



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $av = 2^{14} \cdot y^{10} p$ ,  $be = 2^{14} \cdot y^{14} q$ ,  $ac = 2^{20} \cdot y^{37} t$ ,

где  $p, q, t \in \mathbb{N}$ , тогда

$$av \cdot be \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot y^{64} pqt$$

П.к.  $a^2 b^2 c^2$  — полный квадрат, то в его разложении все простые множители входят в четной степени.

П.к. степень вхождения 2 в  $a^2 b^2 c^2$  кратна 51,

тогда степень вхождения 2 в  $a^2 b^2 c^2$  должна быть кратна 52.

П.к. в  $a^2 b^2 c^2$  2 входит кратн. д. в 52 степени,

а 7 — кратн. д. в 64, то в  $avb$  2 входит кратн.

д. в 26 степени, а 7 кратн. д. в 32. Но п.к.

в  $ac$  7 входит кратн. д. в 37 степени, то и

в  $avb$  7 входит кратн. д. в 37 степени. Тогда

$$avb \geq 2^{26} \cdot y^{37} \quad (\text{п.к. } 2 \text{ и } 7 \text{ взаимнопросты})$$

Пример: если  $a = 2^9 \cdot y^{10}$ ,  $b = 2^5 \cdot y$ ,  $c = 2^{12} \cdot y^{24}$ ,

то условие задачи выполняется и  $avb = 2^{26} \cdot y^{37}$ .

Ответ:  $2^{26} \cdot y^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $\frac{a}{b}$  - несократ, то  $(a; b) = 1$  (в кружках скоб-  
кам будем обозначать НОД чисел)

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = (a+b; a^2 - 6ab + b^2 - (a+b)^2) = \\ = (a+b; -8ab) = (a+b; 8ab)$$

Мы по алгоритму Евклида можем оставить  
меньшее число и сколько-то раз его вычитать  
из большего (мы вычли  $(a+b)$  раз число  $(a+b)$ )  
Докажем, что  $(a+b, 8ab) = 1$ .

Предположим, что это не так, тогда пусть  
 $a+b : p, 8ab : p$ , где  $p$  - простое число.

Так  $8ab : p \Rightarrow a : p$  или  $b : p$ . Пусть  $b : p$ .

Так  $a : p, a+b : p$ , то  $b : p$ , тогда  $a : p, b : p$ ,  
тогда  $(a, b) \geq p$  - противоречие, так  $(a, b) = 1$ .

Тогда наше предположение неверно, а верно, что  
 $a$  и  $(a+b)$  взаимнопросты

Тогда  $(a+b; 8ab) = (a+b; 8) \leq 8$ . Не  $m \leq 8$

Пример Если  $a=3, b=5$ , то  $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9 - 6 \cdot 15 + 25} =$   
 $= \frac{8}{-56}$ . Тогда  $m=8$ .

Ответ: 8.

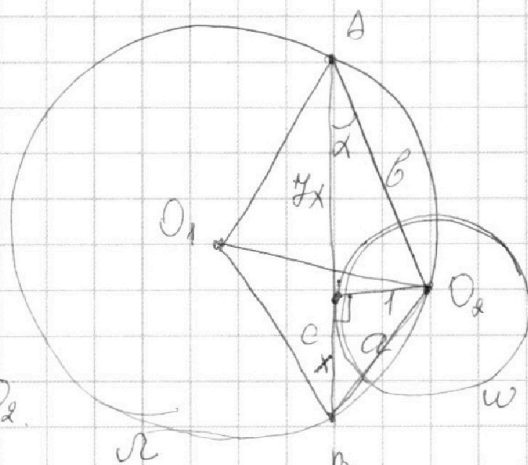
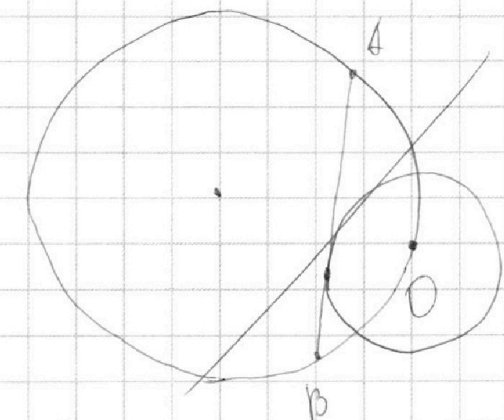
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть центр окр  $\omega$   $O_2$ .

Пк  $AB$  - касательная к  $\omega$  и касается  $\omega$  в  $C$ , то

$$O_2 C \perp AB, \quad O_2 C = 1.$$

Пусть  $\angle O_2 A B = \alpha$ ,  $O_2 B = a$ ,  $O_2 A = b$ , тогда

$BC = x$ , тогда  $AC = 4x$ , тогда

$$S_{ABO_2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x \quad (\text{пк } S_{ABO_2} = \frac{1}{2} O_2 C \cdot AB)$$

С другой стороны,  $S_{ABO_2} = \frac{4R}{ab \cdot 8x}$ , где  $R$  - радиус

описанной около  $\triangle ABO_2$  окружности, т.е.  $R = 5$ .

Из т-мы синусов  $\triangle ABO_2$ :  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

И из  $\triangle AO_2 C$ :  $\sin \alpha = \frac{1}{b}$ , тогда  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{1/b} = ab = 2R =$

$$= 10, \quad \text{т.е. } ab = 10$$

Тогда  $S_{ABO_2} = \frac{4 \cdot 5}{10 \cdot 8x} = \frac{1}{4x}$  или  $S_{ABO_2} = 4x$ , т.е.

$$\frac{1}{4x} = 4x \Leftrightarrow 16x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}. \quad \text{Пк } AB = 8x, \text{ то}$$

$$AB = 2.$$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$ ,  $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$ , тогда

$$a - b = 2 - 7x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2 = a - b$$

$$\text{т.е. } a^2 - b^2 = a - b$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$1) \underline{a = b} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 7x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \quad (\text{входит в ОДЗ})$$

$$2) \underline{a = 1 - b} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

П.к обе части неотрицательные, то можно возвести в квадрат равносильно. Получим

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x + 1$$

П.к обе части неотрицательные, возведем равносильно в квадрат, получим

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0$$

Решим квадратное уравнение, получим  $x_7 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$ ,

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

каждое из которых входит в ОДЗ.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, x_3 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем, сколько пар  $A$  и  $B$ , если  $x_1 \geq x_2$ ,  
тогда если  $x_1 = x_2 = 0$ , то всего 90 пар,  
если  $x_1 = x_2 = 1$ , то 10, если  $x_1 = x_2 = 2$ , то  
9, и т.д.  $m$  в этом случае  
всего  $10+10+9+9+\dots+4+4 = 2 \cdot (4+\dots+90) =$   
 $= 2 \cdot 49 = 98$ . Аналогично, если  $y_1 \geq y_2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



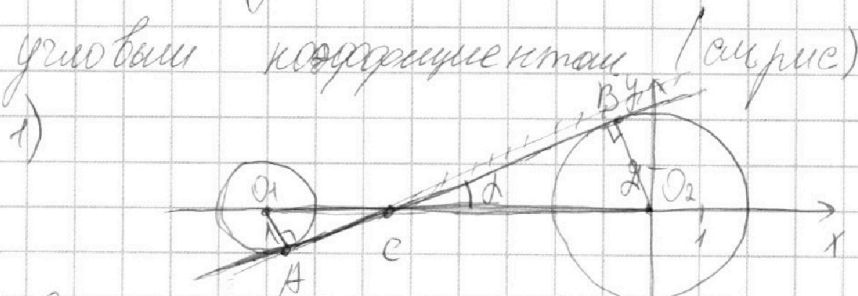
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к. решим 2-го ур-я является вся внутренняя область окружности. Так всего должно быть ровно 2 решения, то это возможно только, если прямая касается первой и второй окружности одновременно, т.е. является общей касательной.

У 2-х непересекающихся окружностей могут быть всего 4 общие касательные. Так линия центров окружностей лежит на <sup>оси</sup> прямой  $Ox$ , то у 2-х из этих 4 общих касательных разбиваются на 2 пары, в каждой из которых касательные имеют противоположные по знаку, но одинаковые по модулю угловый коэффициент и свободный член. Наблюдая угловый коэффициент у <sup>общих</sup> касательных с положительными углами коэффициентах (см. рис)



Отметим точки касания  $A$  и  $B$ , точку пересечения с осью  $Ox$   $C$  (см. рис). Пусть центры окр.  $O_1$  и  $O_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

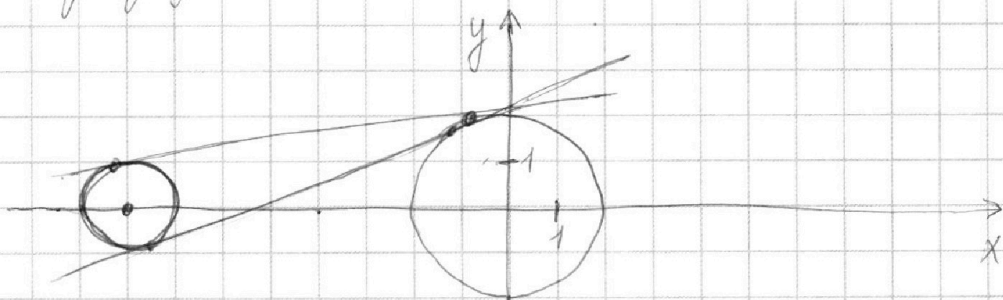
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решим задачу графически  
Изобразим ур-е 2 на графике  
Каждая из енодок - это ур-е окружности.  
Тогда если бы бы знак равенства, то графиче-  
ски бы бы совокупность двух окружностей с  
радиусом с центрами с координатами  $(-8; 0)$ ,  $(0; 0)$   
и радиусами 1 и 2 соответственно



Тогда решим 2-го ур-я является внутренняя  
область окружностей (метод пробных точек)

Первое уравнение задает прямую, где  $a$  - угловой  
коэффициент прямой,  $10b$  - свободный член.

Если прямая касается окружностей, то она  
образует решение, если не имеет общих  
точек, то нет решений (с этой окружностью),  
если пересекает, то образует бесконечно много решений,



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O_1 A \perp AB, \quad O_2 B \perp AB$$

Пусть упр-е этой касательной  $y = kx + b$ , тогда  $C(-\frac{b}{k}; 0)$

Тогда  $CO_2 = \frac{b}{k}$ ,  $CO_1 = 8 - \frac{b}{k}$ . Пусть угол наклона  $\alpha$ .

$$\sin \alpha = \frac{1}{8 - \frac{b}{k}} = \frac{2}{\frac{b}{k}} \Leftrightarrow \frac{b}{k} = 16 - 2 \frac{b}{k} \Leftrightarrow 3 \frac{b}{k} = 16$$

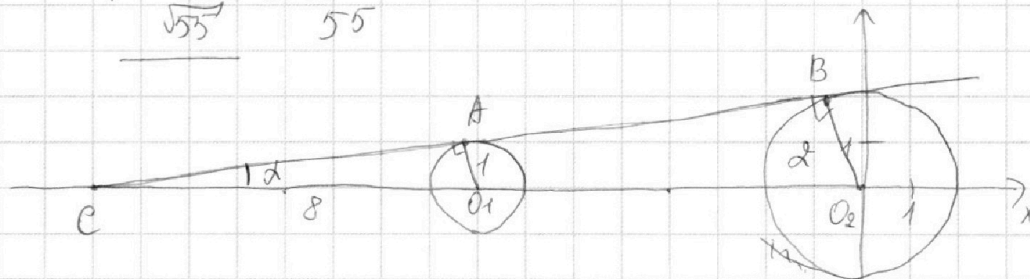
$$\Leftrightarrow \frac{b}{k} = \frac{16}{3}. \quad \text{Тогда } O_1 C = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

По т-ме Пифагора  $\triangle ACO_1$ :  $AC = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{55}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{П.с. } a_1 = \frac{9^9}{\sqrt{55}} = \frac{9\sqrt{55}}{55}$$

2)



Аналогично отметим точки касания A и B

Точку пересечения с осью Ox C.

$\triangle AO_1 C \sim \triangle BO_2 C$  с коэф. подобия  $\frac{1}{2}$ , тогда

$$O_1 C = \frac{1}{2} O_2 C \Leftrightarrow O_1 C = O_2 O_1 = 8$$

По т-ме Пифагора  $\triangle AO_1 C$ :  $AC = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{55}$ ,

$$\text{тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{55}}, \quad \text{т.е. } a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ! } a = \pm \frac{9}{\sqrt{55}}, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{55}}$$

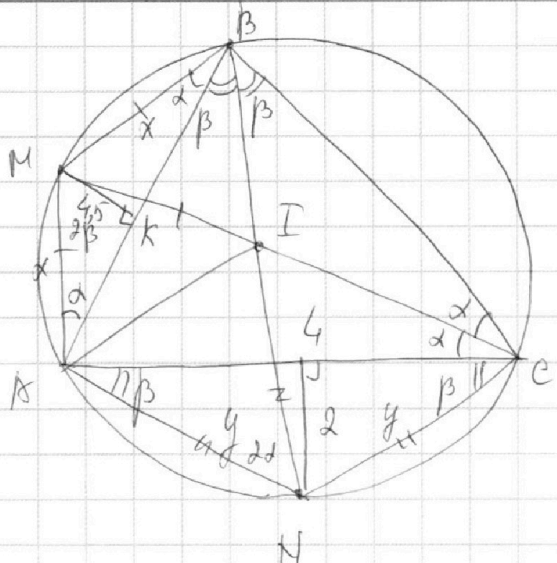
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. M — середина  $\overline{AB}$ ,  
 N — середина  $\overline{AC}$ , то  
 $MB = MA$ ,  $NA = NC$ , CM —  
 биссектриса  $\angle BCA$ , BN — биссектриса  
 $\angle ABC$

Пусть  $\angle ACM = \angle BCM = \alpha$ ,  $\angle ABN = \angle CBN = \beta$

Из вписан.  $\triangle AMBC$   $\angle MBA = \angle MAC = \alpha$ , из

вписан.  $\triangle ABCN$   $\angle CAN = \angle BCN = \beta$

Также  $\angle AMC = 2\beta$ ,  $\angle ANB = 2\alpha$

Пусть  $\rho(M; AB) = MK$ ,  $\rho(N; AC) = NL$

Пусть  $AM = MB = x$ ,  $AN = CN = y$

Из прямоугол.  $\triangle AMK$  и  $\triangle ANL$ :  $\sin \alpha = \frac{4,5}{x}$ ,  $\sin \beta = \frac{2}{y}$

Из  $\triangle CMN$  Пусть  $CM \cap BN = I$ , тогда I — центр впис. окр.

Из леммы о трезубце  $MI = MA = MB$ ,  $NI = AN = NC$ .

Из т.к.  $\triangle AMI$  — равноб., то  $\angle MAI = \angle MBA = 90^\circ - \beta$ ; т.к.  $\triangle AIN$  — равноб., то  $\angle IAN = 90^\circ - \alpha$

Из т.т.т. синусов  $\triangle AIM$ :  $\frac{AI}{\sin 2\beta} = \frac{x}{\cos \sin(90^\circ - \beta)} = \frac{x}{\cos \beta}$

$$AI = \frac{x \cdot 2 \sin \beta \cos \beta}{\cos \beta} = 2 \sin \beta \cdot x = 2x \cdot \frac{2}{y} = \frac{4x}{y} \quad (1)$$

Из т.т.т. синусов  $\triangle AIN$ :  $\frac{AI}{\sin 2\alpha} = \frac{y}{\sin(90^\circ - \alpha) \cos \alpha}$

$$AI = \frac{y \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2y \cdot \sin \alpha = 2y \cdot \frac{4,5}{x} = 9 \frac{y}{x} \quad (2)$$

Из (1) и (2):  $4 \frac{x}{y} = 9 \frac{y}{x} \Leftrightarrow 4x^2 = 9y^2 \Leftrightarrow 2x = 3y$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ . Тогда из (1)  $AI = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

Ответ: 6.



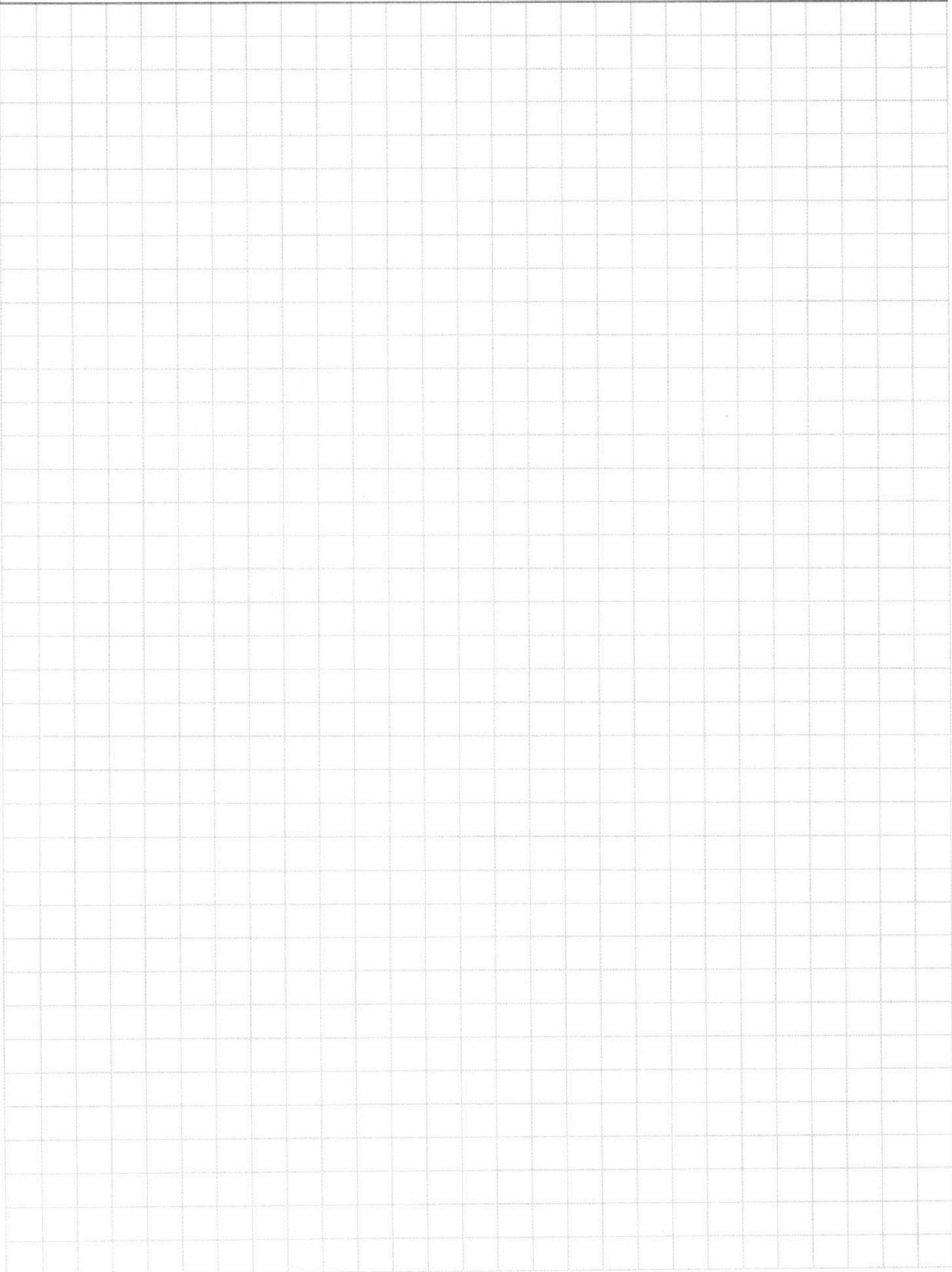
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



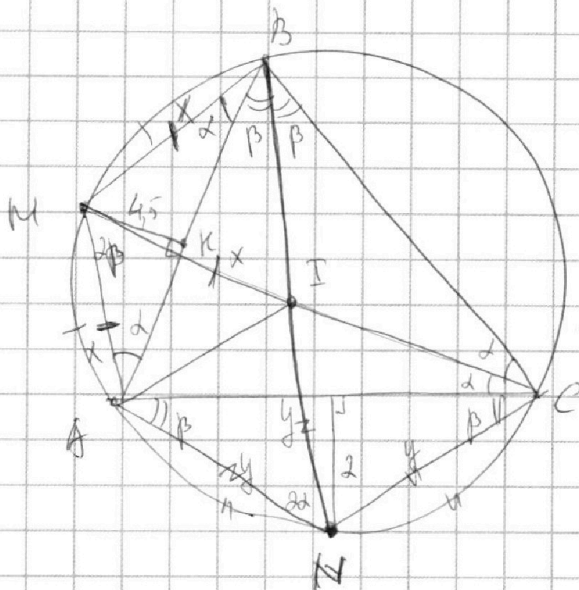
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AI = ?

$$\sin \alpha = \frac{4.5}{x}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{y}$$

$$\frac{AI}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{y}{\cos \alpha}$$

$$AI = 2y \cdot \sin \alpha = 2y \cdot \frac{4.5}{x} = \frac{9y}{x}$$

$$\frac{AI}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{x}{\cos \beta}$$

$$AI = 2x \sin \beta = 2x \cdot \frac{2}{y} = \frac{4x}{y}$$

$$\frac{9y}{x} = \frac{4x}{y} \quad / \cdot xy$$

$$9y^2 = 4x^2$$

$$3y = 2x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

$$AI = \frac{9}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab = 2R = 10 \quad \frac{a}{1} = \frac{b}{6} \Rightarrow ab = 6a^2$   
 $4x = 20 \Rightarrow 10 \cdot 8x$   
 $10 \cdot 8x^2 = 20 \Rightarrow 20x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$   
 1)  $x_1 = x_2 \quad y_2 - y_1 = 12$   
 $10, 10, 9, 9, \dots, 4$

$ax - y + 10b = 0$   
 $2((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

$8 - \frac{16}{3} = \frac{24 - 16}{3} = \frac{8}{3}$   
 $\frac{64}{9} - \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$

$12 + 9 - 1 = 129$   
 $14$   
 $-8, 0$   
 $64 - 4$   
 $1 \cdot 60 \cdot 16$   
 $0, 1, 8$   
 $0, 1, 8$

$(x+8)^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 10$   
 $16 - 2 \frac{b}{k} = \frac{b}{k} \quad \frac{b}{k} = \frac{3}{3} \frac{b}{k} = 16$   
 $\frac{b}{k} = \frac{16}{3}$

$a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

1-я окр кас  
 2-я окр кас  
 пересек -  
 при  
 не шло  
 одну точку

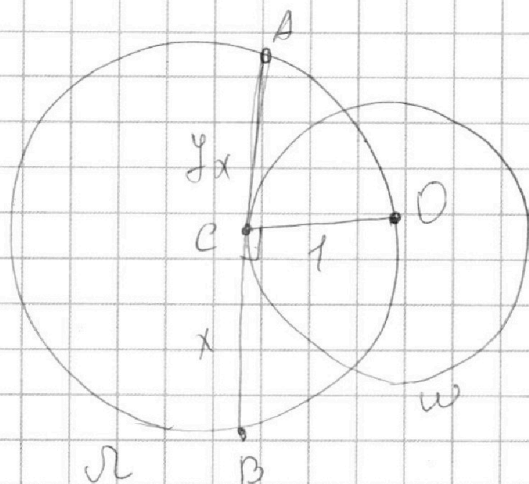
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

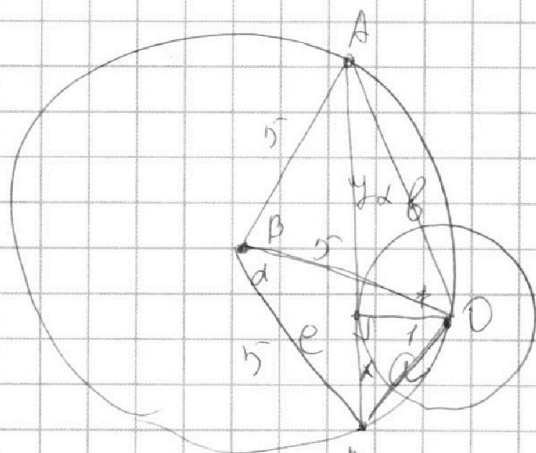
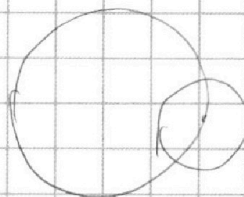
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB - ?

$$r = 1$$

$$R = 5$$



$$a^2 = x^2 + 1$$

$$b^2 = 49x^2 + 1$$

$$a^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \alpha =$$

$$= 50(1 - \cos \alpha)$$

$$b^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \beta =$$

$$= 50(1 - \cos \beta)$$

$$x^2 + 1 = 50(1 - \cos \alpha)$$

$$49x^2 + 1 = 50(1 - \cos \beta)$$

$$64x^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$64x^2 = 50(1 - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + 1 + 50}{2 \cdot 25} = \frac{-x^2 + 49}{50} = \frac{-(x+y)(x-y)}{50}$$

$$\cos \beta = \frac{-49x^2 + 1 + 50}{2 \cdot 25} = \frac{-49x^2 + 49}{50} = \frac{(7-yx)(7+yx)}{50}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc : 2^{14} \cdot 7^{14}$

$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$

$abc$  найти - ?

$\Rightarrow ac \geq 2^{20} \cdot 7^{34}$

$a^2 b^2 c^2 = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot p \cdot 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot q \cdot 2^{20} \cdot 7^{34} \cdot t = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot pqt$

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}$

$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$

$pqt \geq 2$

Пример  $a = 2^9 \cdot 7^{10}$

$b = 2^5 \cdot 7^9$

$c = 2^{12} \cdot 7^{24}$

$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{34}$

2)  $\frac{a}{b}$  - несократ.  $\Rightarrow (a, b) = 1$

$a, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

$a+b : m$

$1+2=3$

$5-6 \cdot 2 = m$  - найд

$a^2 - 6ab + b^2 : m$

$2-4$

$5^3 - 6 \cdot 14 = 53 - 84 = -31$

$mz(a+b, a^2 - 6ab + b^2) = (a+b, -6ab - 2ab) = (a+b, 8ab)$

$= (a+b, 8)$

$m_{\text{найд}} = 8$

$(a+b, ab) = 1$

$(a+b) : p, p$  - простое число

$ab : p \Rightarrow a : p \wedge b : p$

НОД:  $a : p \Rightarrow b : p \Rightarrow (a, b) \geq p$

$a=3, b=5$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9+25-0-15} = \frac{8}{34-90}$

$= -\frac{8}{56} = -\frac{1}{7}$

3)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

a

b

$$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 7x + 2$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

1)  $a = b \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$

2)  $a + b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$$\frac{4x^2 - 3x + 4}{2} \geq \frac{1}{4}$$

$$8x^2 - 6x + 8 \geq 1$$

$$8x^2 - 6x + 7 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = \frac{36}{4} = 9 < 0$$

$$\frac{32}{49} - \frac{140}{49} + \frac{137}{49} = \frac{29}{49}$$

$$\frac{32}{49} + \frac{56}{49} + \frac{49}{49} = \frac{137}{49}$$

$$\sqrt{29} - \sqrt{137} = -2$$

$$22 + 4\sqrt{61} < 123$$

$$4\sqrt{61} < 101$$

$$16 \cdot 61 < 101^2$$

$$\sqrt{29} - \sqrt{137} = -14$$

$$\sqrt{29} = \sqrt{137} - 14$$

$$29 = 137 - 196 = -$$

ОДЗ:  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} > 0$   
 $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0$   
 $D = 25 - 24 = 1$   
 $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$   
 $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$   
 $\frac{D}{4} = 1 - 2 = -1 < 0$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$7x - 2 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 28x + 4 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 36x = 0$$

$$x \geq 0$$

$$x = \frac{36}{41}$$

$$\frac{D}{4} = 121 + 123 =$$

$$41 = 244 =$$

$$\frac{41}{3} = 13.67$$

$$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$



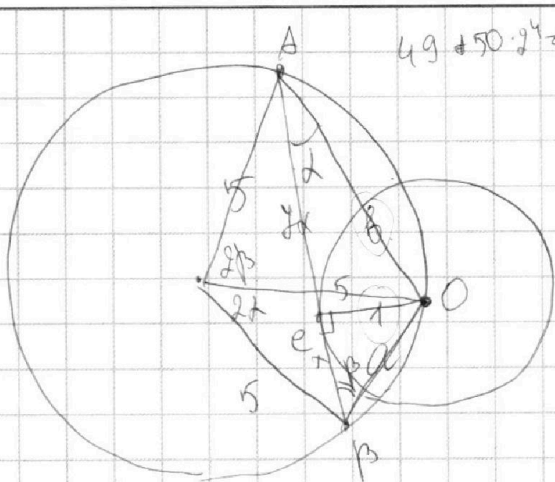
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49 + 50 \cdot 2^4 = 99 \cdot 2^8 \cdot \frac{49x^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{49x^2 - 1}{b^2}$$

$$a^2 = x^2 + 1$$

$$\frac{49x^2 + 1 - 49x^2 + 1}{49x^2 + 1}$$

$$b^2 = 49x^2 + 1$$

$$a^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 50(1 - \cos 2\alpha) =$$

$$= 50(x - \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha) =$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$= 250 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$x^2 + 1 = 100 \cdot \frac{1}{49x^2 + 1}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{b^2}$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 625 + 4851 =$$

$$x^2 + 1 = 50 - 50 \cdot \frac{49x^2 - 1}{49x^2 + 1} =$$

$$= 50 \cdot \frac{2}{49x^2 + 1}$$

$$b = 4x = \frac{45}{ab \cdot 8x}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{1}{b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{b}$$

$$ab \cdot 8x^2 = 5 \quad 80x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$ab = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(49x^2 + 1)(4x^2 + 1)} = \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} = 10$$

$$= \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} = 10$$

$$\frac{49}{8} + \frac{50}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50 \cdot 2^8}{2^8} = 99$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 24546$$

$$5446$$

$$1389$$

$$463$$

$$AB = 2$$