



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 27 + x + y \quad (\text{продолж. №1})$$

$$\alpha + \gamma = 37 + z$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq \alpha + \gamma, \text{ т.к. } \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y \geq 10 + z \Rightarrow \text{минимальная сумма}$$

$$x + y + z = 10 \quad (\beta = 0, z = 0) \quad (x + y + z \geq 10 + 2z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{минимальное произведение } abc =$$

$$= \sqrt{252 \cdot 7 \cdot 74} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример:

$$a = 2^9 \cdot 7^{20} \quad b = 2^6 \quad c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

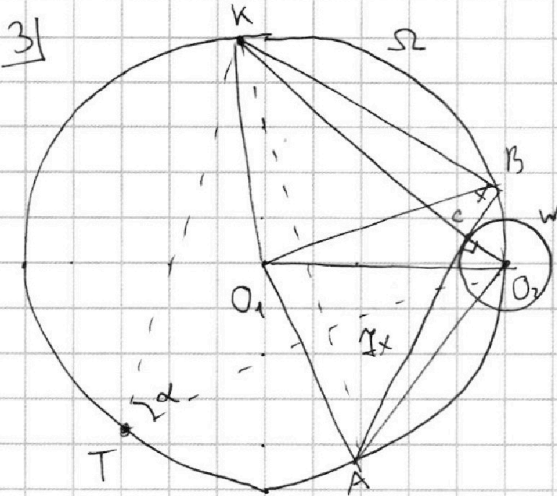
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Четырёхугольник O_2BKA вписан в
окр.-ть $\Omega \Rightarrow O_2C \cdot CK =$
 $= BC \cdot AC = 1 \cdot CK = 4x^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow CK = 4x^2$

~~Четырёхугольник O_2BKA вписан в
окр.-ть Ω~~

$$KA = \sqrt{4x^2 + 4x^2} =$$

$$= 4x\sqrt{x^2 + 1}$$

(по т. Пифагора)

3) $\angle KO_1O_2 = 2\angle KO_2O_1$ (как центр.
и вписан. углы) \Rightarrow

$$\Rightarrow 1 - \frac{(4x^2 + 1)^2}{50} = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4x^2 + 1}{5}$$

2) $KO_2 = 4x^2 + 1$

по т. косинусов

$$(KO_2)^2 = (KO_1)^2 + (O_1O_2)^2 - 2 \cdot KO_1 \cdot$$

$$O_1O_2 \cdot \cos \angle KO_1O_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \angle KO_1O_2 = 1 - \frac{(4x^2 + 1)^2}{50}$$

2) т.к. AB - касательная к ω , $\angle O_2CA = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow KBO_2A$ - четырёхугольник с \perp диагоналями

$\Rightarrow KBO_2A$ - четырёхугольник с \perp диагоналями

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 7x)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \cancel{2x^2 - 5x + 3} - \cancel{(2 - 7x)} = 2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x) +$$

$$+ (2 - 7x)^2 - 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x)(3 - 7x)$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 + \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$+ 9 - 42x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases} \leftarrow D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 976 = 4 \cdot \sqrt{61} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\text{ОАЗ: } \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \leftarrow D < 0, \text{ параболa ветвями вверх} \Rightarrow \text{всегда} > 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-3) \geq 0 \text{ или } \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \quad \quad \quad 1 \quad \quad 1,5 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{все 3 полученных корня подходят}$$

по ОАЗ

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7}, \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

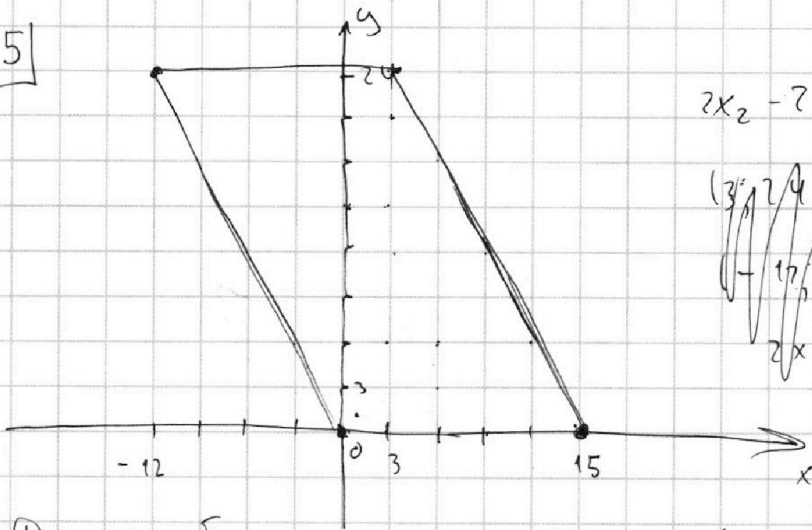
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$(3, 24)$
 $(15, 0)$
 $(3, 24)$
 $(3, 24)$
 $2x_2 - 2x_1 = 12$
 $x_2 - x_1 = 6$

Для любых точек с четной разностью по y ($y_1 - y_2 = 2$) можно подобрать

Разность координат точек по оси x должна быть четной, иначе $2x_2 - 2x_1 = \text{неч. число} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 - x_1$ не целое, что противно условию

условию

Пусть $y_1 \geq y_2$.

$y_1 - y_2 = 0$: подходят любые точки с разностью $\Delta x = 6$ по оси x ; таких пар точек 10 для каждого $y_2 \Rightarrow$ всего $25 \cdot 10 = 250$

$y_1 - y_2 = 2$: $\Delta x = 5 \Rightarrow$ всего $23 \cdot 11 = 253$

$y_1 - y_2 = 4$: $\Delta x = 4 \Rightarrow$ всего $21 \cdot 12 = 252$

$y_1 - y_2 = 6$: $\Delta x = 3 \Rightarrow$ всего $19 \cdot 13 = 247$

$y_1 - y_2 = 8$: $\Delta x = 2 \Rightarrow$ всего $17 \cdot 14 = 238$

$y_1 - y_2 = 10$: $\Delta x = 1 \Rightarrow$ всего $15 \cdot 15 = 225$

$y_1 - y_2 = 12$: $\Delta x = 0 \Rightarrow$ всего $13 \cdot 16 = 208$

Итого: $250 + 253 + 252 + 247 + 238 + 225 + 208 = 1673$

Ответ: 1673

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

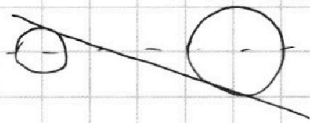
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4)



(продолжение №6)

Аналогично п. 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{3}a = 10b \\ \sqrt{\frac{55}{8}} = a\left(-8 + \frac{3}{8}\right) + 10b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{16}{3}a$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{55}{8}} = -\frac{55}{24}a \Rightarrow a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{\sqrt{63}}; \frac{1}{\sqrt{63}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

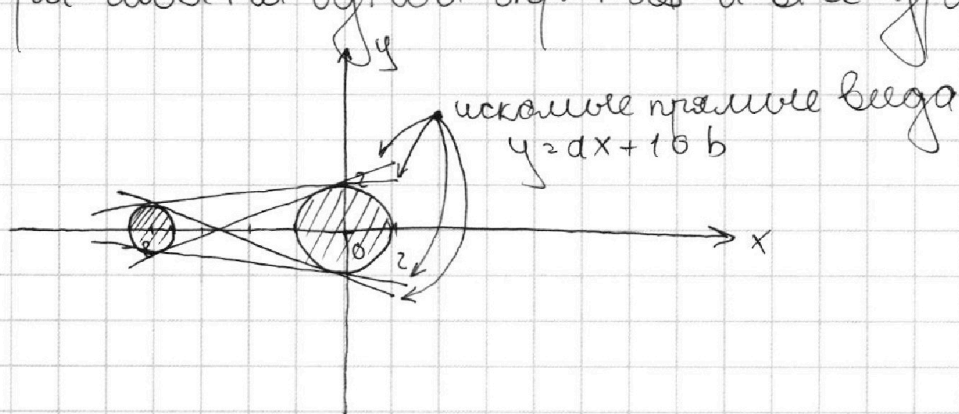
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

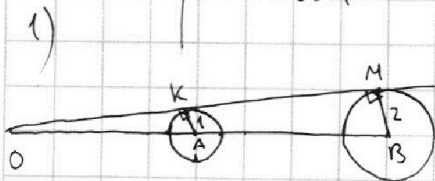
Рассмотрим левое неравенство:

Каждая из скобок представляет собой уравнение окр.-ти, ~~и~~ меньше нуля, если точка с коорд. $x; y$ лежит вне окр.-ти, равно нулю — если на окр.-ти, больше нуля, если вне окр.-ти \Rightarrow их произведение ≤ 0 , если точка $x; y$ лежит внутри или на одной окр.-ти и вне другой



Верхнее ур.-ние системы представляет собой ур.-ние прямой $y = ax + b \Rightarrow$

\Rightarrow система имеет ровно два реш., если прямая, описанная верхним ур.-нием является общей касательной к двум окр.-там



$\Delta OKA \sim \Delta OMB$ по 2-ум углам с коор. 1:2 $\Rightarrow OA = \frac{OB}{2} = \frac{OA + AB}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow OA = AB = 8 \Rightarrow$ прямая проходит через точку $(-16; 0) \Rightarrow 16a = 10b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

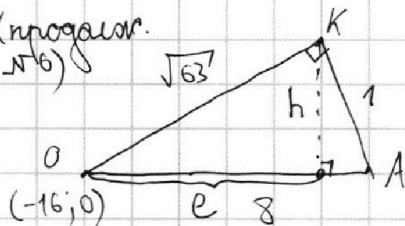
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(продолж.
№6)



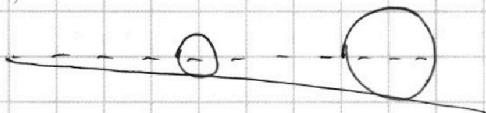
$$h \cdot 8 = \sqrt{63} \cdot 1 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$e = \sqrt{63 - \frac{63}{64}} = \sqrt{\frac{63 \cdot 64 - 63}{64}}$$

Л.к. прямая проходит через м.к. $\Rightarrow \frac{\sqrt{63}(64-1)}{8} = \frac{63}{8}$

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ \frac{\sqrt{63}}{8} = a(-16 + \frac{63}{8}) + 10b \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{63}{8} a \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

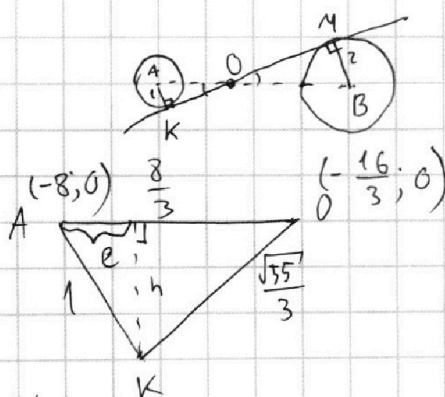
2)



аналогично н.1

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ -\frac{\sqrt{63}}{8} = a(-16 + \frac{63}{8}) + 10b \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{63}{8} a \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

3)



$\Delta OKA \sim \Delta OMB$ по 2-ум углам \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{2}{1}, OB + OA = 8 \Rightarrow OA = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow OK = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$h \cdot \frac{8}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3} \cdot 1 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{55}{64}} = \frac{3}{8}$$

Л.к. прямая проходит через м.к.

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ -\frac{\sqrt{55}}{8} = a(-8 + \frac{3}{8}) + 10b \end{cases} \Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{55}}{8} = -\frac{61}{8}a + \frac{16}{3}a \Rightarrow -\frac{\sqrt{55}}{8} = -\frac{55}{24}a \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



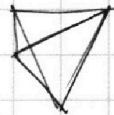
1. $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$ $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$ $ac: 2^{30} \cdot 7^{37}$

$$\frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} = \frac{a}{c} = \frac{k}{m \cdot 2^3 \cdot 7^7}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n \cdot 2^{30} \cdot 7^{37}}{m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} = \frac{n \cdot 2^{13} \cdot 7^{20}}{m}$$

$$h \cdot 8 = \sqrt{63} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

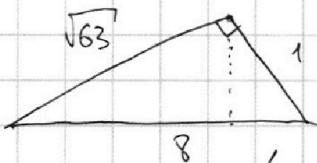
$$\frac{b}{c} = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{n \cdot 2^{30} \cdot 7^{37}} = \frac{k}{n \cdot 2^{16} \cdot 7^{27}}$$



0	6
1	7
2	8
3	9
4	10
5	11
6	12
7	13
8	14
9	15
0	5
1	17
2	14
3	68
4	19
5	17
6	238
7	57
8	19
9	16
0	13
1	48
2	8

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{61} \cdot 7^{64} \cdot k \cdot m \cdot n$$

$$2^{31} \cdot 7^{32}$$



2. $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$$a+b: m$$

$$8ab: m$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 12 \\ \hline 42 \\ 21 \\ \hline 2842 \end{array}$$

$$-\frac{61}{8} + \frac{16}{3} = a, b \text{ взаимн. протм.}$$

$$\frac{128}{24} - \frac{183}{24} = \frac{55}{24} \quad a+b: a, a+b: b$$

$$m \max = 8$$

4. $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a + (2 - 7x)} = 2 - 7x$$

250	253
503	252
755	247
1002	238
1240	225
1465	208

$$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 2x^2 \cdot \dots$$

$$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^2 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3 = 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$2 - 7x + \dots = (2 - 7x)^2$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (2 - 7x - 1)(2 - 7x)$$

$$2 - 7x - 2\sqrt{a(a+2-7x)} = (2 - 7x)^2$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (2 - 7x - 1)(2 - 7x)$$

$$2 - 7x - 2\sqrt{a(a+2-7x)} = (2 - 7x)^2$$

17
14
68
19
17
238
57
19
16
13
48

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



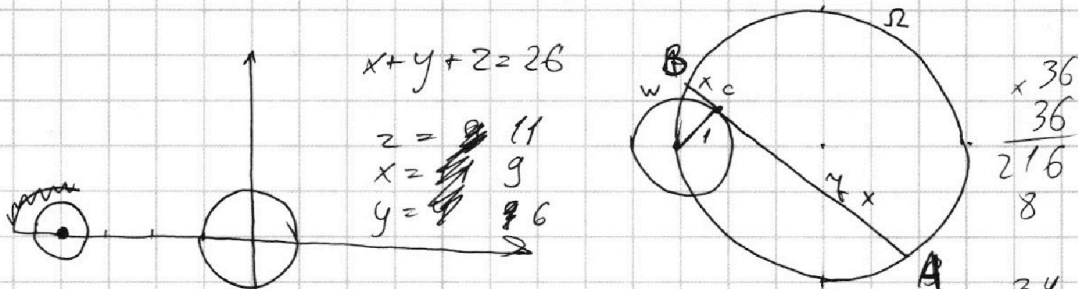
$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1$$

$$x^2 + y^2 + 63 + 16x = x^2 + y^2 - 4 + 16x + 67$$

$a =$
 $ab = 2 \cdot 15 = 7 \cdot 10$
 $bc = 2 \cdot 17 = 7 \cdot 17$
 $ac = 2 \cdot 20 = 7 \cdot 37$

$$\begin{cases} x+y=15 \\ y+z=17 \\ x+z=20 \end{cases}$$



$$x+y+z=26$$

$$\begin{aligned} z &= 11 \\ x &= 9 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 64 + x + y + z$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 27 + x + y + z$$

$$2\beta = x + y + z - 10$$

$$2x^2 + 2x + 1 + (2 - 4x) + (2 - 4x)^2 =$$

$$= 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2-4x)}$$

$$(2-4x)(1-4x) =$$

$$= 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2-4x)}$$

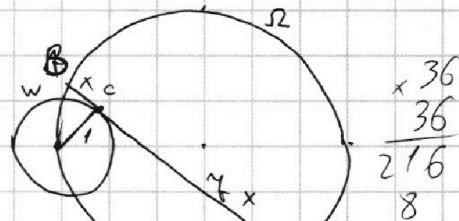
$$1) x = \frac{2}{4}$$

$$50 - 42$$

$$(1-4x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 4(x-1)(2x-3)$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 - 20x + 12$$



$$x+y=10$$

$$y+z=17$$

$$x+z=37$$

$$x+y+z=32$$

$$z=22$$

$$x=15$$

$$\begin{array}{r} \times 4 \\ 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2(2-4x)\sqrt{(x-1)(2x-3)(2-4x)} = 2x^2 + 2x + 1 + (2-4x)^2$$

$$2x + 2x + 1 + (2-4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{244}$$

$$+ 2 - 4x$$

$$2 \cdot \sqrt{244}$$

$$4 \cdot \sqrt{61}$$

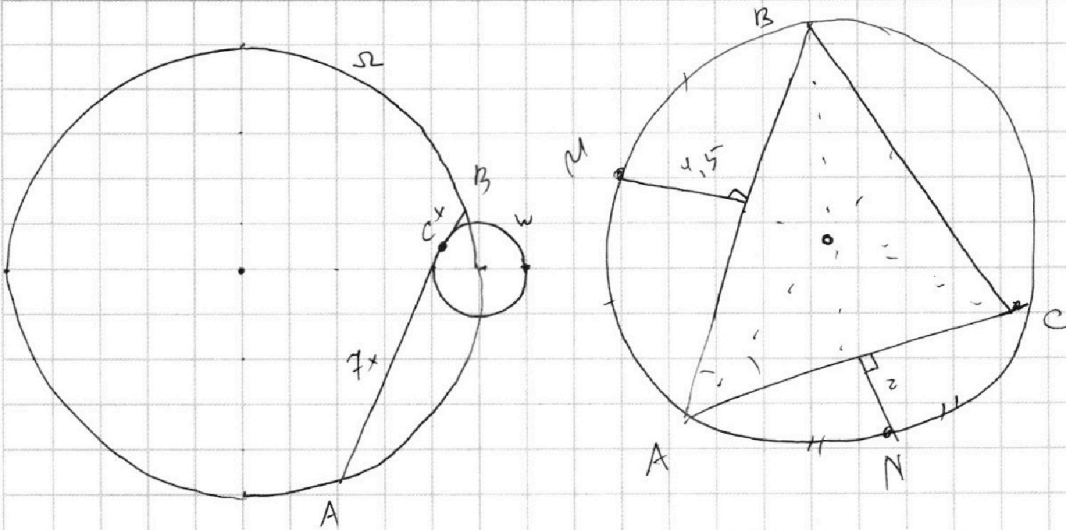
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

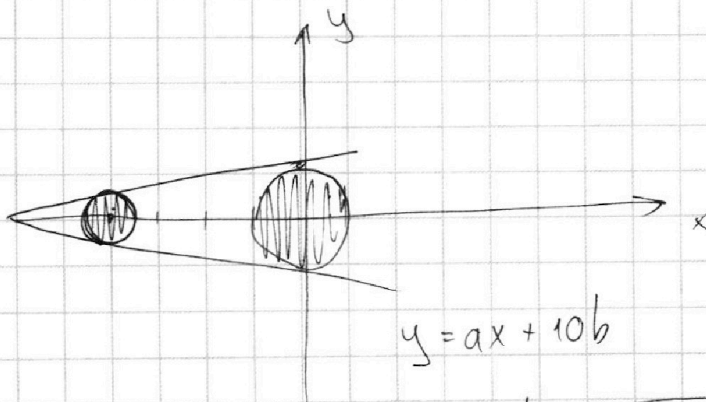
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0$$



$$\begin{cases} ax + 10b = \sqrt{4 - x^2} \\ ax + 10b = \sqrt{1 - (x+8)^2} \end{cases}$$

$$0 = -16a + 10b$$

