



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

стр. 1 из 8

$$\begin{array}{l} ab : 2^{15} \\ bc : 2^{17} \\ ac : 2^{23} \end{array} \Bigg| \Rightarrow (abc)^2 : 2^{15+17+23} = 2^{55} \Rightarrow abc : 2^{28}$$

$$ac : 7^{39} \Rightarrow abc : ac : 7^{39}. \text{ Значит, } abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \leq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Докажем, что $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ - возможно. Пример:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{16}; \quad b = 2^5; \quad c = 2^{13} \cdot 7^{23}. \quad \text{Тогда } ab = 2^{15} \cdot 7^{16}; \quad 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{23}; \quad 2^{17} \cdot 7^{18}; \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39}; \quad 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

стр. 2 из 8

$$m - \text{наибольш.} \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2)$$

Применим аналог алгоритма Евклида для многочленов:

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 7ab + b^2 & a+b \\ a^2 + ab & a-8b \\ \hline -8ab + b^2 & \\ -8ab - 8b^2 & \\ \hline 9b^2 & \end{array}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; 9b^2)$$

$$\text{Предв } \frac{a}{b} \text{ несократима} \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b^2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9b^2) = 9, \text{ т.е. } m = 9.$$

Максимальное $m = 9$. Пример: $a = 2; b = 7$.

$$\frac{2}{7} \text{ несократ.}; \quad \frac{2+7}{2^2 - 7 \cdot 2 \cdot 7 + 7^2} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5} - \text{сократимо на } 9$$

Ответ: $m = 9$

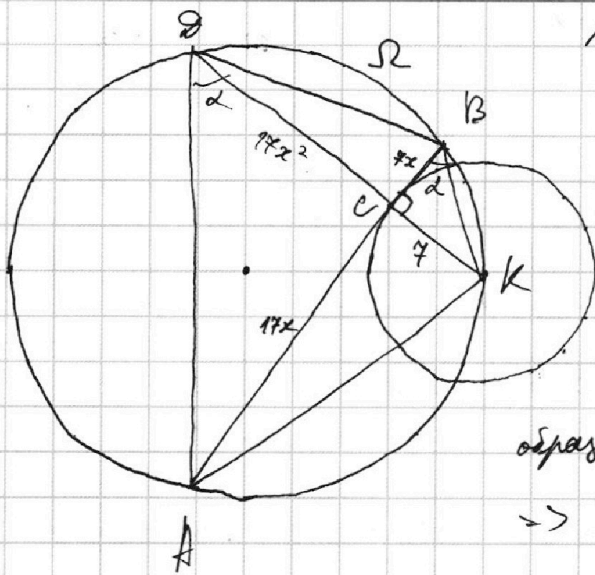
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3

стр. 3 из 8

Путь k-ушка со

Путь AC = 17x; BC = 7x.

Путь KC ∩ Ω = D

Δ BCD ~ Δ KCA как угр-ки, образованные пересечением хорд. =>

$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{KC}; \quad DC = \frac{17x \cdot 7x}{7} = 17x^2$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{7\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Путь ∠ CBK = ∠ CDA = α

По т. Пифагора

$$AK = \sqrt{AC^2 + KC^2} = \sqrt{289x^2 + 49}$$

По т. sin Δ ADK

$$\frac{AK}{\sin \alpha} = 2R, \text{ где } R - \text{ радиус опис. вып-ки.}$$

$$\sqrt{289x^2 + 49} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 26; \quad (289x^2 + 49)(x^2 + 1) = 676.$$

$$28x^4 + 77x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = \frac{-77 \pm \sqrt{77^2 + 4 \cdot 28 \cdot 627}}{56} = \frac{\sqrt{11^2 + 16 \cdot 627} - 11}{8}$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627}}{2 \cdot 289}$$

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627} - 338}{2 \cdot 289}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{\sqrt{338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 627} - 338}{2 \cdot 289}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

стр. 4 из 8

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

Сделаем замену: $a = 3x^2-6x+2$; $b = 3x^2+3x+1$; $a, b \geq 0$
 Тогда $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$;

$$\begin{aligned} (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) &= (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \\ (1-9x) &= (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \end{aligned}$$

I вариант: $1-9x=0$

$$x = \frac{1}{9} \text{ - подходит,}$$

$$3x^2-6x+2 > 0; \quad 3x^2+3x+1 > 0.$$

II вариант: $1-9x \neq 0$, сокращаем на него.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2-6x+2} &= 1 - \sqrt{3x^2+3x+1} \\ 3x^2-6x+2 &= 3x^2+3x+2 - 2\sqrt{3x^2+3x+1} \\ 9x &= 2\sqrt{3x^2+3x+1} \quad (*) \\ 81x^2 &= 12x^2+12x+4 \end{aligned}$$

$$69x^2-12x-4=0.$$

$$\frac{D}{4} = 6^2 + 4 \cdot 69 = 312; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$$

$$\text{Из } (*) \Rightarrow 9x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{6 - \sqrt{312}}{69} \text{ не подходит.}$$

$$\text{При } x = \frac{6 + \sqrt{312}}{69} (> 0) \quad 3x^2+3x+1 > 0, \quad 3x^2-6x+2 = 3 \cdot \left(\frac{6 + \sqrt{312}}{69}\right)^2 -$$

$$- 6 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 2 = 3 \cdot \frac{348 + 12\sqrt{312}}{69^2} - 6 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 2 =$$

$$= \frac{1044 + 36\sqrt{312} - 36 \cdot 69 - 6 \cdot 69\sqrt{312} + 2 \cdot 69^2}{69^2} = \frac{1044 + 102 \cdot 69 - 6 \cdot 75 \cdot \sqrt{312}}{69^2} < 0$$

$$1044 + 102 \cdot 69 = 1044 + 7038 = 8082 < 450^2;$$

$$\begin{array}{r} 8082 \\ \times 8082 \\ \hline 16164 \\ + 64656 \\ + 64656 \\ \hline 65318724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 202500 \\ \times 312 \\ \hline 4050 \\ + 2025 \\ \hline 6075 \\ + 631800 \\ \hline 631800 \end{array}$$

$$450 < \sqrt{312}$$

$$8082^2 < 312 \cdot 450^2$$

$$\text{Значит, } x = \frac{6 + \sqrt{312}}{69} \text{ не подх}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

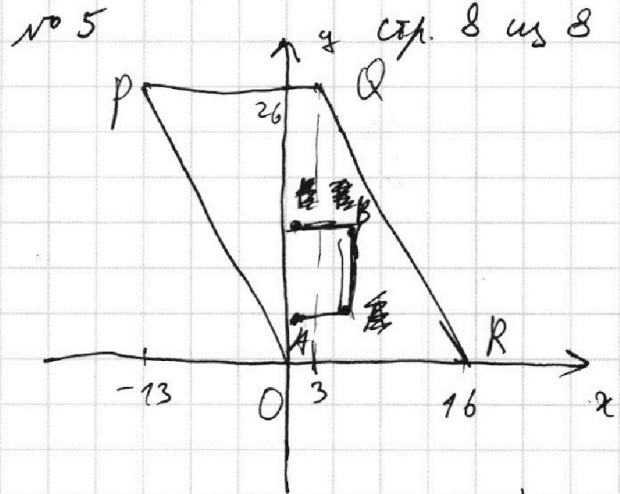
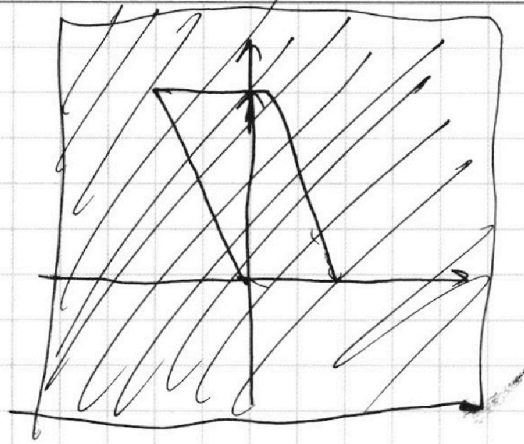
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$ - длина лачаной (ш. рас.)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

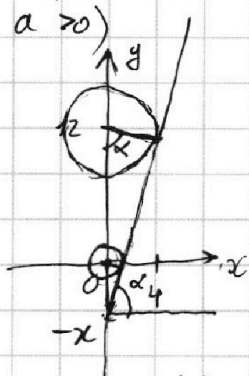
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (предметные)

стр. 6 из 8

Изобразим касательную к окружности общей кас. (касаясь окружности)



Пусть прямая пересекает ось y в $(0; -x)$

Тогда, т.к. радиус-перпендикуляр образует с касательной прямой в т. кас. перпендикуляр, то

$$\frac{x}{x+r} = \frac{1}{4}; \quad x=4$$

Значит, $\alpha = \text{tg} \alpha =$

$$= \frac{\sqrt{16^2 - 4^2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} =$$

$$= \sqrt{15}$$

Выбор значения α по условию $-\sqrt{15}$.

Ответ: $\alpha = \pm \sqrt{15}$



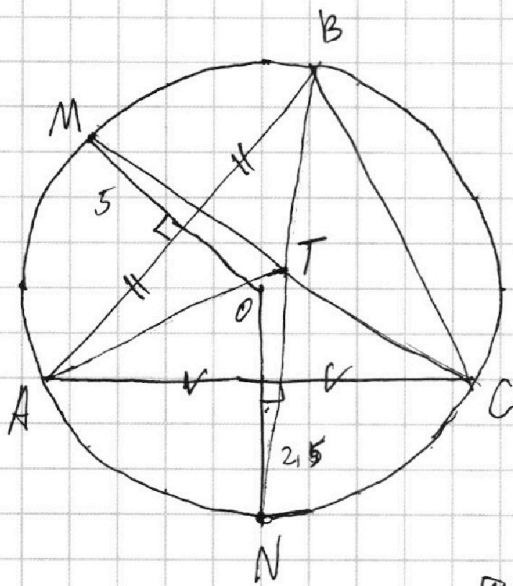
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 7.

стр. 7 из 8

N - серед. $\overset{\frown}{AC}$, M - серед. $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ABN = \angle CBN$$

$$\angle BCM = \angle ACM.$$

И.с. BN и CM - бис-сы \Rightarrow

$\rightarrow T = BN \cap CM$ - центр
впис. окруж-ти

П.к. M - серед. $\overset{\frown}{AB}$, N - $\overset{\frown}{AC}$, то $OM \perp AB$
 $ON \perp AC$

и OM делит AB а ON - AC пополам

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6.

стр. 5 из 8

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0.$$

1 вариант:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

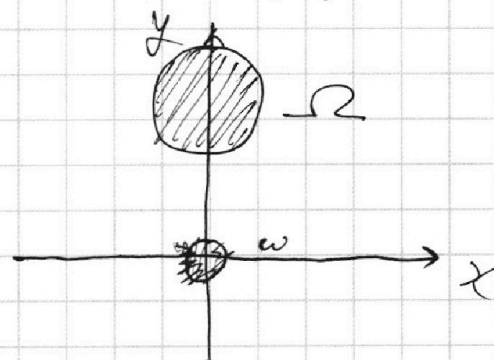
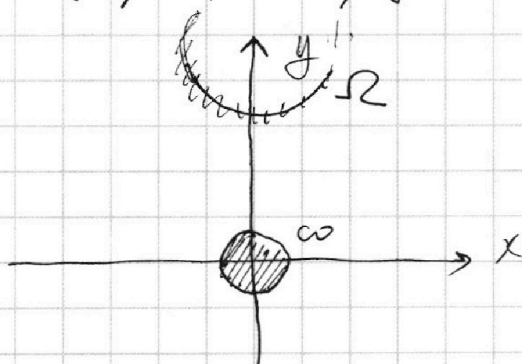
2 вариант:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16. \end{cases}$$

$(x; y)$ лежит внутри окр-ти ω с центром $(0; 0)$ и рад. 1.

$(x; y)$ лежит вне окр-ти ω с ц. $(0; 0)$ и рад. 1.

$(x; y)$ лежит вне окр-ти Ω с центром $(0; 12)$ и рад. 4.

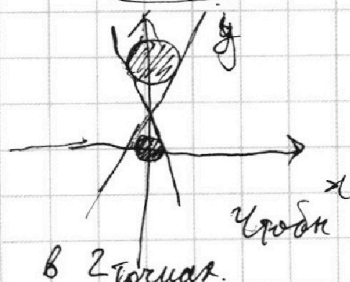
$(x; y)$ лежит внутри окр-ти Ω с ц. $(0; 12)$ и рад. 4.



$ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = 8b - ax$ — прямая. Чтобы

решений было $\neq \infty$, прямая должна касаться

окружностей. Но тогда, при заданных a, b (каждый вариант будет по 2 точки касания, т.е. всего 4. Значит



прямая должна касаться хотя бы одной из окр-тей. Но так как эти окр-ти не имеют общих точек, то всегда будут при заданных a (коэф-те наклона прямой)

чтобы при одном b 2 вар-та, прямая кас. окр-тей в 2 точках.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

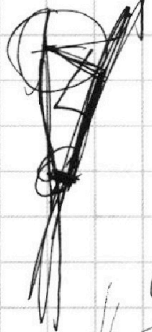


$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$$



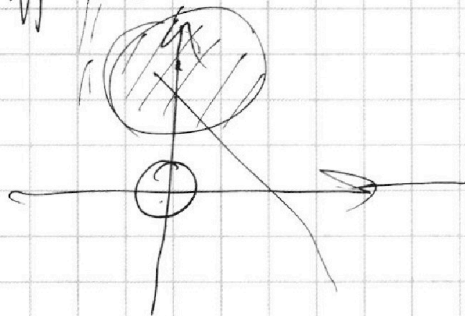
$$y_2 + 2x_2$$

$$y_2 - 2x_2 = 14 + y_1 - 2x_1$$

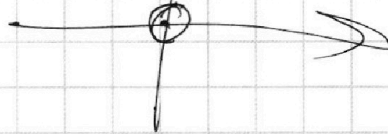


$$ax + y - 8b = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (x^2 + (y-12)^2 = 16)$$

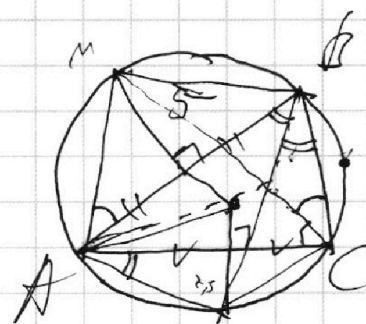
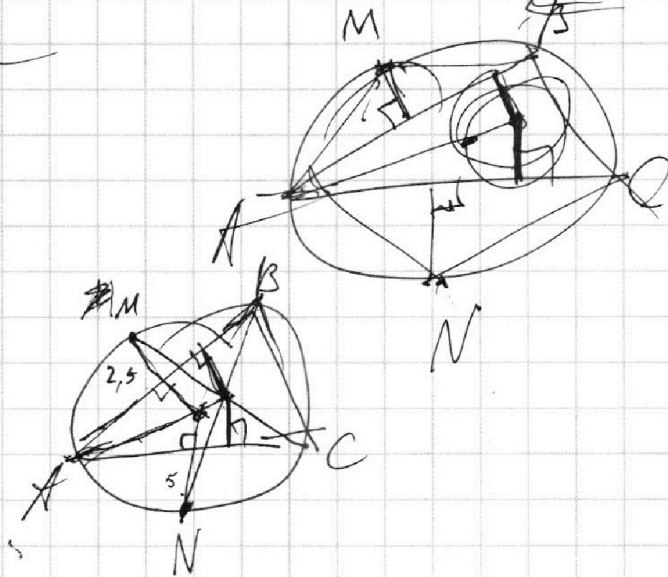


$$y = 8b - ax$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$



ЧЕРНОВИК



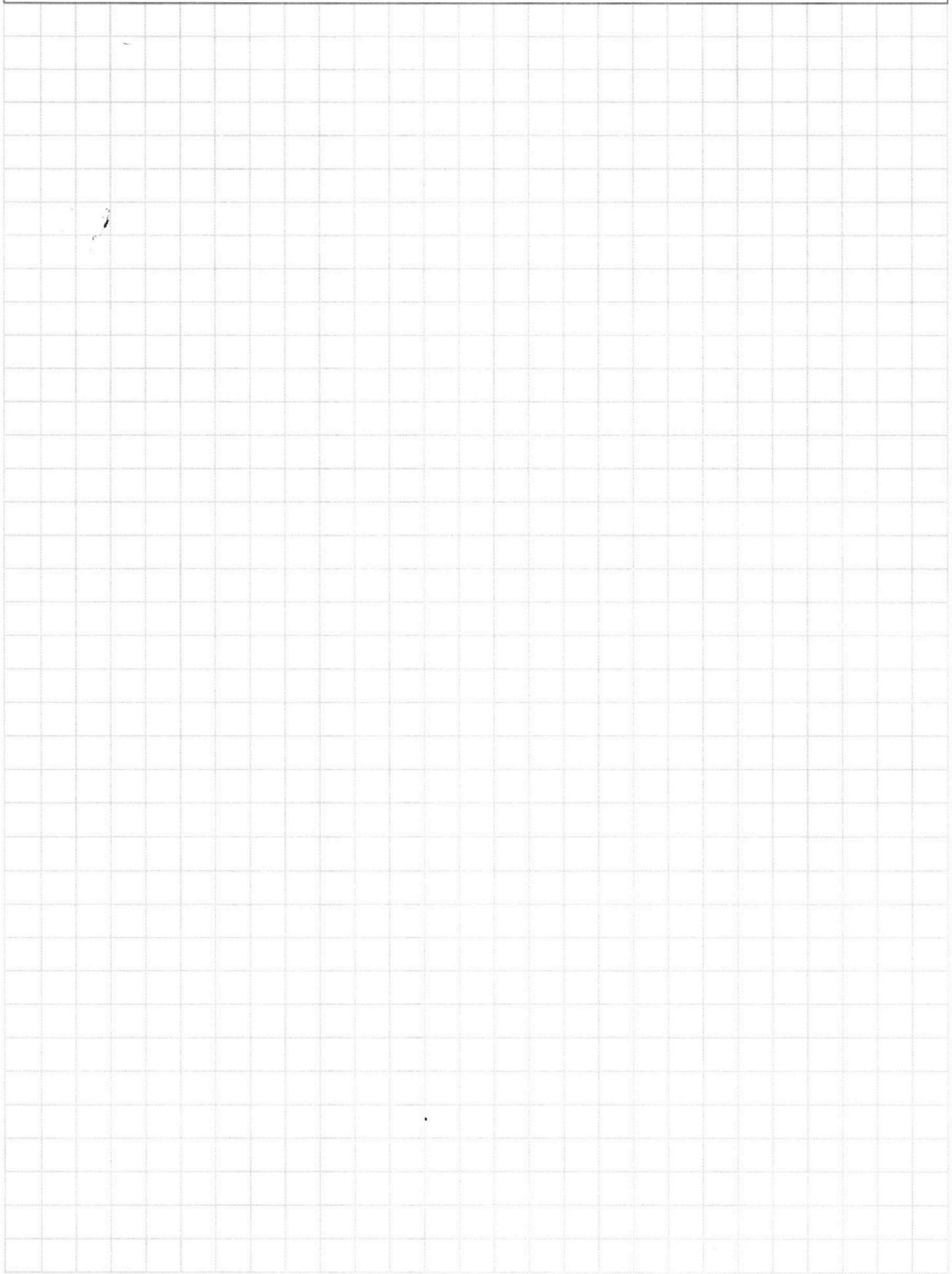
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$; $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$; $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ $a = 2^{10} \cdot 7^{16}$; $b = 2^5 \cdot 7^{17}$; $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$
 $(abc)^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$ $abc = 2^{38} \cdot 7^{54}$
 $abc = 2^{28} \cdot 7^{54}$ $(abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{108}$ $ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$
 $a = 2^{10} \cdot 7^{16}$; $b = 2^5 \cdot 7^{17}$; $c = 2^{13} \cdot 7^{23}$

УЗРКОВИК

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2) = \text{НОД}(a+b; -9ab)$$

$$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab$$

$$\begin{array}{r} a^2-7ab+b^2 \mid a+b \\ a^2+ab \quad a-8b \\ \hline -8ab+b^2 \\ -8ab-8b^2 \\ \hline 9b^2 \end{array}$$

$$\text{НОД}(a+b; 9b^2)$$

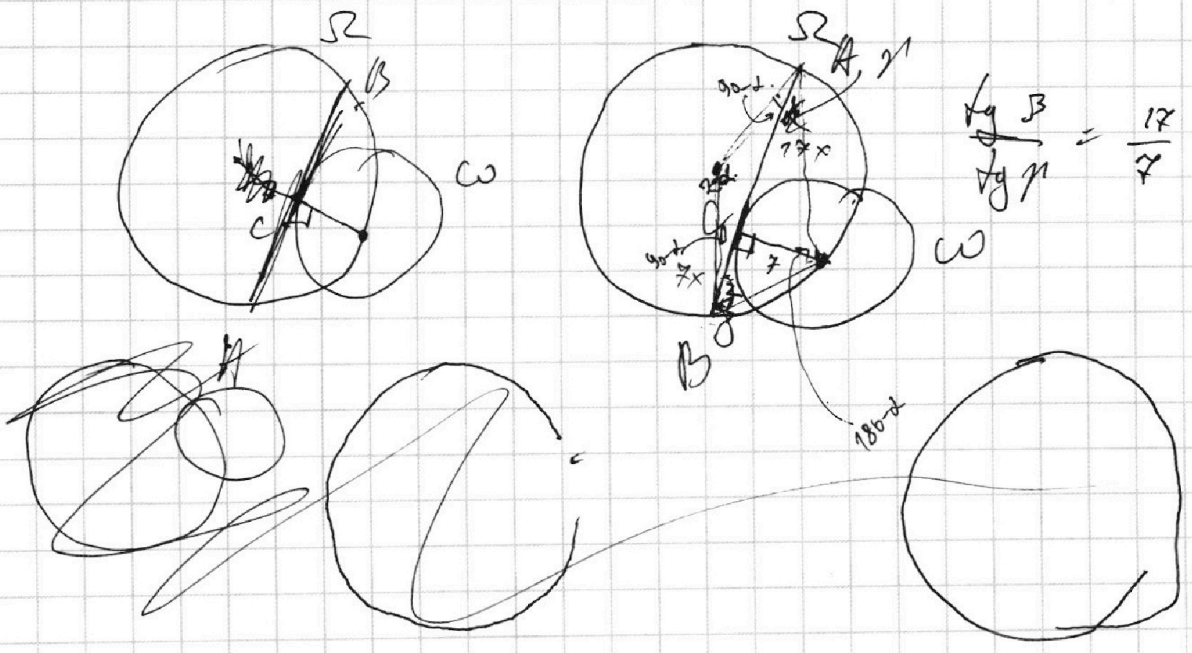
$$\begin{array}{r} 9b^2 \mid a+b \\ -9ab \quad 9b \\ \hline a-8b \\ -8ab \quad 9b^2 \\ \hline 9b^2 \end{array}$$

$$b^2 \cdot 9 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b^2) = 1$$

Значит $\text{НОД}(a+b, 9b^2) = 9$

max m = 9 $a = 7$; $b = 2$ $\frac{9}{49-98+9} = \frac{9}{-45}$



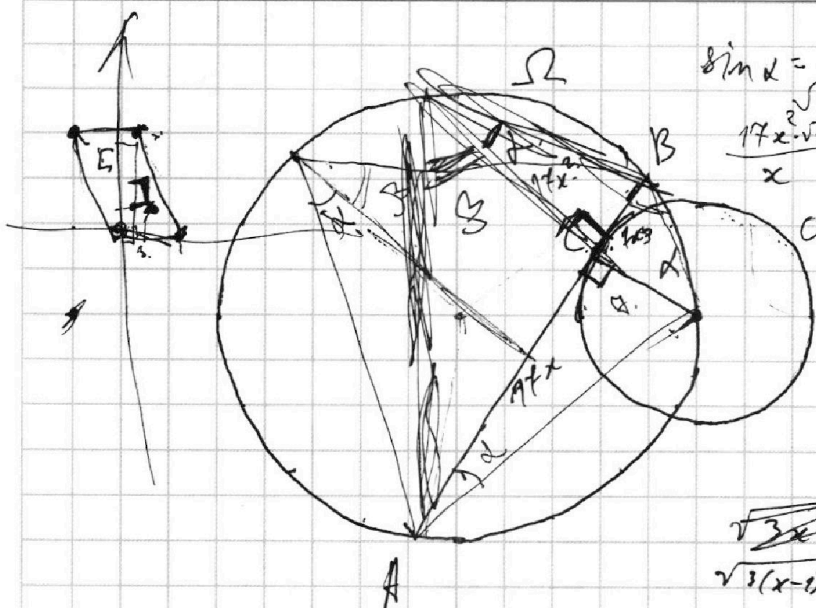
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \approx 0,5 \Rightarrow x = 289 + 17 + 2,25 = 306,25$
 $\frac{17x \cdot \sqrt{x^2+1}}{x} = 26 \Rightarrow (50-x)^2 = 306,25$
 $2500 + 25 - 50x = 306,25$
 $2500 + 25 - 50x = 306,25$
 $2500 + 25 - 50x = 306,25$
 $2500 + 25 - 50x = 306,25$

$17x \cdot \sqrt{x^2+1} = 26 \cdot 17,5$
 $x \cdot 45$
 $\frac{45}{87,5}$
 $40,0$
 $78x \cdot 5$

$\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3(x+1)^2-3x^2} = 1-9x$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$
 $\sqrt{a} - a = \sqrt{b} - b$

$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 > 0 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 > 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

$a + b - 2\sqrt{ab} = a - b$
 $b = \sqrt{ab}$
 $\begin{cases} b > 0 \\ b^2 = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b > 0 \end{cases}$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 - 2ab + b^2$

$\sqrt{a} = \sqrt{b}$
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$a + b + 2\sqrt{ab} = 1,965$

$a^2 + \sqrt{ab} + b^2 - \sqrt{ab} = 2ab + a + ab + b$

$\frac{45}{87,5}$
 $\frac{45}{87,5}$
 $\frac{45}{87,5}$

$49b = 6x^2 - 3x + 3$

$(1-9x) = (1-9x) (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

$\frac{17}{289}$
 $\frac{17}{289}$
 $\frac{17}{289}$

$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$312 = 4 \cdot 78$

$4 \cdot 9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\frac{312}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 312$

$102 \cdot 69 = 7038$
 $12x^2 = 72x + 4$

-7038
 8082

$69x^2 - 12x - 4 = 0$
 $6 \cdot 45 = 450$