



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть k_1, k_2, k_3 - это натуральные числа, где

$$\begin{aligned} 1) \quad a^b &= k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ 2) \quad b^c &= k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ 3) \quad a^c &= k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{29} \end{aligned}$$

Перемножив (1), (2) и (3), получаем:

$$(a^b)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

слева квадрат натур. числе,
слева и справа квадрат натур.

То есть степени всех простых
должны быть четными.

~~Отсюда, $k_1 k_2 k_3 = 2^x \cdot 7^y$~~

~~и $k_1 k_2 = 2^x \cdot 7^y$~~

~~и $k_1 k_2 = 2^x \cdot 7^y$~~

~~и $k_1 k_2 = 2^x \cdot 7^y$~~

Перемн. (1) и (2):

$$a^c \cdot b^a = k_1 k_2 \cdot 2^9 \cdot 7^{29} = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{29} \cdot 6^2$$

$$k_1 k_2 \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot 6^2$$

$$k_1 k_2 : 7^{10}$$

$$k_3 \cdot 6^2 : 2^9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$a, b, c \in \mathbb{N}$~~

~~Черновик~~

~~$ab = 2^{15} \cdot 7^2$~~

~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$~~

~~$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

Пусть $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$:

~~$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^2$~~

~~$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$~~

~~$ac = k_3$~~

$k_1 = 1$

$k_2 = 7^{10}$

$k_3 = 2$

$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

$b = 2^4$

$k_1 k_2 = 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^2$

$bc = 4$

~~$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^2$~~

~~$a \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 7^2$~~

~~$a = 2^{11} \cdot 7^2$~~

~~$ac = 2^{15} \cdot 7^4 \cdot 2$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Handwritten scribbles and calculations at the top of the page.~~

$$a = k_1 \cdot 2^{11} \cdot 7^{11}$$

$$c = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{18}$$

~~Handwritten scribbles~~

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$$

$$k_1 k_2 = 7^{10}$$

~~Handwritten scribbles~~

$$ac = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Например,

~~Handwritten scribbles~~

~~Handwritten scribbles~~

$$k_1 = k_2 = 7^5$$

$$a = 7^{16} \cdot 2^{11}$$

$$c = 7^{23} \cdot 2^{13}$$

$$b = 2^4$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

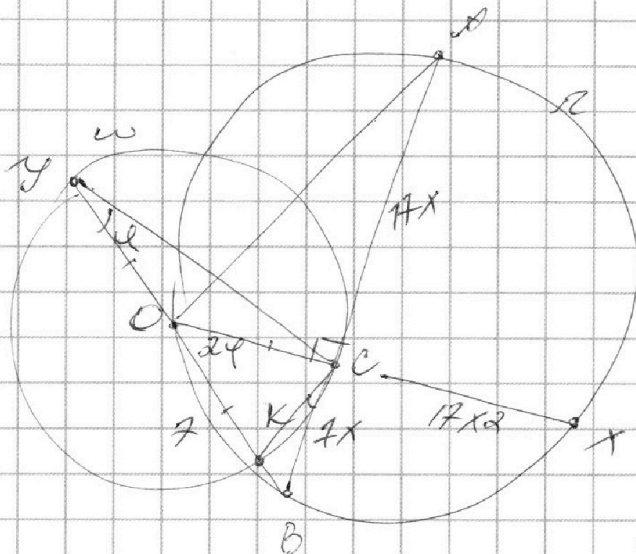
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



$AB = ?$
 Пусть
 O - центр ω
 r - рад. ω
 R - рад. Ω
 $r = 7$
 $R = 13$
 $\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

~~Let's assume~~

Пусть K и Y - точки пер OB с ω
(см. рис.)

Пусть $CB = 7x$, $AC = 17x$.

$AB = 24x = ?$

Пусть $\angle CYB = \varphi$, тогда $\angle COB = 2\varphi$
(центр, опущ на хорду CB).

Так как AB - кас. к ω в точке C ,
и OC - рад., то $OC \perp AB$.

Пусть $OC \perp AC = x$

Запишем теорему Пифагора
для $\triangle OAC$:

$$\begin{aligned}
 OC^2 + AC^2 &= AO^2 \\
 7^2 + (17x)^2 &= AO^2 \\
 AO &= \sqrt{7^2 + (17x)^2}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} + 289 \\ 2 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 578 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

~~$$\begin{array}{r} + 17 \\ + 17 \\ + 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 627 \\ 4 \\ \hline 2892508 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} + 19 \\ 33 \\ \hline + 57 \\ 57 \\ \hline 627 \end{array}$$

~~$$x \cdot \sqrt{17^2 x^2 + 7^2} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 26$$~~

$$(17^2 x^2 + 7^2)(x^2 + 1) = 26^2$$

$$|x^2 = a|$$

$$(17^2 a + 7^2)(a + 1) = 26^2$$

$$17^2 a^2 + 17^2 a + 7^2 a + 7^2 - 26^2 = 0$$

$$17^2 a^2 + a(17^2 + 7^2) + 19 \cdot 33 = 0$$

$$D = (17^2 + 7^2)^2 + 17^2 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 33$$

$$D = 17^4 + 2(7 \cdot 17)^2 + 7^4 + 17^2 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 33$$

~~$$D = 17^4 + 2(7 \cdot 17)^2 + 7^4 + 17^2 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 33$$~~

$$D = 17^2(17^2 + 4 \cdot 19 \cdot 33) + 7^2(7^2 + 2 \cdot 17^2)$$

$$D = 17^2(17^2 + 4 \cdot 627) + 7^2 \cdot 627$$

$$D = 17^4 + 4 \cdot 627 \cdot 17^2 + 7^2 \cdot 627 =$$

$$= 627(4 \cdot 17^2 + 7^2) + 17^4 =$$

$$= 627 \cdot 1405 + 17^4$$

$$x^2 = a = \frac{\sqrt{17^4 + 627 \cdot 1405} - (17^2 + 7^2)}{2 \cdot 17^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17^4 + 627 \cdot 1405} - (17^2 + 7^2)}{2} \cdot \frac{1}{17}$$

Ответ:

$$AB = 24x = \frac{24}{17} \cdot \frac{\sqrt{17^4 + 627 \cdot 1405} - (17^2 + 7^2)}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0, \quad (3) \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0, \quad (2) \\ 3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + \\ + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \quad (4) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = x - 18x + 81x^2 + 3x^2 + 3x + x + \\ + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x + 81x^2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x(9x - 1) - 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(9x - 1)(9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{9}, \\ 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \quad (4) \end{array} \right.$$

*) Заметим, что дискриминант

$$3x^2 + 3x + 1 \text{ равен } 9 - 3 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x.$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} D &= 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = (4 \cdot 3)^2 + 4 \cdot 69 = \\ &= 4^2 (9 + 69) = 4^2 \cdot 78 \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{2 \cdot 3 \cdot 23}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Таким образом, (1) имеет 3 решения!

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \\ x &= \frac{1}{9} \end{aligned} \right.$$

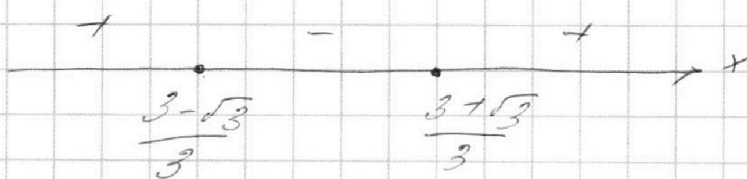
$$2) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} D &= 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 2 \cdot 3 = \\ &= 2^2 \cdot 3 (3 - 2) = 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$3 \left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$3) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1$$

Если $9x - 1 \leq 0$, кр-во выполняется.
~~при $x \leq \frac{1}{9}$~~

В-и случай, когда $9x - 1 \geq 0$.

Поскольку левая и правая части
кр-во неотриц., возведём в
квадрат без перемещения знака.

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 81x^2 - 18x + 1$$

$$78x^2 - 21x \leq 0$$

$$x(78x - 21) \leq 0$$

$$3x(26x - 7) \leq 0$$



$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$\textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty) \\ x \in [0; \frac{7}{26}] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{9} \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{48}}{69} \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

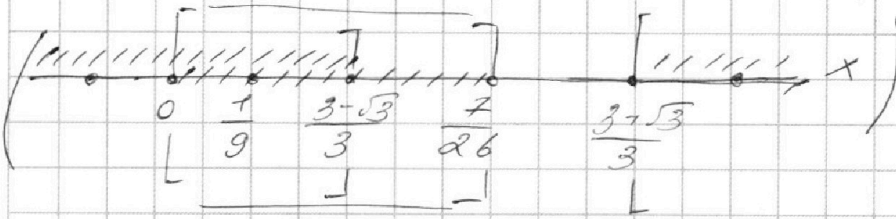
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



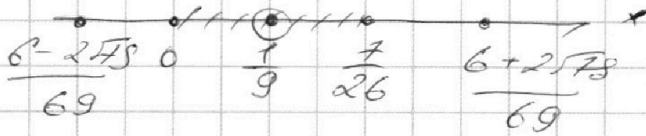
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Уточно:



Ответ: $x = \frac{1}{9}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$$ab = 7^{12} \cdot 2^{15}$$

$$bc = 7^{17} \cdot 2^{17}$$

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$$~~

$$a \cdot 2^4 = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$2^4 \cdot c = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$$

$$k_1 k_2 = 7^{10}$$

$$k_1 k_2 = 7^{10}$$

~~$$k_1 = 7$$

$$k_2 = 7^9$$

$$k_3 = 2$$~~

~~$$ab = 2^{15} \cdot 7^4$$

$$bc = 7^{27} \cdot 2^{17}$$

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$$~~

~~$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$~~

~~$$c = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{18} = 7^{23} \cdot 2^{13}$$~~

~~$$k_2 = 7^5 \quad k_1 = 7^5$$~~

~~$$a = 7 \cdot 2^{26}$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реш $k_1 k_2 = 7^{10}$, тогда $k_3 b^2 = 2^9$

$$b = 2^4$$

$$k_3 = 2$$

(1)

$$b = 2^3$$

$$k_3 = 2^3$$

(2)

$$b = 2$$

$$k_3 = 2^7$$

(3)

1) $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$
 $b = 2^4$

~~Реш~~

~~$$ac = k_2 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$~~

~~$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$$~~

~~$$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$~~

~~$$a \cdot 2^4 = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$~~

~~$$a = \frac{2^{24} \cdot 7^{39}}{2^4} = 2^{20} \cdot 7^{39} k_1$$~~

~~$$2^{13} \cdot 7^{28} = 2^{20} \cdot 7^{39} k_1 c$$~~

~~$$2^{13} \cdot 7^{28} = k_1 c$$~~

~~Реш~~

Если такой
 случай у нас
 построится,
 то др
 расщепит на
 базис, веро
 ба оптим,
 так как
 при $\min(a,b,c)$
 растет \uparrow
 $\min(k_1, k_2, k_3)$.

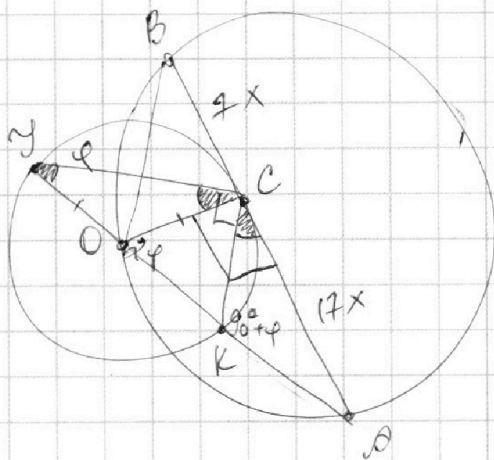
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle OAC$:

$$\frac{17x}{\sin \varphi} = \frac{OC}{\cos 2\varphi}$$

$\triangle OBC$:

$$\frac{OC}{\sin 2\varphi} = \frac{7}{\sin \varphi}$$

$$OC = \frac{7 \sin 2\varphi}{\sin \varphi} = 14 \cos \varphi$$

$$\frac{17x}{\sin \varphi} = \frac{14 \cos \varphi}{\cos 2\varphi}$$

$\triangle OBA$: $\frac{OB}{\cos 2\varphi} = 2R$

$$\frac{7\sqrt{x^2+1}}{\cos 2\varphi} = 26$$

$$\cos 2\varphi = \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} = 2\cos^2 \varphi - 1$$

Т. Пиф.

для $\triangle OBC$:

$$OB^2 = 7^2 + 7x^2$$

$$OB = 7\sqrt{x^2+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

3) $1-9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$

Поскольку левая и правая части
выражения ~~неотрицательны~~ неотрицательны, возведем
квадрат без перемены знака.

⑦

$$x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$
$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{37}}{69}$$
$$\frac{81 \cdot 3}{21}$$

$$54 - 17 = 44 - 7 = 40 - 3 = 37$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{18}{27} + \frac{54}{27}} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2} =$$
$$= \sqrt{\frac{37}{27}}$$
$$= \sqrt{27 - \frac{2}{3} + 2}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{9}{27} + \frac{27}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

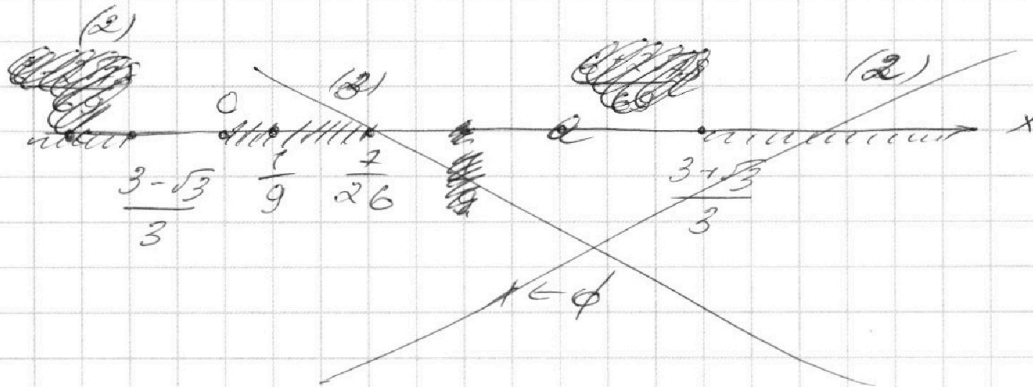
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{31}{27}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$31^2 - 6x + 270$$

$$x = 36 - 4 \cdot 6 = 36 - 24 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$x = \frac{36 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

~~$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \neq \frac{1}{9}$~~

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \neq \frac{1}{9}$$

$$9 - 3\sqrt{3} \neq 1$$

$$8 \neq 3\sqrt{3}$$

$$64 \neq 9 \cdot 3 = 27$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle OBC$:

$$\frac{OB}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = 2R$$

$$\frac{7\sqrt{1+x^2}}{\cos 2\varphi} = 26$$

~~$\triangle AOC$:~~

~~$$\frac{7}{\sin \varphi} = 2R$$~~

~~$$\frac{7}{\sin \varphi} = 14^2$$~~

~~$$\sin \varphi = \frac{1}{2}$$~~

~~$$\varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$~~

~~$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$~~

~~$$14\sqrt{1+x^2} = 26$$~~

~~$$\sqrt{1+x^2} = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$~~

~~$$1+x^2 = \left(\frac{13}{7}\right)^2$$~~

4-30

~~$$x = \sqrt{\left(\frac{13}{7}\right)^2 - 1}$$~~

~~$$x = \sqrt{\frac{169-49}{49}} = \sqrt{\frac{120}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{30}$$~~

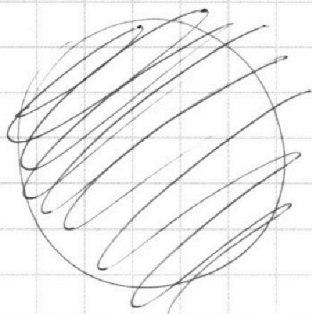
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Стелены мяки
в гле окр. α :

$$7 \cdot CA = 171 - 7x^2$$

$$CA = 17x^2$$

Т. сиркусов гле

$\triangle OBA$:

$$\frac{BA}{\sin 24} = 2R$$

$$\frac{BA}{\sin 24} = 26$$

По к. Пиф.
гле $\triangle BCA$:

$$BA^2 = CA^2 + BC^2$$

$$BA^2 = 17^2 x^4 + 7^2 x^2$$

$$BA = x \sqrt{17^2 x^2 + 7^2}$$

$\triangle OCB$:

$$\sin 24 = \frac{BC}{OB} = \frac{7x}{7+KB}$$

По к. ~~к~~ Косинусо кс.

$$7^2 x^2 = KB^2 + 14KB$$

$$KB^2 + 14KB - 7^2 x^2 = 0$$

$$D = 14^2 + 4 \cdot 7^2 x^2$$

$$= 14^2 (1 + x^2)$$

$$KB = \frac{-14 + 14 \sqrt{1 + x^2}}{2}$$

$$KB = 7 \sqrt{1 + x^2} - 7$$

$$7 + KB = 7 \sqrt{1 + x^2}$$

$$\sin 24 = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$



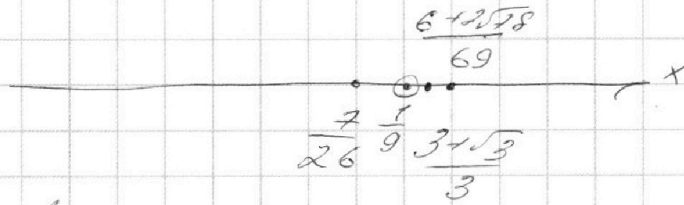
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{7}{26} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$21 < 26 \cdot 3 + 26\sqrt{3}$$

$$21 - 26 \cdot 3 < 26\sqrt{3}$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$= 23 \cdot 3$

$$6+2\sqrt{78} < 23 \cdot 3 + 23\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{78} - 23\sqrt{3} < 23 \cdot 3 - 6 = 63$$

$$2 \cdot \sqrt{26 \cdot 3} - 23\sqrt{3} < 21\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{26} - 23 < 21\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{26} - 21\sqrt{3} < 23$$

$$\frac{78}{6} \Big/ \frac{3}{26}$$

13

$$\frac{4}{26} > \frac{1}{9}$$

$$63 > 26$$

$$2\sqrt{26} < 21\sqrt{3}$$

$$4 \cdot 26 < 21 \cdot 3$$

~~Handwritten scribbles~~

~~Handwritten scribbles~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

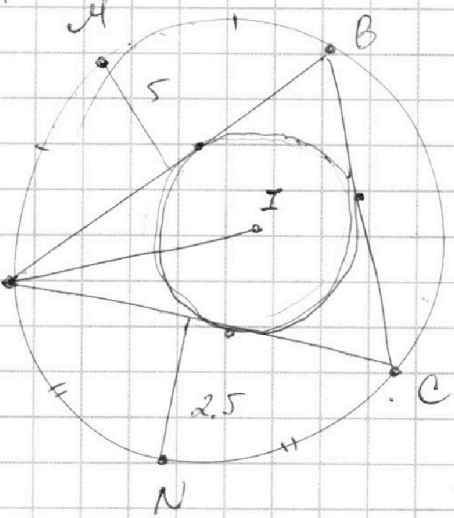
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 209 \overline{) 17} \\ \underline{17} \\ 39 \\ \underline{34} \\ 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 000 \end{array}$$



~~$$\begin{array}{r} 289 \\ \underline{289} \\ 0 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 289 \\ \underline{4} \\ 1356 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1356 \\ \underline{49} \\ 1405 \end{array}$$

~~$$\sin 24 = \frac{26}{BA}$$~~

~~Handwritten scribbles~~

~~$$\sin 24 = \frac{26}{BA}$$~~

$$\sin 24 = \frac{7x}{7}$$

$$\frac{BA}{7x} \cdot 7 = 26$$

$$BA^2 = (7x)^2 + (17x^2)^2$$

~~Handwritten scribbles~~

$$BA^2 = 7^2 x^2 + 17^2 x^4$$

$$BA = x \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}$$

$$\frac{\sqrt{7^2 + 17^2 x^2}}{7} \cdot 7 = 26$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} + 1}{2} = \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

$$1 - \frac{\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} + 1}{2} = \sin^2 \varphi$$

$$\frac{2(17x)^2}{1 - \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}} = \frac{14 \cdot 7 \cdot \left(\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} + 1\right)}{\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}}$$

$$\left| \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} = a \right|$$

$$\frac{(17x)^2}{1-a} = \frac{7^2(a+1)}{a}$$

$$7^2(1-a^2) = (17x)^2 \cdot a$$

$$7^2 \left(1 - \frac{49}{26}(x^2+1)\right) = 17^2 x^2 \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}$$

$$\left| \sqrt{x^2+1} = 6 \right|$$
$$x^2 = 6^2 - 1$$

$$7^2 - \frac{7^3}{26} \cdot 6^2 = 17^2 (6^2 - 1) \cdot \frac{7 \cdot 6}{26}$$

$$26 \cdot 7 - 7^3 \cdot 6^2 = 17^2 (6^2 - 1) \cdot 6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$14y + 3y^2 = y^2 + 7y$$

$$2y^2 + 7y = 0$$

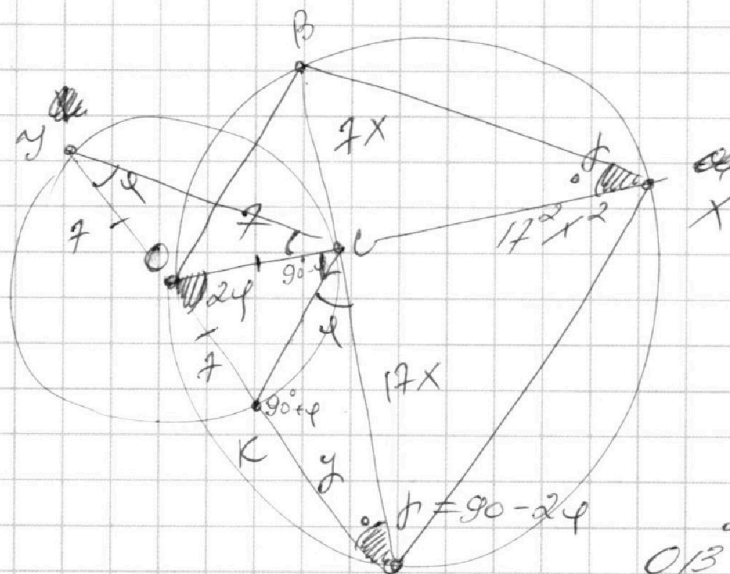
$$2y + 7 = 0$$

$$y = -\frac{7}{2} \quad \text{???}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$



$$\mu = 180 - 90 - \varphi - \varphi = 90 - 2\varphi$$

$$OB^2 = 7^2 + (7x)^2$$

$$OB = 7\sqrt{1+x^2}$$

$$y(y+14) = 17^2 x^2$$

$$(7+y)^2 = 7^2 + 17^2 x^2$$

$$7^2 + (7x)^2 = (7+y)^2$$

$$\sqrt{7^2 + (7x)^2} - 7 = y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten signature

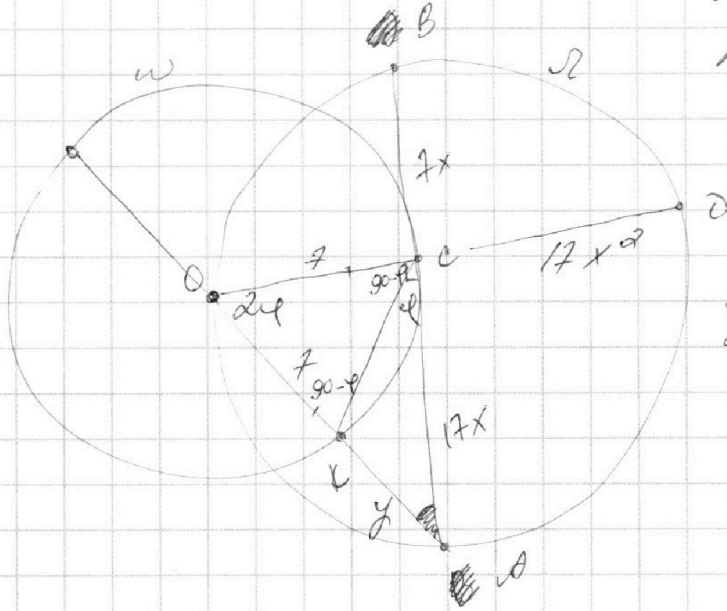
$$OC : EB = 17 : 7$$

$$AB - ?$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$

$$\frac{180 - 24}{2} = 90 - \varphi$$



$$OK \cdot OO' = OC^2$$

$$\frac{OK}{OC} = \frac{OC}{OO'}$$

⊕

~~$$OK \cdot OO' = 17x^2$$

$$OK(7 + OK) = 17x^2$$

$$x^2 = \frac{OK(OK + 7)}{17^2}$$

$$17x^2 + 7 = (OK + 7)^2$$

$$17x^2 + 7 = OK^2 + 14OK + 49$$

$$17x^2 = OK^2 + 14OK$$

$$\frac{OK(OK + 7)}{17} = OK^2 + 14OK$$~~

~~$$17OK + 7 = OK^2 + 14OK$$

$$OK^2 + 7OK = OK^2 + OK \cdot 14$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

min abc - ?

$$ab: 2^{15} \cdot 7^1$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

~~ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^1~~

$$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^1$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 23 \end{array}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 11 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29 \\ 39 \end{array}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 718 \end{array}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{k_1 k_3}{k_2} \cdot \frac{2^{38} \cdot 7^{50}}{2^{17} \cdot 7^{18}}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 32 \\ 23 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$a^2 = \frac{k_1 k_3}{k_2} \cdot 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{k_1 k_3}{k_2}$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$k_1 k_2 k_3 = 2$$

$$ac \cdot b^2 = k_1 k_2 \cdot 2^{39} \cdot 7^{39} = k_3 \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}$$

$$k_1 k_2 \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{2^9}{k_3}$$

$$\frac{2^{10}}{k_3} = k_3 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{2^{10}}{7^{10}} = k_3^2$$

$$k_3 = \frac{2^5}{7^5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta OCO:$

$$7^2 + (17x)^2 = (y+7)^2$$

$$y(y+7) = (17x)^2$$

$$(y+7)^2 - 7^2 = y(y+7)$$

$$y^2 + 14y = y^2 + 7y$$

$\Delta KCO:$

$$\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{17x}{\sin(90^\circ - \varphi)}$$

~~$\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{17x}{\cos \varphi}$~~

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{y}{17x}$$

$\Delta OCO:$

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{17x}{7+y} = \frac{2 \operatorname{ctg} \varphi}{1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi}$$

$$17x^2 = y(y+7)$$

$$\frac{17x}{7+y} = \frac{2y}{17x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{y^2}{17^2 x^2}}$$

$$17^2 x^2 \left(1 - \frac{y^2}{17^2 x^2}\right) = 2y(7+y)$$

$$17^2 x^2 - y^2 = 2y(7+y)$$

$$17^2 x^2 - y^2 = 14y + 2y^2$$

$$17^2 x^2 = 14y + 3y^2 = y(y+7) = y^2 + 7y$$

$x = ?$

$$k_2 = 7^{10}$$

$$k_3 = 1$$

$$7^{10} \cdot 2^9 = 7^{10} \cdot 6^2$$

$$7^{10} \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot 6^2$$

$$2^9 = k_3 \cdot 6^2$$

$$k_3 = 2 \quad 6 = 2^3$$

$$k_3 = 2^3 \quad 6 = 2^3$$

$$k_3 = 2^4 \quad 6 = 2$$

$$\frac{17^3}{16 \cdot 18} \sqrt[3]{26}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

⊖

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$~~

~~$$3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 81x^2 + 3x^2 + 3x - 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$~~

~~$$-6x = -18x + 81x^2 + 3x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$~~

~~$$81x^2 - 9x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$~~

~~$$9x(9x - 1) + 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$~~

~~$$(9x - 1)(9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$~~

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ 9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0, \quad (1) \end{cases}$$

1) $9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1), \end{cases}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{8}}{3 \cdot 23}$$

$$\frac{7 \cdot 8 \sqrt{2}}{6 \cdot 39}$$

~~$$\frac{20 \sqrt{4}}{38}$$~~

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{28}}{2 \cdot 3 \cdot 23}$$

$$\frac{39 \sqrt{3}}{13}$$

$$3 \cdot 100 - 60 + 2 \geq 0$$

36 - 4 - 6 > 0

9 - 12 < 0

$$\begin{array}{r} 10 \\ -81 \\ \hline 12 \\ -69 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \hline 23 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



критерий

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{9}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ -54 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$6 \cdot 9 + 18\sqrt{78} \leq 69$$

$$6\sqrt{78} \leq 15$$

$$6\sqrt{78} \leq 5$$

не реше

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{9}$$

$$54 - 18\sqrt{78} \leq 69$$

да

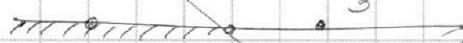
$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \leq 0$$

$$6 - 2\sqrt{78} \leq 0$$

$$3 \leq 2\sqrt{78}$$

$$9 \leq 78$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3\sqrt{3}}{3}$$



$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \leq \frac{1}{9}$$

$$9 + 2\sqrt{3} \leq 9$$

$$3\sqrt{3} \leq -8$$

$$1 - 9x \geq -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$5^2 - 3^2 = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 400 = 225$$

ОК

$$1 - 18x + 81x^2 + 3x^2 + 3x + 1 +$$

$$+ 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$84x^2 - 18x + 2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$2(1 - 9x)\sqrt{3} \geq -9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle OBA = 90^\circ - 2\varphi \text{ (из } \triangle OAB)$$

Запишем т. синусов для $\triangle AOB$:

$$\frac{AO}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{7^2 + (7x)^2}}{\cos 2\varphi} = 2R$$

~~По т. синусов для $\triangle AOB$:
 $\frac{AO}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = \frac{AB}{\sin 2\varphi}$~~

~~По т. косинусов для $\triangle AOB$:
 $AO^2 = AB^2 + BO^2 - 2 \cdot AB \cdot BO \cdot \cos 2\varphi$~~

т. синусов для $\triangle AOC$:

$$\frac{AC}{\sin 2\varphi} = \frac{AO}{\sin \varphi}$$

$$\frac{AC}{2 \cos \varphi} = \frac{7}{1}$$

$$AC = 14 \cos \varphi$$

~~По т. синусов для $\triangle AOC$:
 $\frac{AC}{\sin 2\varphi} = \frac{AO}{\sin \varphi}$~~

т. синусов для $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = \frac{AB}{\sin \varphi}$$

$$\frac{14 \cos \varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{7x}{\sin \varphi}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\varphi \leq 45^\circ$ (оснр. в \triangle)



$\sin \varphi, \cos \varphi > 0$

$2\varphi \leq 90^\circ$

$\sin 2\varphi, \cos 2\varphi > 0$

$$7x = \frac{14 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos 2\varphi}$$

$$7^2 + (7x)^2 = 26 \cos 2\varphi$$

$$(7x)^2 = 26 \cos 2\varphi - 7^2$$

$$x^2 = \frac{26 \cos 2\varphi - 7^2}{17^2} = \frac{14^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{7^2 \cos^2 2\varphi}$$

$$26(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 7^2$$