



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть  $ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$ ,  $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$ ,  $ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$ ,  
где  $k, m, n \in \mathbb{N}$ , тогда  $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

Тем меньше  $k \cdot m \cdot n$ , тем меньше произведение  
 $(abc)^2$ , т.е. тем меньше  $abc$ .

И.к. в левой части равенства стоит квадрат  
натурального числа, то в правой части все  
степени простых чисел должны быть четны,  
а т.к.  $51$ -неч. число, то ~~натуральное число~~

~~в произведении  $k \cdot m \cdot n$  входит хотя бы одна двойка~~  
~~и произведение  $k \cdot m \cdot n$  не может быть натуральным~~

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  - степени вхождения  $7$  в  
числа  $a, b, c$  соответственно, а  $x, y, z$  - сте-  
пени вхождения  $7$  в числа  $k, m, n$  соот-  
ветственно, тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 10 + x \\ \beta + \gamma = 17 + y \\ \alpha + \gamma = 37 + z \end{cases}$$

$x + y + z$  должно быть четно  
и минимально

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 27 + x + y$$

(продолж. №1)

$$\alpha + \gamma = 37 + z$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq \alpha + \gamma, \text{ т.к. } \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y \geq 10 + z \Rightarrow \text{минимальная сумма}$$

$$x + y + z = 10 \quad (\beta = 0, z = 0) \quad (x + y + z \geq 10 + 2z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{минимальное произведение } abc =$$

$$= \sqrt{252 \cdot 7 \cdot 74} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример:

$$a = 2^9 \cdot 7^{20} \quad b = 2^6 \quad c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

Чтобы дробь можно было сократить на  $m$ ,  $a+b$  должно быть кратно  $m$  и  $(a+b)^2-8ab$  должно быть кратно  $m$

$$\left. \begin{array}{l} a+b : m \Rightarrow (a+b)^2 : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{array} \right\} \Rightarrow 8ab : m$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ 8ab : m \end{cases}$$

М.к.  $\frac{a}{b}$  - несократимая дробь,  
у  $a$  и  $b$  нет общих делителей

$\nearrow$   $a+b, b$   $\Rightarrow$  если  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ,  
 $a \cdot b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_m^{\beta_m}$ , то  
( $p_i, q_j$  где  $i \in [1, n]$  и  $j \in [1, m]$  - простые)  
 $a+b \nmid p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$

$\Rightarrow m \nmid p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$

$\Rightarrow ab \nmid m$ , а т.к.  $8ab : m$ , то

максимальное  $m$ , подхо-  
дящее под условие равно 8

Ответ: 8



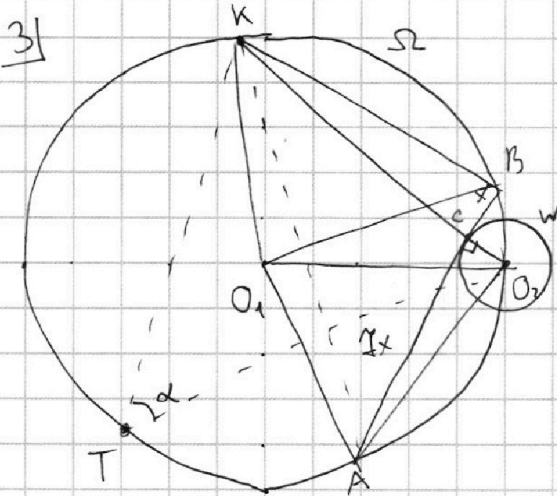
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Четырёхугольник  $O_2BKA$  вписан в  
окр.-ть  $\Omega \Rightarrow O_2C \cdot CK =$   
 $= BC \cdot AC = 1 \cdot CK = 4x^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CK = 4x^2$

~~Четырёхугольник  $O_2BKA$  вписан в  
окр.-ть  $\Omega$~~

~~$\triangle KO_2A$~~

~~$KA = \sqrt{4x^2 + 4x^2} =$   
 $= 4x\sqrt{x^2 + 1}$   
(по т. Пифагора)~~

~~3)  $\angle KO_1O_2 = 2\angle KO_2A$  (как центр.  
и вписан. углы)  $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 1 - \frac{(4x^2 + 1)^2}{50} = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4x^2 + 1}{5}$~~

~~2)  $KO_2 = 4x^2 + 1$~~

~~по т. косинусов~~

~~$(KO_2)^2 = (KO_1)^2 + (O_1O_2)^2 - 2 \cdot KO_1 \cdot$~~

~~$O_1O_2 \cdot \cos \angle KO_1O_2 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \cos \angle KO_1O_2 = 1 - \frac{(4x^2 + 1)^2}{50}$~~

2) т.к.  $AB$  - касательная к  $\omega$ ,  $\angle O_2CA = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow KBO_2A$  - четырёхугольник с  $\perp$  диагоналями

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 7x)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \cancel{2x^2 - 5x + 3} - \cancel{(2 - 7x)} = 2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x) +$$

$$+ (2 - 7x)^2 - 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x)(3 - 7x)$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 + \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$+ 9 - 42x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases} \leftarrow D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 976 = 4 \cdot \sqrt{61} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \leftarrow D < 0, \text{ параболы ветвями вверх} \Rightarrow \text{всегда} > 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-3) \geq 0 \text{ или } \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \\ \quad \quad \quad 1 \quad \quad 1,5 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{все 3 полученных корня подходят}$$

по ОДЗ

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7}, \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

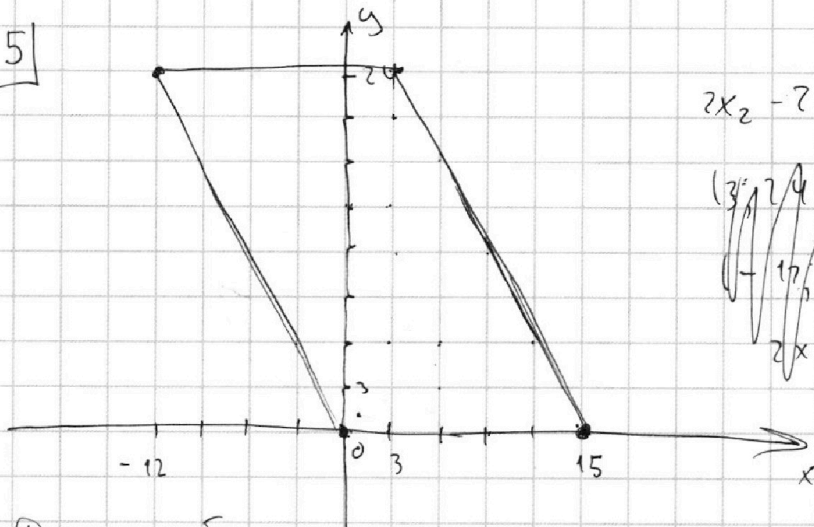
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -17 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$2x_2 - 2x_1 = 12$$
$$x_2 - x_1 = 6$$

Для любых точек с четной разностью по  $y$  ( $y_1 - y_2 = 2$ ) можно подобрать

Разность координат точек по оси  $x$  должна быть четной, иначе  $2x_2 - 2x_1 = \text{неч. число} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 - x_1$  не целое, что противно условию

условию

Пусть  $y_1 \geq y_2$ .

$y_1 - y_2 = 0$ : подходят любые точки с разностью  $\Delta x = 6$  по оси  $x$ ; таких пар точек 10 для каждого  $y_2 \Rightarrow$  всего  $25 \cdot 10 = 250$

$y_1 - y_2 = 2$ :  $\Delta x = 5 \Rightarrow$  всего  $23 \cdot 11 = 253$

$y_1 - y_2 = 4$ :  $\Delta x = 4 \Rightarrow$  всего  $21 \cdot 12 = 252$

$y_1 - y_2 = 6$ :  $\Delta x = 3 \Rightarrow$  всего  $19 \cdot 13 = 247$

$y_1 - y_2 = 8$ :  $\Delta x = 2 \Rightarrow$  всего  $17 \cdot 14 = 238$

$y_1 - y_2 = 10$ :  $\Delta x = 1 \Rightarrow$  всего  $15 \cdot 15 = 225$

$y_1 - y_2 = 12$ :  $\Delta x = 0 \Rightarrow$  всего  $13 \cdot 16 = 208$

Итого:  $250 + 253 + 252 + 247 + 238 + 225 + 208 = 1673$

Ответ: 1673



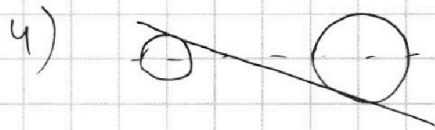
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(продолж. №6)

Аналогично п. 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{3}a = 10b \\ \sqrt{\frac{55}{8}} = a\left(-8 + \frac{3}{8}\right) + 10b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{16}{3}a$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{55}}{8} = -\frac{55}{24}a \Rightarrow a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{\sqrt{63}}; \frac{1}{\sqrt{63}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

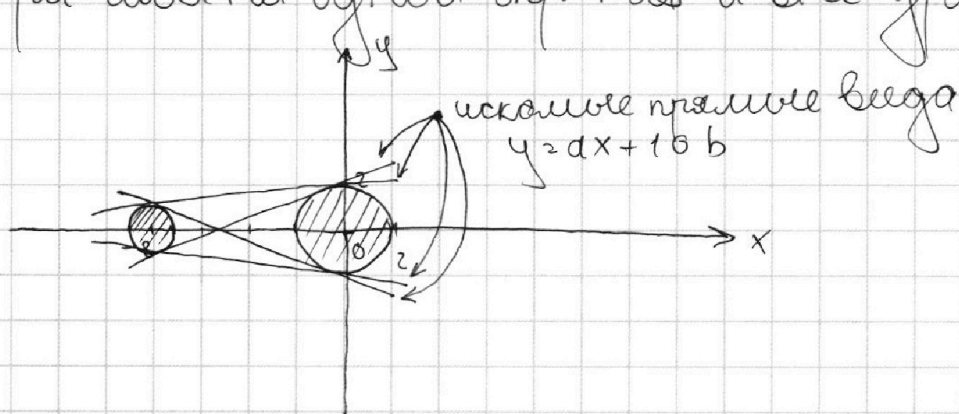
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

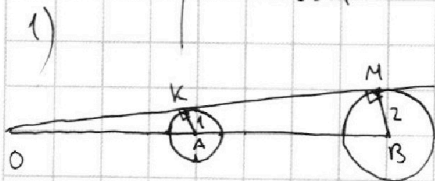
Рассмотрим левое неравенство:

Каждая из скобок представляет собой уравнение окр.-ти, ~~и~~ меньше нуля, если точка с коорд.  $x; y$  лежит вне окр.-ти, равно нулю — если на окр.-ти, больше нуля, если вне окр.-ти  $\Rightarrow$  их произведение  $\leq 0$ , если точка  $x; y$  лежит внутри или на одной окр.-ти и вне другой



Верхнее ур.-ние системы представляет собой ур.-ние прямой  $y = ax + b \Rightarrow$

$\Rightarrow$  система имеет ровно два реш., если прямая, описанная верхним ур.-нием является общей касательной к двум окр.-там



$\Delta OKA \sim \Delta OMB$  по 2-м углам с коор. 1:2  $\Rightarrow OA = \frac{OB}{2} = \frac{OA + AB}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow OA = AB = 8 \Rightarrow$  прямая проходит через точку  $(-16; 0) \Rightarrow 16a = 10b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

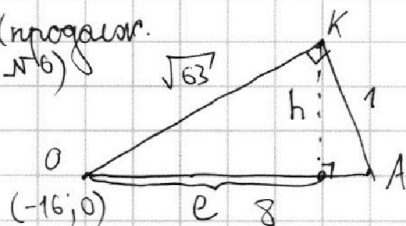
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(продолж.  
№6)



$$h \cdot 8 = \sqrt{63} \cdot 1 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

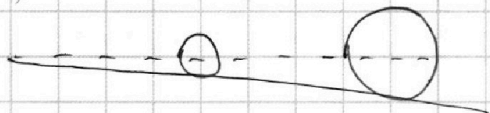
$$e = \sqrt{63 - \frac{63}{64}} = \sqrt{\frac{63 \cdot 64 - 63}{64}}$$

Л.к. прямая проходит через м.к.  $\frac{\sqrt{63}(64-1)}{8} = \frac{63}{8}$

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ \frac{\sqrt{63}}{8} = a(-16 + \frac{63}{8}) + 10b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{63}{8} a \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

2)

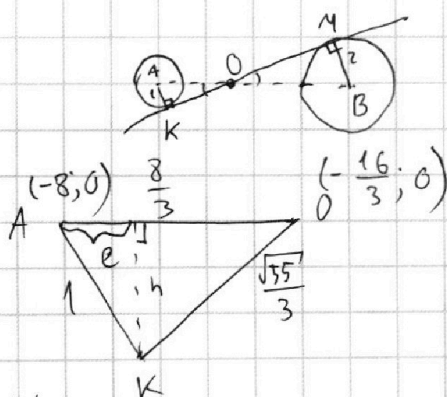


аналогично н.1

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ -\frac{\sqrt{63}}{8} = a(-16 + \frac{63}{8}) + 10b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{63}{8} a \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

3)



$\triangle OKA \sim \triangle OMB$  по 2-ум углам  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{2}{1}, OB + OA = 8 \Rightarrow OA = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow OK = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$h \cdot \frac{8}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3} \cdot 1 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{55}{64}} = \frac{3}{8}$$

Л.к. прямая проходит через м.к.

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ -\frac{\sqrt{55}}{8} = a(-8 + \frac{3}{8}) + 10b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{55}}{8} = -\frac{61}{8}a + \frac{16}{3}a \Rightarrow -\frac{\sqrt{55}}{8} = -\frac{55}{24}a \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



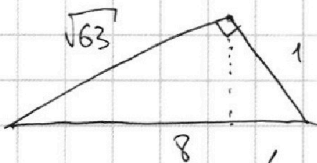
1.  $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$      $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$      $ac: 2^{30} \cdot 7^{37}$

$$\frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} = \frac{a}{c} = \frac{k}{m \cdot 2^3 \cdot 7^7}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n \cdot 2^{30} \cdot 7^{37}}{m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} = \frac{n \cdot 2^{13} \cdot 7^{20}}{m}$$

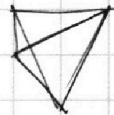
$$\frac{b}{c} = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{n \cdot 2^{30} \cdot 7^{37}} = \frac{k}{n \cdot 2^{16} \cdot 7^{27}}$$

$$h \cdot 8 = \sqrt{63} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{63}}{8}$$



$$a^2 b^2 c^2 = 2^{61} \cdot 7^{64} \cdot k \cdot m \cdot n$$

$$\sqrt{2^{31} \cdot 7^{32}}$$



- 0 6
- 1 7
- 2 8
- 3 9
- 4 10

$$a+b: m \quad 5 \quad 11$$

$$8ab: m \quad 6 \quad 12$$

$$7 \quad 13$$

$$8 \quad 14$$

$$9 \quad 15$$

$$0 \quad 5$$

$$17$$

$$14$$

$$68$$

$$\begin{array}{r} 19 \quad 17 \\ \times 13 \quad 238 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$19$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 13 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$19$$

$$13$$

$$48$$

$$16$$

$$13$$

$$48$$

2.  $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 12 \\ \hline 42 \\ 21 \\ \hline 2842 \end{array}$$

$$-\frac{61}{8} + \frac{16}{3} = a, b \text{ взаимн. протм.}$$

$$\frac{128}{24} - \frac{183}{24} = \frac{55}{24} \quad a+b: a, \quad a+b: b$$

$$m \text{ max} = 8$$

4.  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a + 2 - 7x} = 2 - 7x$$

$$250 \rightarrow 253$$

$$503 \rightarrow 252$$

$$755 \rightarrow 247$$

$$1002 \rightarrow 238$$

$$1240 \rightarrow 225$$

$$1465 \rightarrow 208$$

$$1643 \rightarrow 208$$

$$(x-1)(2x+3) \sim 2x^2 -$$

$$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 4x^4 - 10x^3 + 6x^2 +$$

$$+ 4x^2 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3 = 4x^4 - 6x^2 + x + 3$$

$$2 - 7x + \dots = (2 - 7x)^2$$

$$4x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (2 - 7x - 1)(2 - 7x)$$

$$2 - 7x - 2\sqrt{a(a+2-7x)} = (2 - 7x)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

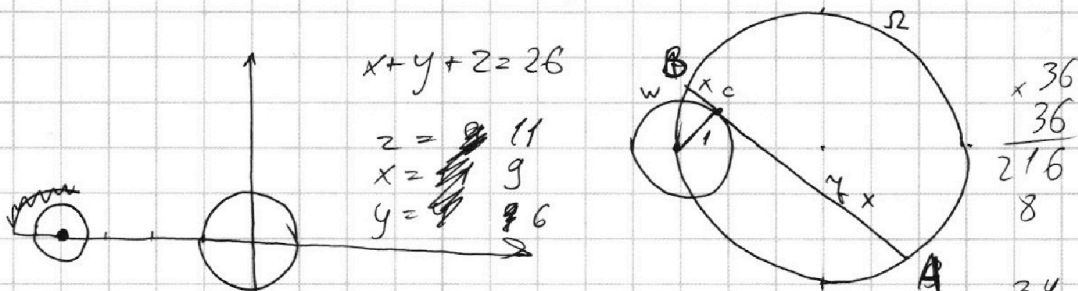
$$(x+8)^2 + y^2 - 1$$

$$x^2 + y^2 + 63 + 16x = x^2 + y^2 - 4 + 16x + 67$$

a =

$$\begin{cases} x+y=15 \\ y+z=17 \\ x+z=20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2 \cdot 15 = 7 \cdot 10 \\ bc &= 2 \cdot 17 = 7 \cdot 17 \\ ac &= 2 \cdot 20 = 7 \cdot 37 \end{aligned}$$



$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 64 + x + y + z$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 27 + x + y + z$$

$$2\beta = x + y + z - 10$$

$$2x^2 + 2x + 1 + (2 - 4x) + (2 - 4x)^2 =$$

$$= 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2-4x)}$$

$$(2-4x)(1-4x) =$$

$$= 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2-4x)}$$

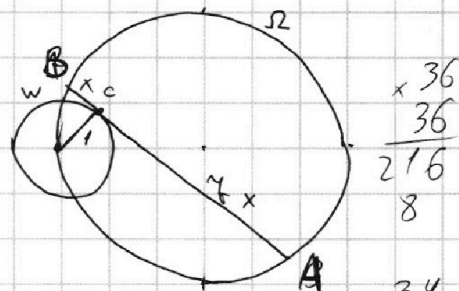
$$1) x = \frac{2}{4}$$

$$50 - 42$$

$$(1-4x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)}$$

$$\Rightarrow 49x^2 - 14x + 1 = 4(x-1)(2x-3)$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 - 20x + 12$$



$$\begin{aligned} & \times 36 \\ & \hline & 216 \\ & \phantom{216} 8 \\ & \phantom{216} 34 \\ & \phantom{216} \times 34 \\ & \phantom{216} \hline & \phantom{216} 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 32 \\ z &= 22 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times 41 \\ & \phantom{\times 41} 12 \\ & \phantom{\times 41} \hline & \phantom{\times 41} 82 \\ & \phantom{\times 41} 41 \\ & \phantom{\times 41} \hline & \phantom{\times 41} 492 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2(2-4x)\sqrt{(x-1)(2x-3)(2-4x)} = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2x + 2x + 1 + (2-4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{244} + 4\sqrt{61}$$

$$2\sqrt{244} + 4\sqrt{61}$$

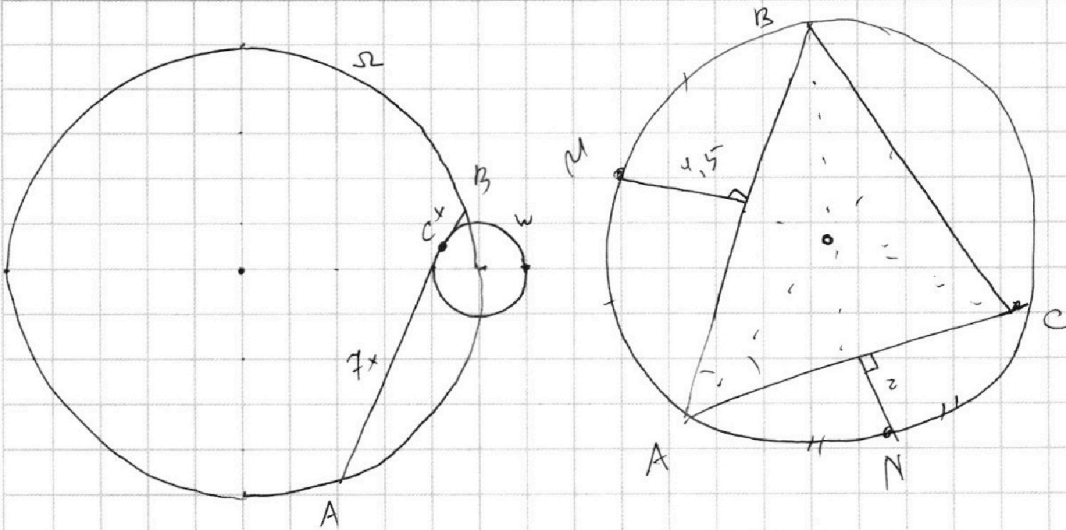
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

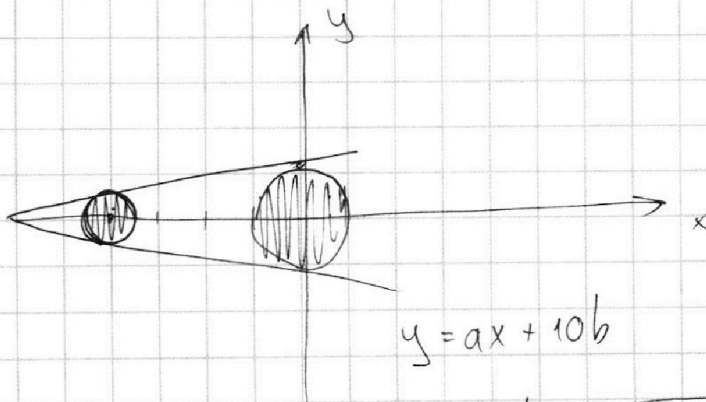
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0$$



$$\begin{cases} ax + 10b = \sqrt{4 - x^2} \\ ax + 10b = \sqrt{1 - (x+8)^2} \end{cases}$$

$$0 = -16a + 10b$$

