, 2^{y+z+1}$

$bc \vdots 2^{17}$, сл. $y+z \geq 17$

Тогда $ac \vdots 2^x \cdot 2^z$, $ac \not\vdots\, 2^x \cdot 2^z \cdot 2$, сл. $ac \vdots 2^{x+z}$, $ac \not\vdots\, 2^{x+z+1}$

$ac \vdots 2^{23}$, сл. $x+z \geq 23$

сл. $\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 15+17+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{55}{2}$

сл. $x+y+z \geq 27\frac{1}{2}$

т.к. x, y, z – макс. степени вхождения 2 в a, b, c соответственно, $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x, y, z \geq 0$

сл. $x+y+z \in \mathbb{Z}$

сл. $x+y+z \geq 28$

$abc \vdots 2^x \cdot 2^y \cdot 2^z$, сл. $abc \vdots 2^{x+y+z}$, сл. $abc \vdots 2^{28}$

$ac \vdots 7^{39}$, сл. $abc \vdots 7^{39}$

т.к. НОД$(7, 2) = 1$, $abc \vdots 2^{28} \cdot 7^{39}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, сл. $abc > 0$, сл. $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

Следовательно наименьшее возможное abc это $2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример: $a = 7^{16} \cdot 2^{11}$, $b = 2^4$, $c = 7^{23} \cdot 2^{13}$

Тогда $ab = 7^{16} \cdot 2^{15} \vdots 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc = 7^{23} \cdot 2^{17} \vdots 2^{17} \cdot 7^{18}$,

$ac = 7^{39} \cdot 2^{24} \vdots 7^{39} \cdot 2^{23}$

$abc = 7^{16} \cdot 2^{11} \cdot 2^4 \cdot 7^{23} \cdot 2^{13} = 7^{39} \cdot 2^{28}$

Ответ: $7^{39} \cdot 2^{28}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab}=\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Пусть мы можем сократить эту дробь на простое m,
т.е. $a+b \vdots m$, $(a+b)^2-9ab \vdots m$
т.к. $a+b \vdots m$ $(a+b)^2 \vdots m$
т.к. $(a+b)^2-9ab \vdots m$ $9ab \vdots m$
Отсюда появляются 2 случая:
1) $ab \vdots m$, но т.к. a/b несократима НОД$(a,b)=1$, сл. если $ab \vdots m$, то или $a \vdots m$, или $b \vdots m$, но т.к. $a+b \vdots m$, если $a \vdots m$, то и $b \vdots m$, а если $b \vdots m$, то и $a \vdots m$, а т.к. НОД$(a,b)=1$ $m=1$
2) $9 \vdots m$, сл. $m=3$
Получается мы не можем сократить нашу дробь ни на какое простое число, кроме 3

Пусть мы сократили на 3^x, где $x \geq 3$, тогда мы смогли сократить на $3^3=27$
Пусть $a+b \vdots 27$, сл. $a+b \vdots 3$, т.к. НОД$(a,b)=1$
$a \equiv_3 -b \neq 0$, сл. или $a \equiv_3 1$, $b \equiv_3 -1$, или $a \equiv_3 -1$, $b \equiv_3 1$, в обоих случаях $ab \equiv_3 -1$, сл. $ab \not\vdots 3$ сл. $9ab \not\vdots 9\cdot3$, сл. $9ab \not\vdots 27$. Но $(a+b)^2-9ab \vdots 27$, т.к. мы смогли сократить на 27, и $(a+b)^2 \vdots 27$, т.к. $a+b \vdots 27$, сл. $9ab \vdots 27$. Противоречие.
Следовательно мы могли сократить не больше, чем на 3^x, где $x \leq 2$
Следовательно наибольшее $m=3^2=9$
Пример: $a=1$, $b=2$
Тогда $a/b=1/2$ - несократимая дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{9}{1-7\cdot2+2\cdot2}=\frac{9}{9}=1$$ т.е. данную дробь мы смогли сократить на 9

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=(1-9x)$$

$$(3x^2-6x+2-3x^2-3x-1)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

$$(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}-1\right)=0$$

1) $1-9x=0$, сл. $x=\frac{1}{9}$

2) $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

тогда $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}-9x$

сл. $9x=2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$81x^2=4(3x^2+3x+1)$

$81x^2=12x^2+12x+4$

$69x^2-12x-4=0$

$$\frac{D}{4}=36+4\cdot 69=4(9+69)=4\cdot 78=8\cdot 39=8\cdot 3\cdot 13$$

$$x=\frac{6\pm 2\sqrt{2\cdot 3\cdot 13}}{69}=\frac{2}{23}\pm\frac{2}{23}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{23}\left(1+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) \\ x=\frac{2}{23}\left(1-\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)\end{array}\right.$$

Теперь проверим попадают ли наши решения в область определения.

$3x^2+3x+1=3\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}>0$

$3x^2-6x+2=3(x^2-2x+1)-1=3(x-1)^2-1$

$3x^2-6x+2\geq 0$, т.к. мы берём корень, сл $3(x-1)^2\geq 1$

сл $(x-1)^2\geq\frac{1}{3}$, сл $\left[\begin{array}{l} x-1\geq\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x-1\leq-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x\geq 1+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \\ x\leq 1-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$

1) $\frac{1}{9}<\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$, т.к. $\sqrt{3}<9\sqrt{3}-9$, т.к. $9<8\sqrt{3}$, т.к. $81<64\cdot 3$ (+)

2) $\frac{2}{23}\left(1-\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{23}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)<0<\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ (+) ← попадает в обл. опр.

3) $\frac{2}{23}\left(1+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{23}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{26}}{\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$, т.к. $2\sqrt{3}+2\sqrt{26}<23\sqrt{3}+23$,

т.к. $2\sqrt{26}<21\sqrt{3}+23$,

т.к. $2\sqrt{26}<12<23+21\sqrt{3}$

3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{2}{23}\left(1+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) \vee 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$2(\sqrt{3}+\sqrt{26}) \vee 23(\sqrt{3}-1)$

$2\sqrt{26} \vee 21\sqrt{3}-23$

$4\cdot 26 \vee 21^2\cdot 3+23^2-2\cdot 23\cdot 21\sqrt{3}$

$2\cdot 23\cdot 21\sqrt{3} \vee 21^2\cdot 3+23^2-4\cdot 26 = 1323+529-80-24 =$
$= 1243+505 = 1748$

$996\sqrt{3} \vee 1748$

$\sqrt{3} \vee \frac{1748}{996} = \frac{437}{249}$

$249\sqrt{3} \vee 437$

$249^2\cdot 3 \vee 437^2$

$186003 \vee 190969$

$186003 < 190969$

⇒ $\frac{2}{23}\left(1+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right) < 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (+)

$23\cdot 42 = 46 + 920 = 966$; $21\cdot 21 = 21 + 420 = 441$; $441\cdot 3 = 1323$; $23\cdot 23 = 69 + 460 = 529$

$249\cdot 4 = 996$; $437\cdot 4 = 1748$

$62001\cdot 3 = 186003$; $249\cdot 249 = 2241 + 9960 + 49800 = 62001$; $437\cdot 437 = 3059 + 13110 + 174800 = 190969$

⇒ все наши ответы лежат в области определения

Ответ: $\left\{\frac{1}{9};\ \frac{2}{23}\left(1-\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right);\ \frac{2}{23}\left(1+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

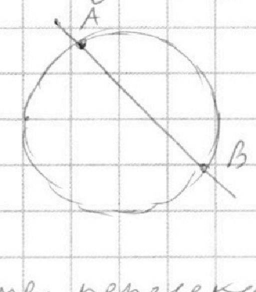
$$\left[\begin{cases} y=-ax+8b \\ \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases} \end{cases}\right.$$

$x^2+y^2=1$ и $x^2+(y-12)^2=16$ – две непересекающиеся окружности

Следовательно:

$$\begin{cases} y=-ax+8b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{array}\right. \end{cases}$$

Если прямая $y=-ax+8b$ пересекает одну из окружностей в 2^х точках, тогда у нашей системы бесконечное кол-во решений, т.к. любая точка отрезка соединяющего эти две точки пересечения (хордой одной из окружностей) является решением системы. (Все точки отр. AB явл. решениями системы)



Следовательно прямая $y=-ax+8b$ – касательная к обеим окружностям (если она будет касаться одной, и не пересекать другую, тогда будет 1 решение, если не пересекать обе, то 0, если пересекать хотя бы одну в 2^х точках, тогда бесконечное кол-во решений).

и $\begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ I и $\begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+(y-12)^2=16 \end{cases}$ II

имеют единственные решения при заданных a и b (у I системы 1 решение, и у II 1 решение)

I $\begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+(ax-8b)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+a^2x^2-16abx+64b^2=1 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

т.к. $(a^2+1)x^2 - 16abx + (64b^2-1) = 0$ имеет единств. реш.

т.к. $D = 0$, т.к. $\frac{D}{4} = 0$

$\frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (64b^2-1)(a^2+1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 = 0$

$a^2 = 64b^2 - 1$

II $\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 + 24(ax - 8b) + 144 = 16 \end{cases}$

т.к. $(a^2+1)x^2 - x(16ab - 24a) + (64b^2 - 8\cdot 24b + 144 - 16) = 0$ имеет единств. реш.

т.к. $D=0$, т.к. $D/4 = 0$

$16ab - 24a = 8a(2b-3)$

$64b^2 - 8\cdot 24b + 144 - 16 = 64b^2 - 8\cdot 24b + 128 = 64b^2 - 3\cdot 64b + 64\cdot 2 =$
$= 64(b^2 - 3b + 2)$

$\frac{D}{4} = 16a^2(2b-3)^2 - 64(b^2-3b+2)(a^2+1) = 16a^2(4b^2 - 12b + 9) -$

$- 64(b^2-3b+2)a^2 - 64(b^2-3b+2) =$
$= 64a^2b^2 - 16\cdot 12ba^2 + 16\cdot 9a^2 - 64a^2b^2 + 16\cdot 12ba^2 - 64\cdot 2a^2 -$
$- 64(b^2-3b+2) = 16(9a^2 - 8a^2) - 64(b^2-3b+2) = 0$

т.к. $a^2 - 4(b^2-3b+2) = 0$, т.к. $a^2 = 4(b^2-3b+2)$

т.к. $\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \\ a^2 = 4(b^2-3b+2) \end{cases}$ $\quad 64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8$
$\quad 60b^2 + 12b - 9 = 0$

$\frac{D}{4} = 36 + 9\cdot 60 = 6\cdot(6+90) = 6\cdot 96 = 6\cdot 6\cdot 16 = (6\cdot 4)^2 = 24^2$

т.к. $b = \frac{-6 \pm 24}{60}$ $\quad b = \frac{-1 \pm 4}{10}$, т.к. $\left[\begin{array}{l} b = -0{,}5 \\ b = 0{,}3 \end{array}\right.$

$a = \sqrt{64b^2 - 1}$, т.к. $\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{\frac{64}{4} - 1} \\ a = \sqrt{\frac{64\cdot 9}{100} - 1} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{16\cdot 9 - 25} : 5 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{15} \\ a = \sqrt{144 - 25} : 5 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{15} \\ a = \frac{\sqrt{119}}{5} \end{array}\right.$ Ответ: $\left\{\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$

6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

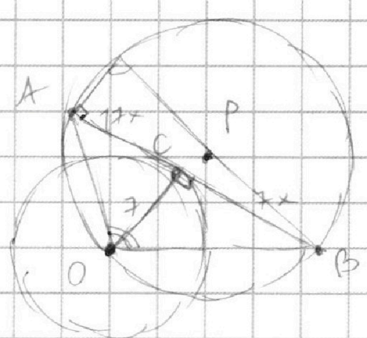
МФТИ

Черновик

$b^2 \vdots m$ $a+b \vdots m$

$(a+b)^2 \vdots m^2$

$a^2+2ab+b^2$



$9ab \vdots m$,

1сл) $ab \vdots m$, т.к. НОД$(a,b)=1$ $\begin{cases} a \vdots m \\ b \vdots m \end{cases}$, то $a+b \vdots m$

$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots m \\ b \vdots m \end{cases}$ (X)

2сл) $ab \vdots k$ $m=3k$

$a+b \vdots 3k \Rightarrow a+b \vdots k$,

$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots k \\ b \vdots k \end{cases}$

$\Rightarrow k=1$

$\Rightarrow m=3$

3сл) $ab \vdots k$ $m=9k$

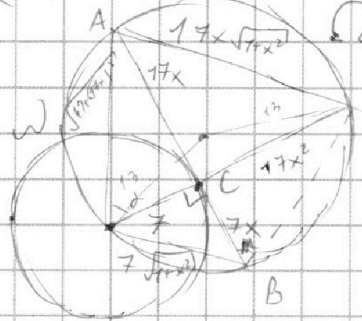
$a+b \vdots 9k \Rightarrow a+b \vdots k$,

$\begin{cases} a \vdots k \\ b \vdots k \end{cases}$

$\Rightarrow k=1$

$\Rightarrow m=9$

№3



№4 $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

(1) $3x^2-6x+2 \geq 0$

(2) $3x^2+3x+1 \geq 0$

(1) $D = 36-24 = 12$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

(2) $D = 9-12 < 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1+\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \leq 1-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

$(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right) = 1-9x$

$1-9x=0$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

$6x^2-3x+3+2\sqrt{(3x^2-6x+2)}\sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

№1

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$
$bc \vdots 2^{17}7^{18}$
$ac \vdots 2^{23}7^{39}$

$a = 2^{x_a}\cdot 7^{y_a}\cdot k_a$
$b = 2^{x_b}\cdot 7^{y_b}\cdot k_b$
$c = 2^{x_c}\cdot 7^{y_c}\cdot k_c$

$ab = 2^{15}7^{11}$
$bc = 2^{17}7^{18}$
$ac = 2^{23}\cdot 7^{39}$

$x_a + x_b + x_c \geq \frac{15+17+39}{2} = 27\frac{1}{2}$
$x_a + x_b + x_c \geq 28$

$\cancel{y_a + y_b + y_c \geq (11+18+39):2}$
$\cancel{y_a + y_b + y_c \geq 34}$

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 15 \\ y_a + y_b \geq 11 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ y_b + y_c \geq 18 \\ x_a + x_c \geq 23 \\ y_a + y_c \geq 39 \end{cases}$$

$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^2\cdot 7^7}$

$c = 2^2\cdot 7^7\cdot a$

$ac = a^2\cdot 2^2\cdot 7^7 = 2^{23}\cdot 7^{39}$

$a^2 = 2^{21}\cdot 7^{32}$

$abc \vdots 2^{x_a+x_b+x_c}$

$(abc)^2 = ab\cdot bc\cdot ac \vdots 2^{23+17+15}\ 7^{39+11+18}$

$a = 7^{16}\cdot 2^{10}\sqrt{2}$

$2^{55}\ 7^{68}$

$a = 7^{16}\cdot 2^{11}$
$c = 7^{23}\cdot 2^{13}$

$abc \geq \sqrt{2^{55}\cdot 7^{68}\cdot k} = 7^{34}\cdot 2^{27}\cdot\sqrt{2k}$

$b = \cancel{\ } 2^4$

$\min(abc) = 7^{34}\cdot 2^{28}$

$abc = 7^{39}\cdot 2^{28}$

$a = \cancel{\ }\ 2^{15}7^{11}$
$c = 2^{8}7^{28}$
$b =$

$ab \vdots 2^{15}$ $a \vdots 2^x$
$bc \vdots 2^{17}$ $b \vdots 2^y$
$ac \vdots 2^{23}$ $c \vdots 2^z$

$x + y \geq \cancel{23}\ 15$
$y + z \geq 17$
$x + z \geq 23$
$(x+y+z) \geq \frac{15+17+23}{2}$

№2

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a^2+2ab+b^2)-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

$= \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

$a+b \vdots m$ $\text{НОД}(a,b) = 1$
$9ab \vdots m$ $a \equiv_m -b$

$(x+y+z) \geq \frac{40+15}{2}$
$= 27\frac{1}{2}$

$9ab \equiv_m -9b^2 \equiv 0$

$x+y+z \geq 28$

$$\left[\begin{array}{l} b^2 \vdots m \\ 9 \vdots m \quad \max(m) = 9 \end{array}\right.$$

$\frac{1+8}{(1+8)^2-9\cdot 1\cdot 8} = \frac{9}{9} = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

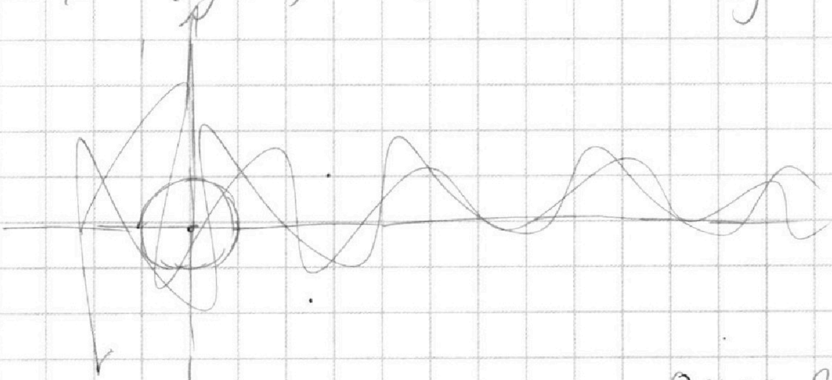
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

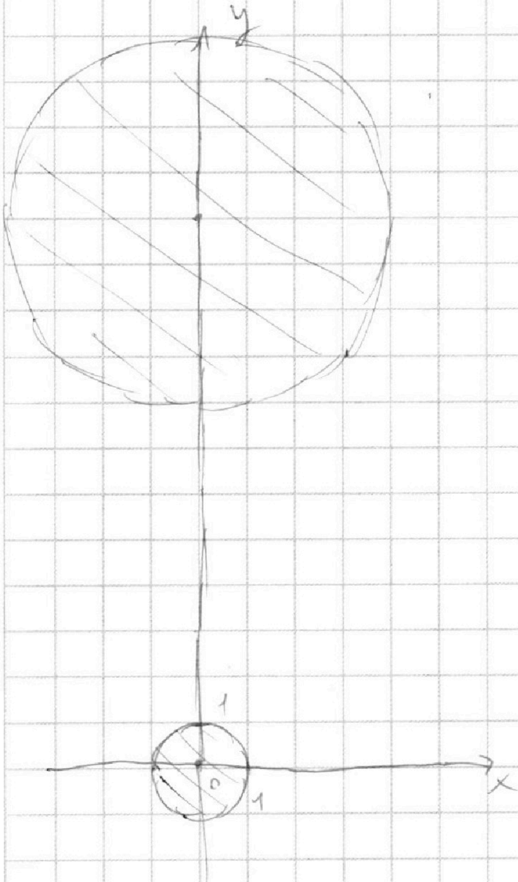
МФТИ

Черновик

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases}$$





$ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b$

$$\begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$x^2+(ax-8b)^2=1$

$x^2+a^2x^2-16abx+64b^2=1$

$(a^2+1)x^2-16abx+(64b^2-1)=0$

$D=16^2a^2b^2-4(a^2+1)(64b^2-1)=0$

$4\,(16\cdot 4a^2b^2-64a^2b^2-64b^2+a^2+1)=0$

$64b^2-a^2-1=0$

$b^2=(a^2+1):64$

$a^2=64b^2-1$

$\cancel{x^2+(y-12)^2=16}$

$\cancel{x^2+y^2-24y+144=16}$

$\cancel{x^2+a^2x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$x^2+y^2-24y+144=16$

$x^2+(ax-8b)^2+24(ax-8b)+144=16$

$x^2+a^2x^2-16abx+64b^2+24ax-24\cdot 8b+144=16$

$(a^2+1)x^2-x(16ab-24a)+64b^2-24\cdot 8b+144-16=0$

$8a(2b-3)$

$64b^2-3\cdot 64b+128=0$

$128=8\cdot 16=8^2\cdot 2=64\cdot 2$

$64(b^2-3b+2)$

$16a^2(2b-3)^2-(a^2+1)64(b^2-3b+2)=0$

$a^2(2b-3)^2-a^2 4(b^2-3b+2)-4(b^2-3b+2)=0$

$\underbrace{a^2(4b^2-12b+9)}-\underbrace{4a^2(b^2-3b+2)}=4(b^2-3b+2)$

$9a^2-8a^2=4(b^2-3b+2)$

$a^2=4(b^2-3b+2)$

$64b^2-1$

$64b^2-1=4b^2-12b+8$

$60b^2+12b-9=0$

$\frac{D}{4}=36+9\cdot 60=36+540=576$

$b=\frac{-6\pm\sqrt{576}}{60}=\frac{-1\pm\sqrt{\frac{576}{36}}}{10}=\frac{-1\pm 4}{10}$

$b=0{,}3\ ;\ b=-0{,}5$

$a^2=64b^2-1=\frac{64}{4}-1=16-1=15$

$a^2=64b^2-1=\frac{64\cdot 9}{100}-1=\frac{16\cdot 9-25}{25}=\frac{119}{25}$

$576 : 36 = 16$

$16\cdot 9=144$

$144-25=119$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$$

$$\sqrt{3(x^2-2x+1)-1}+\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2-1}+\sqrt{\left(\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{3(x-1)^2-1}+\sqrt{3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=1$$

$y=x-1$

$$\sqrt{3y^2-1}+\sqrt{3\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{3y^2-1}+\sqrt{3y^2+9y+3\cdot\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{3y^2-1}+\sqrt{3y^2+9y+7}=1$$

$$\sqrt{z}+\sqrt{z+9y+8}=1$$

$\times 26$, 26, $+156$, 52, 676

$\times 17$, 17, $+119$, 17, 289, $\times 289$, 2, 578

$$\left[\begin{array}{l}17x=0\\ \sqrt{1+x^2}\sqrt{49+17^2x^2}=26\end{array}\right.$$

$x=0$ $\ominus$

$(1+x^2)(49+17^2x^2)=26^2$

$17^2x^4+(49+17^2)x^2+49-26^2=0$

$\frac{2}{23}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \lessdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$

$2\sqrt{3}+2\sqrt{26} \vee 23\sqrt{3}+23$

$2\sqrt{26}\vee 21\sqrt{3}+23$

$\frac{2}{23}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{26}}{\sqrt{3}} \vee \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

$2\sqrt{26}\vee 21\sqrt{3}-23$

$23+2\sqrt{26}\vee 21\sqrt{3}$

$\wedge$ $\wedge$ 42 $\wedge$ 45

$$\frac{7}{17x}=\frac{7x}{y}$$

$$y=\frac{7x\cdot 17x}{7}=17x^2$$

$$7^2+(7x)^2=7^2(1+x^2)$$

$$(17x)^2+(17x^2)^2=17^2(x^2+x^4)=17^2x^2(1+x^2)$$

$$(7x)^2+(17x^2)^2=x^2\cdot 49+17^2x^4=x\sqrt{49+17x^2}^2$$

$$\sin\alpha=\frac{17x}{\sqrt{49+17^2x^2}}$$

$$17x\sqrt{1+x^2}=\frac{26\cdot 17x}{\sqrt{49+17^2x^2}}$$

$$\frac{17x\sqrt{1+x^2}}{\sin\alpha}=2R=26$$

$$17x\left(\sqrt{1+x^2}\sqrt{49+17^2x^2}\right)=26\cdot 17x$$

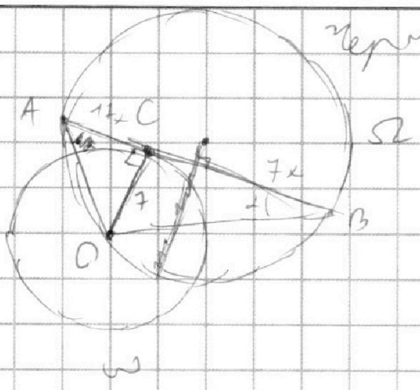
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик



$\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{17^2+(7x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R = 26$

$AC = 26\sin\alpha = \frac{26}{\sqrt{1+x^2}}$

$AC = \sqrt{(17x)^2+7^2}$

$\sqrt{((17x)^2+7^2)(1+x^2)} = 26$

$17^2x^4 + (7^2+17^2)x^2 + 7^2 - 26^2 = 0$

$17^2y^2 + (7^2+17^2)y - 19\cdot 33 = 0$

$289y^2 + 338y - 627 = 0$

$7^2 = 49$

$17^2 = 289$

$7^2+17^2 = 338$

$\frac{169}{2} = \frac{13^2}{2}$

$33 \cdot 19 = 297 + 33\ldots = 627$

$\frac{D}{4} = 13^4 + 17^2\cdot(13^2\cdot 2^2 - 7^2) =$

$= 13^4 + 2\cdot 13^2\cdot 17^2 + 17^4 - 17^4 - 7^2 =$

$= (13^2+17^2)^2 - 17^4 - 7^2$

$\sqrt{3x^2+6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

$9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$81x^2 = 4(3x^2+3x+1)$

$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$\frac{D}{4} = 36 + 4\cdot 69 = 36 + 276 =$
$= 312 = 2156 =$
$= 4\cdot 78 =$
$= 8\cdot 39 =$
$= 8\cdot 3\cdot 13$

$69 = 3\cdot 23$

$69 \cdot 4 = 276$

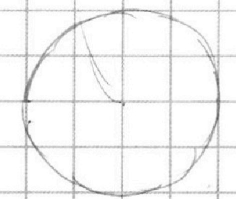
$x = \frac{6 \pm \sqrt{8\cdot 3\cdot 13}}{69} = \frac{2}{23} \pm \frac{2\sqrt{6\cdot 13}}{3\cdot 23} = \frac{2}{23} \pm \frac{2}{23}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} =$
$= \frac{2}{23}\left(\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{26}}{\sqrt{3}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

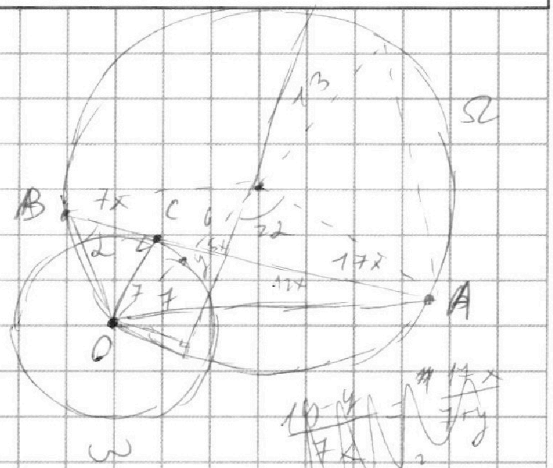
$S=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 24x=12\cdot 7x$



$(13+y)(13-y)=(12x)^2$

$169-y^2=144x^2$

$y=\sqrt{169-144x^2}$



$(17^2x^2+7^2)(x^2+1)=16\cdot 13^4$

$17^2x^4+(17^2+7^2)x^2+(7^2-16\cdot 13^4)=0$

$289x^4+2\cdot 169x^2-$

$AO=2\cdot 13^2-2\cdot 13^2\cos 2\alpha=$
$=2\cdot 13^2(1-\cos 2\alpha)$

$2\sin\alpha$

$\sqrt{(17x)^2+7^2}$

$4\cdot 13^2\cdot\sin\alpha$

$4\cdot 13^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{14-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$
$=\left(\frac{14}{x_2-x_1}-2\right)$

$y=\left(\frac{14}{x_2-x_1}-2\right)(x-x_1)+y_1$

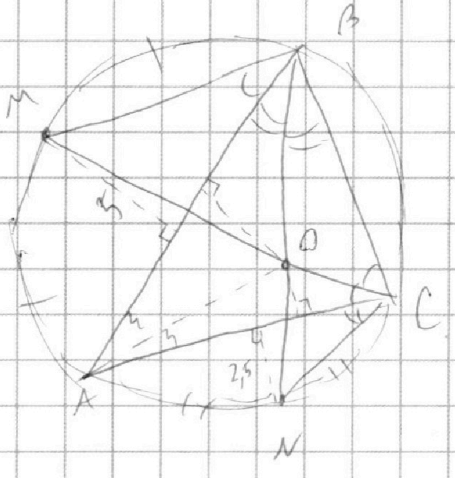
$17\cdot 17=289$

$289+49=338=2\cdot 169$

$169\cdot 169$: 1521, 1014, 169 → 18561

$12561\cdot 16$: 111366, 18561 → 296976

$296976-49=296927$



$\frac{r}{5}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

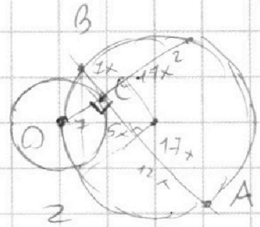
$874 \quad 437$

$\frac{1748}{996} = 5x \quad \frac{17x^2+7}{2} - 7 = \frac{17x^2-7}{2}$

498

249

$\frac{2}{23} \frac{\sqrt{3}+\sqrt{26}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$



$2\sqrt{3} + 2\sqrt{26} < 23\sqrt{3} - 23$

$2\sqrt{26} < 21\sqrt{3} - 23$

$4 \cdot 26 < 21^2 \cdot 3 - 2 \cdot 21 \cdot 23\sqrt{3} + 23^2$

$2 \cdot 21 \cdot 23 \cdot \sqrt{3} < 23^2 + 21^2 \cdot 3 + 4 \cdot 26$

$(-13;26) \quad (3;26)$

$\times \frac{23}{23}$, $+\frac{69}{46}$, 529

$529 + 63 + 80 + 24 =$
$= 529 + 63 + 104 =$
$= 529 + 167 =$
$= 696$

$\times \frac{42}{23}$, $+\frac{126}{84}$, 966

$24x \cdot (7 + 17x^2) =$
$=$

$(0;0) \quad (16;0)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \qquad 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$y_2 - y_1 = 14 - 2(x_2 - x_1)$

$2(16+13) + (0-26) =$

$= 2 \cdot 29 - 26 = 29 + 3 = 32$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

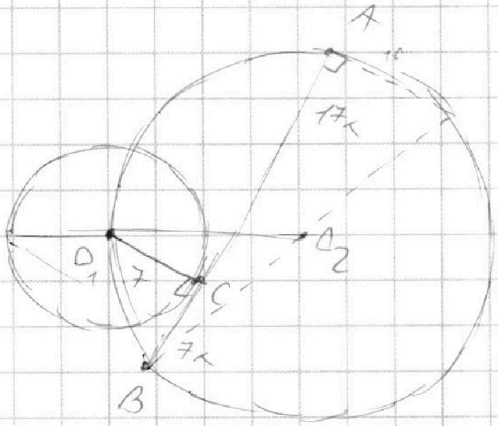
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$24^2 = 144 \cdot 4 = 576$

$26^2 = 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 =$

$= 400 + 240 + 36 =$

$= 676$