



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



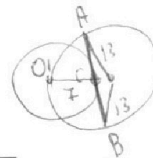
- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad O_1C = 7$$

$$O_2O_1 = 13$$

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ

v1

Как мы знаем,  $ab$  кратно  $2^{15} \cdot 7^4$ ,  $bc - 2^{17} \cdot 7^{12}$ ,

$ac - 2^{23} \cdot 7^{39}$ . Пусть

$$\begin{cases} ab = x \cdot 2^{15} \cdot 7^4 \\ bc = y \cdot 2^{17} \cdot 7^{12} \\ ac = z \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases}$$

где  $x, y$  и  $z$  - неизвестные натуральные числа.

Перемножим все 3 уравнения:

$$ab \cdot bc \cdot ac = xyz \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$(abc)^2 = xyz \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{xyz} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$$

Чтобы  $abc$  было минимально (и натурально из условия),  $\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2}$  должно (так как остальные множители ( $2^{27}$  и  $7^{34}$ ) и так натуральны) принимать наименьшее натуральное значение,

при котором  $x, y, z$  - натуральные числа, т.е.  $\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2} = 2$  (не может быть

$\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{2} = 1$ , ведь тогда  $xyz = \frac{1}{2}$ , что неверно,

т.к.  $x, y, z \in \mathbb{N}$ ).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем

$$abc = (\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z}) \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ:  $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$  - наименьшее возможное  
значение.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$y$  нас есть дробь  $\frac{a+b}{a^2+b^2-2ab}$ .

Ее числитель и знаменатель кратны  $m$

(их наибольший общий делитель).

Представим их <sup>(каждый из них)</sup> как ~~то~~ произведение

$m$  на какое-то число. Пусть

$$\begin{cases} a+b = xm \\ a^2+b^2-2ab = ym \end{cases}$$

где  $x, y$  - некоторые целые числа

$$\begin{cases} a = xm - b \\ (xm - b)^2 + b^2 - 2b(xm - b) = ym \end{cases}$$

$$x^2 m^2 + 9b^2 - 9xmb = ym$$

$$(xm)^2 + xm(-9b) + 9b^2 = ym$$

Мы получили функцию  $ym = f(xm)$  - параболу.

Ее вершина находится в точке  $-\frac{9b}{2 \cdot 1}$ .

Это также максимальное значение  $xm$ ,

так коэффициент при старшей степени  $(xm)^2$

положительный, ветвь параболы направлена

вниз.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит,

$$a + b = - \frac{-9b}{2 \cdot 1}$$

$$a + b = 4,5b$$

$$a = 3,5b$$

Подставим  $b$  нашу дробь:

$$\frac{3,5b + b}{(3,5b)^2 + b^2 - 7(3,5b \cdot b)}$$

$$\frac{4,5b}{-11,25b^2}$$

$$\frac{-18}{45b}$$

Наибольшее число, на которое мы

можем сократить числитель и знаменатель

полученной дроби - это 9. Мы получаем

несократимую дробь  $-\frac{2}{5b}$ , а  $m = 9$

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ⓑ)  $x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

$$\sqrt{\frac{8(6-2\sqrt{78})^2}{69 \cdot 69} - \frac{2(6-2\sqrt{78}) \cdot 138}{69 \cdot 23} + \frac{138^2}{69^2}} - \sqrt{\frac{8(6-2\sqrt{78})^2}{69 \cdot 69} + \frac{2(6-2\sqrt{78}) \cdot 69}{69 \cdot 23} + \frac{69^2}{69^2}} = 1 - \frac{3(6-2\sqrt{78})}{69 \cdot 23}$$

$$\sqrt{\frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} - 138(6-2\sqrt{78}) + 138 \cdot 23}{69 \cdot 23}} - \sqrt{\frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} + 69(6-2\sqrt{78}) + 69 \cdot 23}{69 \cdot 23}} = \frac{5 + 6\sqrt{78}}{23}$$

$$\sqrt{\frac{36 + 312 - 24\sqrt{78} - 138 \cdot 6 + 138 \cdot 2\sqrt{78} + 138 \cdot 23 - 36 - 312 + 24\sqrt{78} - 69 \cdot 6 + 138\sqrt{78} - 69 \cdot 23}{3}} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{1584 - 414 \cdot 3 + 138 \cdot 3\sqrt{78}}{3}} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{529 - 414 + 138\sqrt{78}} = 5 + 6\sqrt{78}$$

$$115 + 138\sqrt{78} = 25 + 36\sqrt{78} + 60\sqrt{78}$$

$$2718 = 78\sqrt{78}$$

$$453 = 13\sqrt{78}$$

неверно,  $x \neq \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

Получается,  $x = \frac{1}{9}$ .

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Сделаем замену переменных: пусть

$$3x^2 - 6x + 2 = a \quad \text{и} \quad 3x^2 + 3x + 1 = b,$$

при этом  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$  (так как из

них можно извлечь корень). Тогда  $1 - 9x = a - b$

Подставим:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ 1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{cases} *$$

Решим \*:

$$1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$1 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{ab} = 1 - a - b$$

$$4ab = 1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2ab$$

$$a^2 + a(-2 - 2b) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = \frac{2 + 2b \pm \sqrt{4 + 4b^2 + 8b - 4b^2 + 8b - 4}}{2}$$

$$a = 1 + b \pm \frac{\sqrt{16b}}{2}$$

$$\left[ \begin{array}{l} a = 1 + b + 2\sqrt{b} \\ a = 1 + b - 2\sqrt{b} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} a = (\sqrt{b} + 1)^2 \\ a = (\sqrt{b} - 1)^2 \end{array} \right.$$

Получается, что:

$$\left[ \begin{array}{l} a = b \\ a = (\sqrt{b} + 1)^2 \\ a = (\sqrt{b} - 1)^2 \end{array} \right.$$

Заменяя  $a$  и  $b$  на  $3x^2 - 6x + 2$  и  $3x^2 + 3x + 1$

соответственно.

$$\left[ \begin{array}{l} \cancel{3x^2 - 6x + 2} = \cancel{3x^2 + 3x + 1} \\ 3x^2 - 6x + 2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1)^2 \\ 3x^2 - 6x + 2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1)^2 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 = (3x^2 + 3x + 1) + 1 \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad ** \end{array} \right.$$

Решить \*\*: :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cancel{3x^2} - 6x + 2 = \cancel{3x^2} + 3x + 1 + 1 \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = \pm 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69 \cdot 4}}{2 \cdot 69}$$

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ \hline 69 \\ \hline 1104 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 1104 \\ 144 \\ \hline 1248 \end{array}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

Проверка:

①  $x = \frac{1}{9}$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{37}{81}} - \sqrt{\frac{37}{81}} = 0$$

$$0 = 0$$

Все верно, корни подходят

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \quad x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69} + 2} - \sqrt{3 \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{78}}{69}\right)^2 + 3 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69} + 1} =$$

$$= 1 - 9 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$$

$$\sqrt{\frac{3(36+4 \cdot 78+24\sqrt{78})}{69 \cdot 69} - \frac{36(6+2\sqrt{78})}{69} + \frac{138}{69}} - \sqrt{\frac{3(36+4 \cdot 78+24\sqrt{78})}{69 \cdot 69} + \frac{3(6+2\sqrt{78})}{69} + \frac{69}{69}}$$

$$= \frac{3(6+2\sqrt{78})}{69} - \frac{3(6+2\sqrt{78})}{69}$$

$$\sqrt{\frac{36+312+24\sqrt{78}}{23 \cdot 69} - 69 \cdot 2 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69} + 138 \cdot 23} - \sqrt{\frac{36+312+24\sqrt{78}}{69 \cdot 23} + 69 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69} + 69 \cdot 23}$$

$$= \frac{23 \cdot 69 - (18 + 6\sqrt{78})}{23}$$

$$\sqrt{\frac{348+24\sqrt{78}-138 \cdot 6-276\sqrt{78}+3174}{3}} - \sqrt{\frac{348+24\sqrt{78}+69 \cdot 6+138\sqrt{78}+1587}{3}}$$

$$= 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{348+24\sqrt{78}-138 \cdot 6-276\sqrt{78}+3174-348-24\sqrt{78}-138 \cdot 3-138\sqrt{78}-1587}{3}}$$

$$= 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{\frac{1587-138 \cdot 9-138 \cdot 3\sqrt{78}}{3}} = 5 - 6\sqrt{78}$$

$$\sqrt{529-414-138\sqrt{78}} = 5 - 6\sqrt{78}$$

$$115 - 138\sqrt{78} = 25 + 36 \cdot 78 - 60\sqrt{78}$$

$$2718 = -78\sqrt{78}$$

неверно.  $x \neq \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) Дана 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 4^2 \end{cases}$$

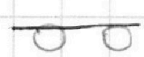
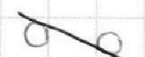


б) Дана 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 4^2 \end{cases}$$

решения будут находиться  
внутри и на окружности (2)

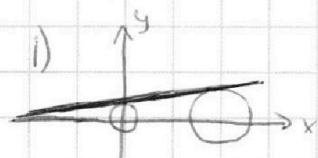
решения будут находиться  
внутри и на окружности (3)

Чтобы решение было два при объединении  
решений а) и б) и пересечении с прямой,  
прямая должна касаться каждой из окружностей.

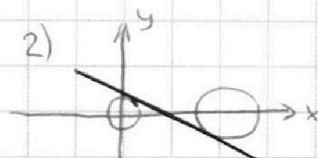
Всего возможно 4 случая:

(примерные схемы: 1)  2)  3)  4) 

найдем соответствующие  $a$  и  $b$ .

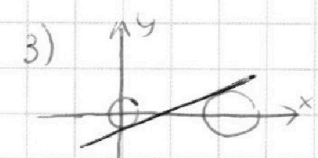


~~$y = kx + b$~~  
$$\begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

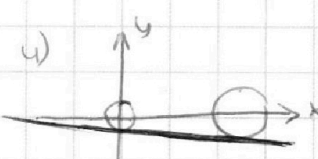


$$\begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1] \end{array} \right.$$
  

$$\begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x \in [-4; 4] \\ y \in [-4; 4] \end{array} \right.$$



$$\text{б) } \begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -ax + b \\ x^2 + a^2x^2 + b^2 - 2abx = 1 \end{cases}$$



$$x^2(1+a^2) + x(-2ab) + (b^2-1) = 0$$
  

$$x = \frac{2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2-1)}}{2(1+a^2)}$$
  

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - b^2 + 1 - a^2b^2 + a^2}}{1+a^2} = \frac{ab \pm \sqrt{a^2+1-b^2}}{a^2+1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нб

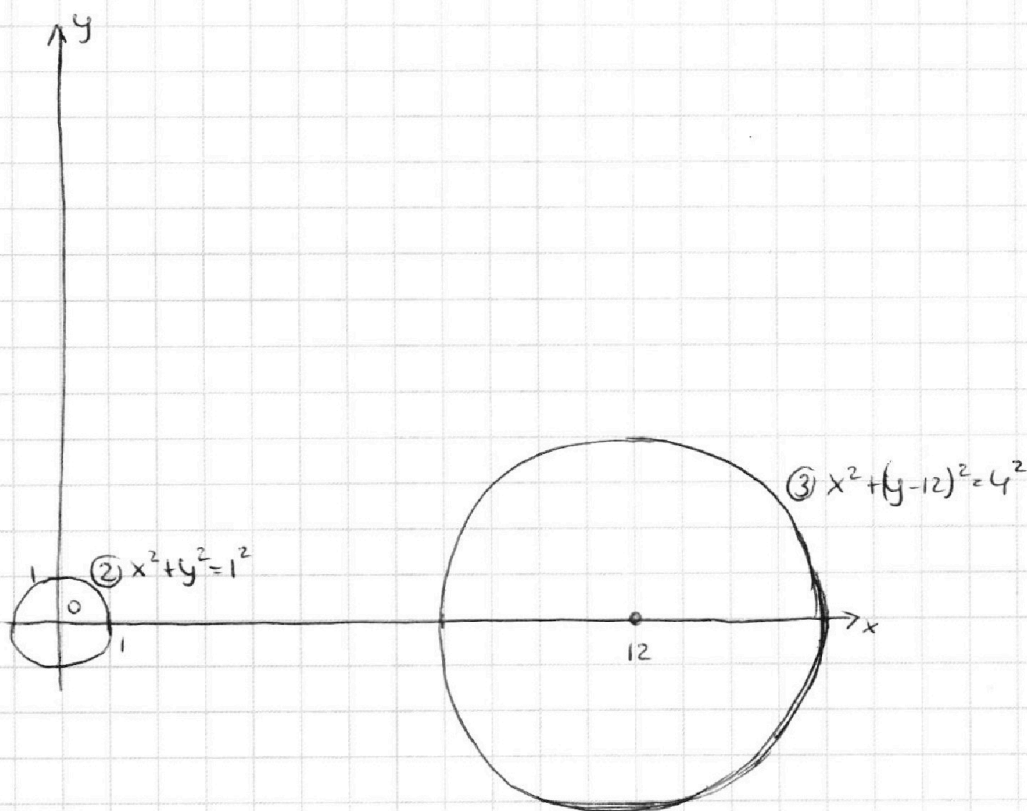
$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b & \text{①} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1^2 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 4^2 \end{cases} & \text{②} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1^2 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 4^2 \end{cases} & \text{③} \end{cases}$$

① - прямая

② и ③ - окружности

Изобразим ~~①, ② и ③~~ графики для ~~①, ②, ③~~.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

цель: Г

Равные дуги позволяют равные хорды,

значит,  $AN = NC$ ,  $AM = MB$ .

$MN_1$  и  $NH_2$  - высоты в равнобедренных

треугольниках (из вершины), а значит, они

же и медианы. Если провести  $MN_1$  и  $NH_2$

до пересечения, получим точку  $O$ ,  $MN_1 \cap NH_2 = O$ ,

где  $O$  - центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности,

ведь  $MN_1$  и  $NH_2$  - серединные перпендикуляры  $\triangle ABC$ .

( $MN_1$  - расс. от  $M$  до  $AB$ ,

$NH_2$  - расс. от  $N$  до  $AC$ )

$MN_1 = 5$ ;  $NH_2 = 2,5$

$AN_1, ON_2$  можно вписать в осп.

(так  $\angle AN_1O + \angle AN_2O = 180^\circ$ )

$\Rightarrow \angle AON = \angle AN_1N_2 = 2 \angle ACN$  (центральный угол)

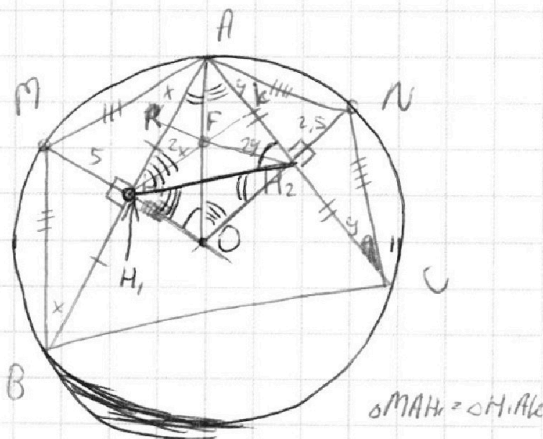
$\angle AOM = \angle AN_2N_1 = 2 \angle MBA$

пересечение в  $F$

$\Rightarrow$  проведем биссектрисы  $\angle AN_1N_2$  и  $\angle AN_2N_1$ , образующие

углы, равные соответственно  $\angle ACN$  и  $\angle MBA$

$AN_1N_2 \sim \triangle ABC$  с  $k=2$ , так  $AN_1 = \frac{1}{2} AB$ ,  $AN_2 = \frac{1}{2} AC \Rightarrow \frac{AF}{AN} = \frac{1}{2}$



$\triangle MAN_1 \sim \triangle N_1AN_2$

$\triangle MAN_1$  и  $\triangle N_1AN_2$   
параллелограмм.

$\angle F = 2 \angle AF$

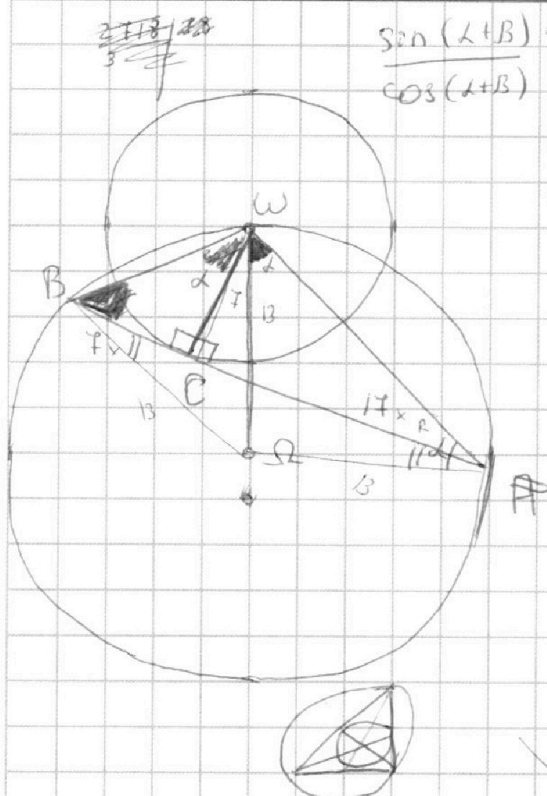
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$\sin 45 + 55 = 2 \sin 50 \cos 50$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$WC = 7$$

$$\Omega W = 13$$



$$\angle W \Omega A = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle WBA = \frac{\angle W \Omega A}{2} = 45 - \frac{\alpha}{4}$$

$$\angle BWC = 90 - \angle WBA = 90 - (45 - \frac{\alpha}{4}) = 45 + \frac{\alpha}{4}$$

$$\frac{90 - \alpha}{2} + \beta = \frac{90 + \alpha}{2} + \gamma \implies \frac{180 - 90 + \alpha}{2} = \frac{90 + \alpha}{2}$$

$$\gamma = 90 - \alpha - \alpha \implies \gamma = 90 - 2\alpha$$

$$R = \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned} \tan 30 + 30 &= \tan 30 \tan 60 \\ \tan 30 + 60 &= \tan 45 \end{aligned}$$

$$\frac{90 - \alpha}{2} + \beta = \frac{90 + \alpha}{2} + 90 - 2\alpha + \beta$$

$$\frac{90 - \alpha - 90 + \alpha}{2} = 90 - 2\alpha$$

$$-\alpha = 90 - 2\alpha$$

$$\alpha = 90$$

$$\tan(\alpha + \gamma) = \frac{17x}{h}$$

$$\angle B \Omega A = 180 - 2\alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{7x}{h}$$

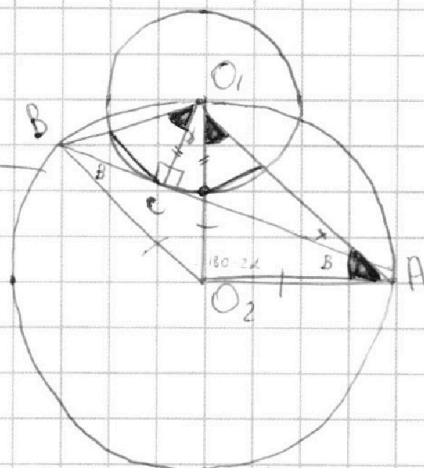
$$\angle WBA = \frac{\angle B \Omega A}{2} = 90 - \alpha \implies \frac{\tan(\alpha + \gamma)}{17} = \frac{\tan \alpha}{7}$$

$$\angle BWC = 90 - \angle WBA = \alpha$$

$$B + (90 - \alpha) = \alpha + (90 - (180 - (180 - 2\alpha) - \beta))$$

$$B + 90 - \alpha = \alpha + 90 - 2\alpha + \beta$$

$$\alpha + 2\alpha + \beta = 180$$



$$B + 90 - \alpha = \alpha + (90 - (180 - 2\alpha - \beta + x))$$

$$x = 180 - 90 - \beta - 190 - (180 - 2\alpha - \beta + x)$$

$$2x = 90 - \beta - 90 + 180 - 2\alpha - \beta + x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + b = xm$$

$$a = xm - b$$

$$(a+b)^2 - 9ab = ym$$

$$(xm)^2 + b^2 - 2xmb + b^2 - 9(xm - b)b = ym$$

$$9b^2 + xm(xm - 9b) - ym = 0$$

$$(xm)^2 + xm(-9b) + (9b^2 - ym) = 0$$

xm-парабола

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 3,5 \\ \hline 17,5 \\ + 10,5 \\ \hline 122,5 \end{array}$$

$$xm = \frac{9b \pm \sqrt{81b^2 - 36b^2 + 4ym}}{2} = \frac{9b \pm \sqrt{45b^2 + 4ym}}{2}$$

$$xm = \frac{9b \pm \sqrt{45b^2 + 4a^2 + 4b^2 - 28ab}}{2}$$

Верши:  $-\frac{-9b}{2} = 4,5b$

$$4,5b = a + b$$

$$xm = \frac{9b \pm \sqrt{(7b - 2a)^2}}{2}$$

$$a = 3,5b$$

$$xm = \frac{9b \pm |7b - 2a|}{2}$$

$$\frac{-4,5}{1,25b} = \frac{-18}{45b}$$

$$xm = \frac{9b \pm (7b - 2a)}{2} = \frac{6(9 \pm 7)}{2} \pm \frac{2a}{2} = 6(4,5 \pm 3,5) \pm a$$

$$\begin{cases} 8b + a \\ 8b - a \\ b + a \\ b - a \end{cases}$$

$$a, b = 6, b - a$$

$$m \cdot x = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{-18}{45b} : 9 = \frac{-2}{5b}$$

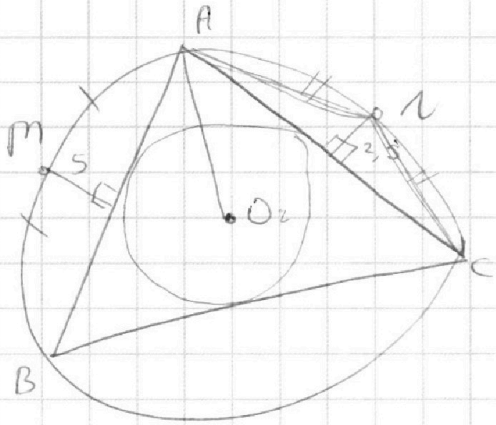
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O_2$  - y. Впис.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = a \geq 0 \quad 1 + \frac{3(6 + 2\sqrt{78})}{69 \cdot 23} = \frac{23 + 6 + 2\sqrt{78}}{12 \cdot 23} = \frac{29 + 2\sqrt{78}}{276}$$

$$1 - 9x = b \quad 3x^2 - 6x + 2 = b \geq 0 \quad 2 - \frac{36 + 12\sqrt{78}}{69 \cdot 23}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} = b - a \quad \frac{46 - 12 - 4\sqrt{78}}{23} = \frac{34 - 4\sqrt{78}}{23}$$

$$b - a = b^2 + a^2 - 2ab \quad b + a - 2\sqrt{ab} = b^2 + a^2 - 2ab$$

$$a^2 + a(1 - 2b) + (b^2 - b) = 0 \quad b + a + 2ab - b^2 - a^2 = 2\sqrt{ab}$$

$$a = \frac{2b - 1 \pm \sqrt{1 + 4b - 4b^2 - 4b^2 + 4b}}{2} \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$$

$$a = \frac{2b - 1 \pm 1}{2} \quad (\sqrt{b} - \sqrt{a})(1 - \sqrt{b} - \sqrt{a}) = 0$$

$$a = b - \frac{1 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} \sqrt{b} = \sqrt{a} \\ 1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{cases}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2 - \frac{1 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} a = b \\ 1 = a + b + 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$9x = 1 - \frac{1 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} a = b \\ 1 - a - b = 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = 0 \end{cases} \quad * 1 + a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b = 4ab$$

$$a^2 + a(-2 - 2b) + (b^2 - 2b + 1) = 0$$

$$a^2 + a(-2 - 2b) + (b - 1)^2 = 0$$

$$(a^2 - 2a(1+b) + (b-1)^2 = 0)$$

$$a = \frac{2 + 2b \pm \sqrt{4 + 4b^2 + 8b - 4b^2 - 4 + 8b}}{2}$$

$$a = 1 + b \pm \frac{\sqrt{16b}}{2} = 1 + b \pm \frac{4\sqrt{b}}{2} = 1 + b \pm 2\sqrt{b}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{l}
 ab \cdot 2^{15} \neq \\
 bc \cdot 2^{17} \neq \\
 ac \cdot 2^{23} \neq
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} ab \\ bc \\ ac \end{array}} \right) \times a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \neq$$

$$abc = 2^{34} \cdot 2^{18} \quad (\text{так как } \text{натур.})$$

min abc

$$\frac{a+b}{a^2 - tab + b^2} =$$

$$\frac{a}{b+c} = \frac{x}{b} + \frac{y}{c}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$a+b$  кратно  $m$

$$a^2 + b^2 - tab : m$$

$$= \frac{x}{(a+b)^2 - 9ab} + \frac{y}{-(a+b)^2 + 9a}$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 9ab : m \end{cases}$$

$$\frac{x \cdot \cancel{(a+b)} + y}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\begin{cases} -9ab : m \\ a+b : m \end{cases}$$

$$(a+b)$$

$y : -9ab$

$$\begin{cases} a+b = xm : 2 \\ -9ab = ym : 9 \end{cases}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{x}{(a+b)^2} + \frac{y}{-9ab}$$

$$\begin{cases} a+b = xm : 2 \\ -9ab = ym : 9 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$-(a+b)^3 9ab = -9ab((a+b)^2 - 9ab)x + y(a+b)^2(a^2 + b^2 - tab)$$

$$(a+b)^2 (+9ab(a+b) + y(a^2 + b^2 - tab)) = 9ab(a^2 + b^2 - tab)$$

$$a = xm - b$$

$$x = \frac{(a+b)^2 (9a^2b + 9ab^2 + y(a^2 + b^2 - tab))}{9ab(a^2 + b^2 - tab)}$$

$$-9xm + 9b^2 = ym$$

$$9b^2 - 9b xm - ym = 0$$

$$b = \frac{9xm \pm \sqrt{81x^2m^2 + 36ym}}{18}$$

$$= \frac{9xm \pm 3\sqrt{9x^2m^2 + 4ym}}{18} \in \mathbb{N}$$

$$xm : 2 \quad \sqrt{9x^2m^2 + 4ym} : 6$$

$$xm : 2 \\ ym : 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

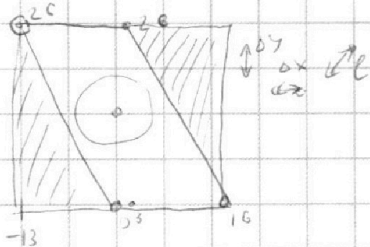
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \times 2 \Rightarrow 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$



$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$2\Delta x + \Delta y = 14$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = l^2$$

$$\Delta y = 14 - 2\Delta x$$

$$\Delta x^2 + 196 + 4\Delta x^2 - 56\Delta x = l^2$$

$$l^2 = 5\Delta x^2 - 56\Delta x + 196$$

$l$  - радиус окруж.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

2 рещ.

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

