



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доеке записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1 | 2 и 7 простые числа,

значит a, b, c могут состоять только

из 2 и 7 в разложении по пр. множителям,

и если в разложении есть другие множители,
то это не соответствует условию

~~ка~~ $a_1 : m \Rightarrow k a_1 : m$

в разложении a, b, c нам нужно подобрать
 m и n такие 2 и m и n такие 7

a_2, b_2, c_2 - слагаемые 2 в разложении

a_7, b_7, c_7 - слагаемые 7 в разложении

мы имеем a_2, b_2, c_2 - мин. тогда

$$a_2 + b_2 = 15$$

$$b_2 = 17 - c_2$$

$$a_2 + c_2 = 23$$

$$a_2 + 17 - c_2 = 15$$

$$a_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 = 23 - c_2$$

$$23 - c_2 + 17 - c_2 = 15$$

мин 1 из 4

$$2c_2 = 25$$

$$c_2 = 12,5 \quad a_2 = 10,5 \quad b_2 = 4,5$$

целых слагаемых быть не может

мы можем увелич. одну ст. на 0,5, и увеличим две на 0,5
тогда мы не изменим сумму

мы можем увелич. две ст. на 0,5: одну увелич. на 0,5

параметры $a_2 = 11 \quad b_2 = 5 \quad c_2 = 12 \quad abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$n_{\min} = 39 \quad \text{пример: } a_7 = 16 \quad b_7 = 0 \quad c_7 = 23$$

$$\frac{abc}{abc_{\min}} = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{23} \cdot 7^{39}}$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 | продолжение $abc \min = 2^{28} 7^{39}$

получаем при

$$a = 2^{11} 7^{16}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{12} 7^{23}$$

ММТ 2134

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$\frac{a}{b}$ несократима ①

тогда $\text{MOD}(a; b) = 1$ наибольший общий делитель

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

числитель и знаменатель
можно сократить на m только если

$$(a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$$

$$(a^2 - 7ab + b^2) : m$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$(a+b)^2 : m$$

значит и $9ab : m$

если $ab : m$, то получаем противоречие с условием ①

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad \text{одна из этих дробей делится на } m$$

и $\frac{a}{b}$ сократима

тогда $9 : m$ значит $\max m = 9$

$$\boxed{\text{Ответ: } \max m = 9}$$

Леша 3 из 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

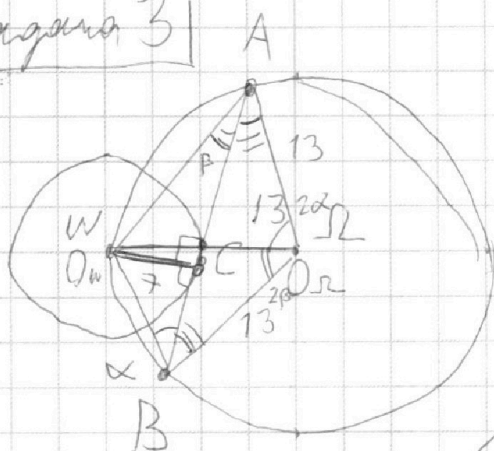
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3



$$R_{\omega} = 7 \quad R_{\Omega} = 13$$

из-за касания окружностей

$$\angle ACO_w = 90^\circ$$

$$O_w O_\Omega, A O_\Omega, B O_\Omega = 13$$

$$\angle A O_\Omega O_w = \angle ABO_w$$

$$\angle O_w O_\Omega B = \angle O_w AB$$

поэтому из-за касания

$$\frac{BC}{O_w C} = \frac{7}{7}$$

$$BC = 7$$

$$AB = \frac{24}{7} BC = 24$$

Ответ: $AB = 24$

ММГ из 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

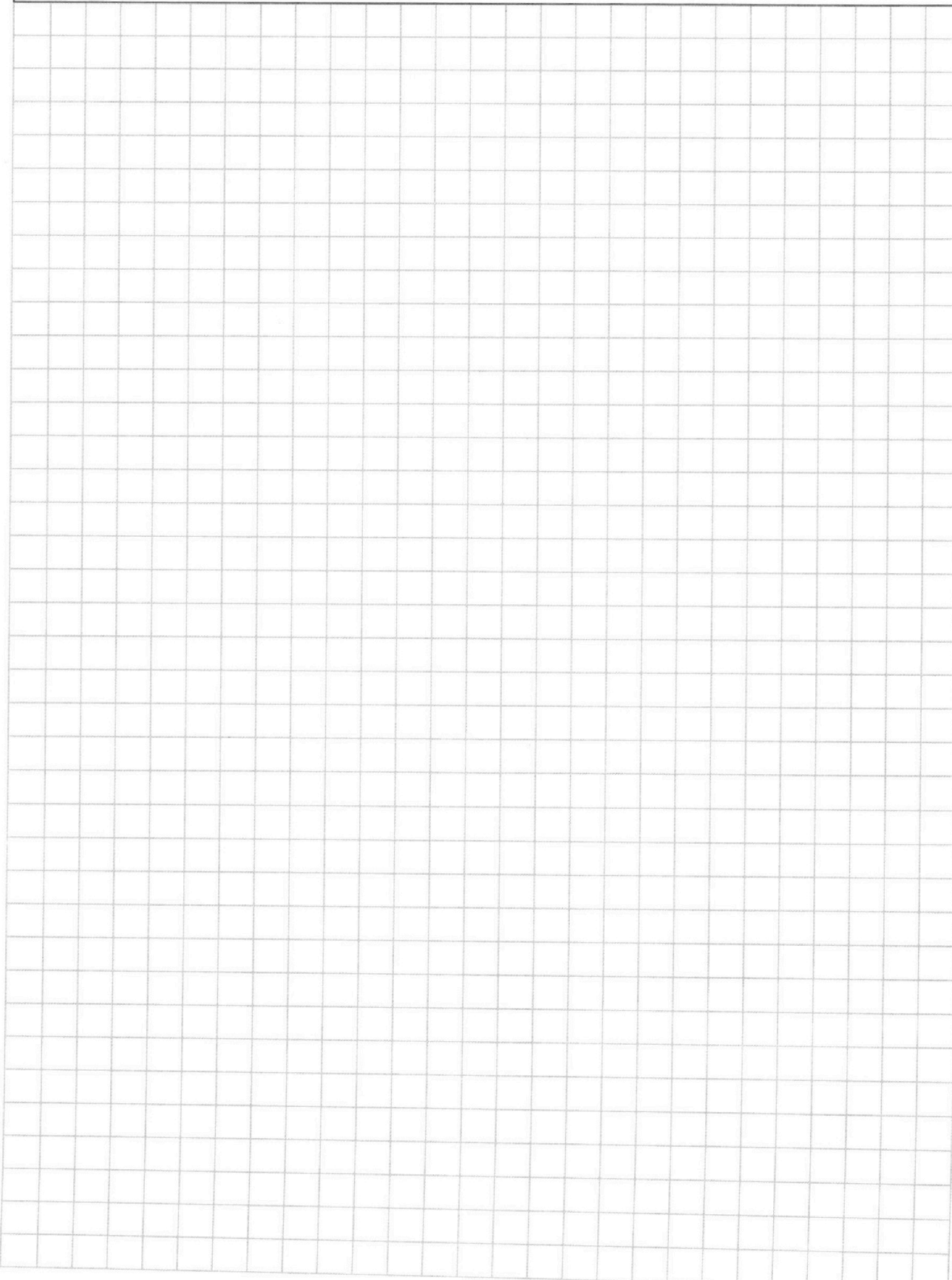
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

