



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Мы знаем, что $ab: 2^{19} \cdot 7^{10}$, $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$.

Перемножим эти три произведения и получим, что

$$a^2 b^2 c^2: 2^{(19+17+20)} \cdot 7^{(10+17+37)}$$
$$a^2 b^2 c^2: 2^{56} \cdot 7^{64}$$

т.к. слева мы имеем полный квадрат, то он ~~делится~~ в разложении на простые множители имеет степень в четной степени. 56 и 64 нечетны, тогда справа должна быть как минимум в 52 степени. Но есть

$$a^2 b^2 c^2: 2^{52} \cdot 7^{64}$$
$$abc: 2^{26} \cdot 7^{32}$$

~~если abc делится~~

Из этого следует, т.к. ни a , ни b , ни c не нули, что

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

~~Для $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ есть пример, а значит минимальное значение достигается:~~

$$\begin{aligned} a &= 2^8 \\ b &= 2^6 \cdot 7^{12} \\ c &= 7^{12} \end{aligned}$$

Но известно, что в разложении ac цифра вносит в 37 степени, т.е. и в abc она будет как минимум в 37 ст.

Тогда $abc: 2^{26} \cdot 7^{37}$
т.е. $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, т.к. ни a , ни b , ни $c \neq 0$ и
есть пример:

$$\begin{aligned} a &= 2^8 \cdot 7^{20} \\ b &= 2^6 \cdot 7^{17} \\ c &= 2^{12} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

Ответ: $abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

П.к.и. $\frac{a}{b}$ несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1$

Предположим выразим:

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \quad \text{По-первому, числитель } \neq 0, \text{ т.к. } a, b > 0$$

По второму, если числитель $:m$, то и $(a+b)^2-8ab : m$

По т.к. $(a+b)^2 : m$, то $8ab : m$.

П: ~~Изначально 500~~ ~~НОД~~

$$m = 2^k \cdot n$$

$$8ab : 2^k \cdot n, \quad n \not\div 2$$

$$m : 2 > 3$$

Тогда как минимум $ab : 2$ и либо a , либо $b : 2$.

500 $a : 2$. По пог. $b : 2$ но тогда $a+b : 2$ (!?)

Тогда $2 \leq 3$

$$m : n : p$$

Тогда, т.к. $p \neq 2$, то либо a , либо $b : p$. 500 $a : p$. Но пог $b : p$ и $a+b : p$ (!?)

Значит m может быть либо 1, либо 2, либо 4, либо 8.

Для $m=8$ есть пример: $a=1, b=7$, то

$$\frac{1}{7} - \text{несократима} \quad \frac{1+7}{1-6 \cdot 7 + 49} = \frac{8}{8} - \text{сокращается как 8.}$$

Ответ: $m_{\text{наиб.}} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть центр $\omega = O$.

П.к. AB -кас, то $OC \perp AB$.

В $\triangle OCB$, $\angle C = 90^\circ$ по т. Пифагора:

$$OB^2 = x^2 + 1 \Rightarrow OB = \sqrt{x^2 + 1}$$

В $\triangle OAB$ по т. синусов:

$$\frac{OB}{\sin \angle BAO} = 2R = 2 \cdot 5 = 10$$

В $\triangle OAC$, $\angle C = 90^\circ$:

$$\sin \angle BAO = \frac{OC}{AO} = \frac{1}{\sqrt{1 + 49x^2}}$$

↑
по т. Пифагора

Тогда если подставить в (*) две найденных равенства:

$$\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + 49x^2} = 10$$

Пусть $x^2 = a$, $a \geq 0$

$$\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{49a+1} = 10$$

$$(a+1)(49a+1) = 100$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

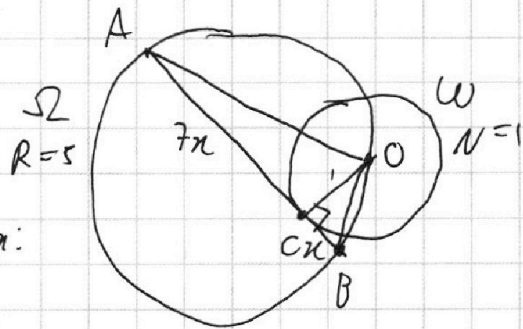
$$D = 50^2 + 49 \cdot 99 \cdot 4 = 2500 + 4851 \cdot 4 = 2500 + 19404 = 21904 = 148^2$$

$$a = \frac{-50 \pm 148}{2 \cdot 49} = \frac{148 - 50}{2 \cdot 49} = \frac{98}{2 \cdot 49} = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$AB = 8x = 8$$

Ответ: $AB = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Обозначим $2x^2 - 5x + 3 = a$, $2x^2 + 2x + 1 = b$

Заметим, что $a - b = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x$

Тогда равенство можно переписать, как:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

Пусть $\sqrt{a} = c$, $\sqrt{b} = d$, то

$$c - d = c^2 - d^2$$

$$c - d = (c - d)(c + d)$$

$$(c - d)(c + d - 1) = 0$$

⊕ Если $c = d$, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ $\begin{cases} a = b \\ a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = 0 \\ a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{8 - 70 + 3 \cdot 49}{49} > 0$$

Проверим значение $x = \frac{2}{7}$ $8 - 70 + 141 > 0$ - верно
подстановка:

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} + \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1} \stackrel{?}{=} 2 - \frac{7 \cdot 2}{7}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} \stackrel{?}{=} \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1}$$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 \stackrel{?}{=} 2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1$$

$$2 = 7 \cdot \frac{2}{7} \text{ - верно, т.е. } x = \frac{2}{7} \text{ - корень}$$

⊖ Если $c \neq d$. Тогда можно c Если $c + d = 1$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

По у. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, сложим:

$$2\sqrt{a} = a - b + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возведем в квадрат:

$$\begin{cases} 4a = a^2 - 2ab + b^2 + 1 & (a-b+1)^2 \leftarrow a \text{ стороны } > 0 \text{ стороны} \\ a-b+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = (2-7x+1)^2 \\ 2-7x+1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = (3-7x)^2 \\ 7x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

Проверим оба корня:

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77 + 14\sqrt{61} \leq 123$$

$$14\sqrt{61} \leq 46$$

$$\sqrt{61} \leq \frac{46}{14}$$

$$14 \cdot \sqrt{49} = 14 \cdot 7$$

$$14 \cdot 7 = 98$$

$$98 > 46$$

$$\text{неверно, т.е. три } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\text{выражение не имеет смысла}$$

$$\text{б.с. дать не может, т.к. } D < 0 \text{ и } k < 0.$$

$$\text{при старшем члене } > 0$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77 - 14\sqrt{61} \leq 123$$

$$-14\sqrt{61} \leq 46 - \text{верно}$$

$$x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

не подходит, при подстановке в уравнение т.к. все перемены для равносильности

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}, x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть мы выберем какую-то
точку A внутри $OPQR$
 (x_1, y_1)

Тогда $y_2 = 12 - 2x_1 + y_1$

То $y_2 = -2x_2 + 12 + 2x_1 + y_1$

Это уравнение прямой

Каждая целочисленная точка этой
прямой внутри параллелограмма

будет подходить.

-2 -наклон, эта прямая будет параллельна стороне OP
паралл-ма.

$+12 + 2x_1 + y_1$ - сдвиг.

Рассмотрим любую прямую a вида: $y = -2x + c$.

Узнаем, какими могут быть x , и y , тогда точка B
попадет на эту пр.

Корды при x равны, приравняем сдвиги:

$$12 + 2x_1 + y_1 = c$$

$y_1 = c - 12 - 2x_1$ - ур-ие прямой для точек A , при
которых B попадет на прямую a .

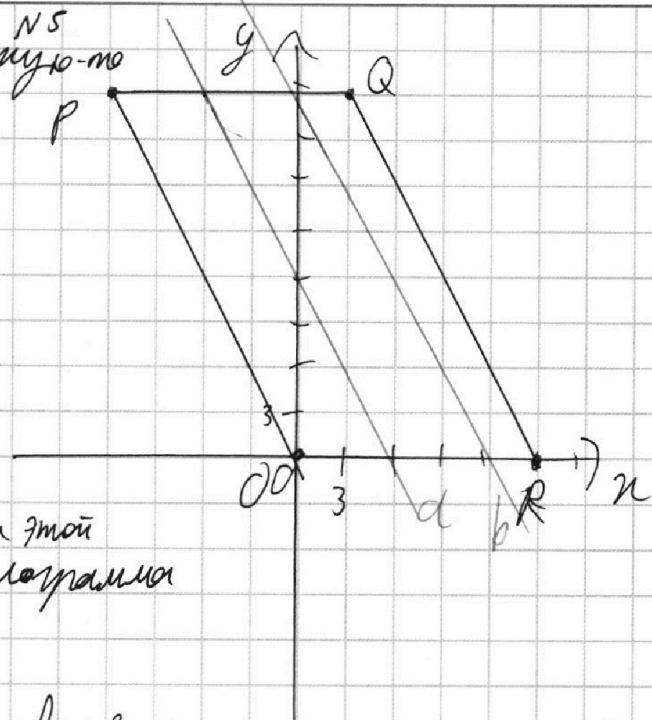
Она будет параллельна a .

Сдвиг: $c - 12$, у a : c

c никогда не равно $c - 12$, значит прямые всегда разные.

Когда мы можем задать корды точек A и B параллелизмами:

$$\begin{cases} y_2 = -2x_2 + c \\ y_1 = -2x_1 + c - 12 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поруа QR-кода недопустима!

При этом $c \in \mathbb{Z}$, тогда все координаты будут целыми.
На каждой прямой всегда внутри параллелограмма
будет расположено ^{целых} ровно 13 точек, при каждом
увеличении n на 1 y увеличивается на 2, тогда если
начать с точки пересечения прямой и верхней стороны
параллелограмма, то можно сделать ровно 12 шагов вниз и
получить ровно 13 различных точек.

Для одного значения параметра с нам будет
подходить $13 \cdot 13 = 169$ различных пар точек.

Найдём все возможные значения c .

Нижняя прямая со стороной ~~параллелограмма~~ $c - 12$, верхняя -
 $-c \in \mathbb{Z}$.

Если $c - 12 < 0$, то прямая не имеет никаких точек
справа - параллелограмм и одна точка из пары не может быть
отрезана.

Тогда $c - 12 \geq 0$ $c \geq 12$.

Аналогично $c \leq 27$, иначе точка не будет одной из
точек.

Тогда $c \in [12; 27]$ и принимает 16 целых значений

то вариантов $169 \cdot 16 = 2704$

Ответ: 2704

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

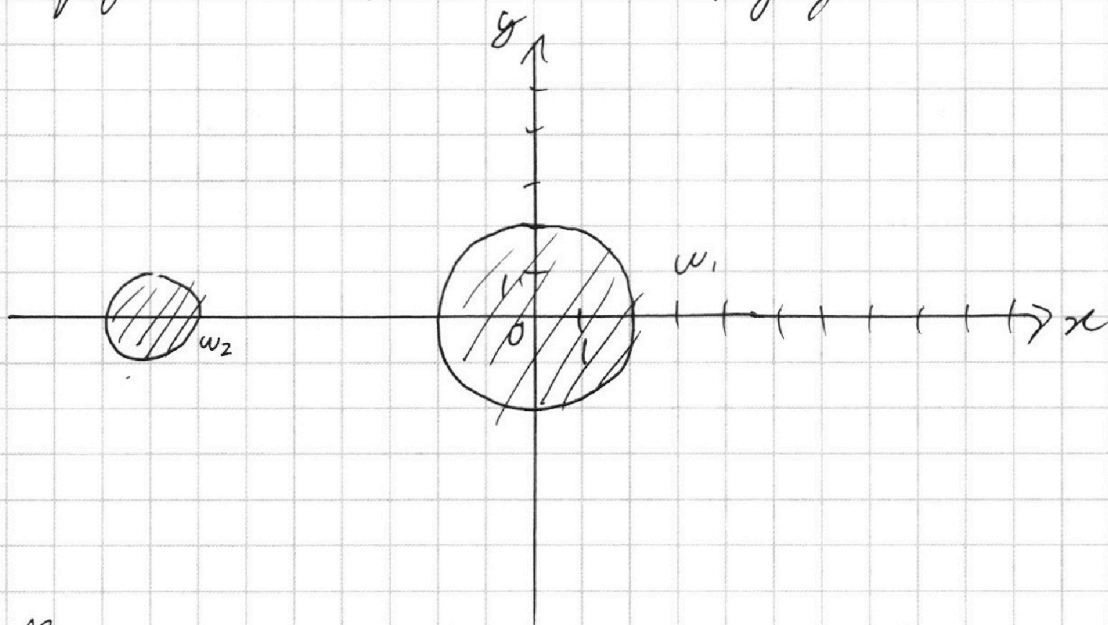
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \\ ax - y + 10b = 0 \end{cases}$$

← рассмотрим отдельно
каждую скобку и определим
слегка границы фигур, которые
они ограничивают

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - уравнение окружности ω_1 с ц. $(-8; 0)$ и радиус 1

$x^2 + y^2 = 4$ - уравнение окружности ω_2 с ц. $(0; 0)$ и радиус 2

Нарисуем эти две окружности на координатной плоскости
и определим, какие области нам подходят.



В точке $(0; 0)$ транс-ив < 0 , значит в силу непре-
рывности границы фигур, знак будет изменяться
при переходе через границу.

$y = ax + 10b$ - ур-ие прямой. ~~Важно~~ Если
рассмотреть все положения прямой на этой плоско-
сти, то очевидно, что если прямая пересекает одну
окр-ть, то система будет иметь бесконечно кол-во
решений. Это три случая мы получаем один важный
корень системы. Поскольку каждая окружность прямая
может касаться, значит для двух корней надо, чтобы

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

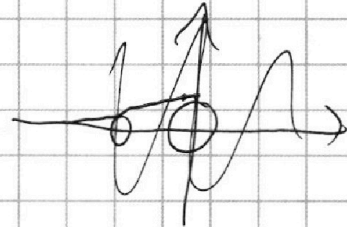
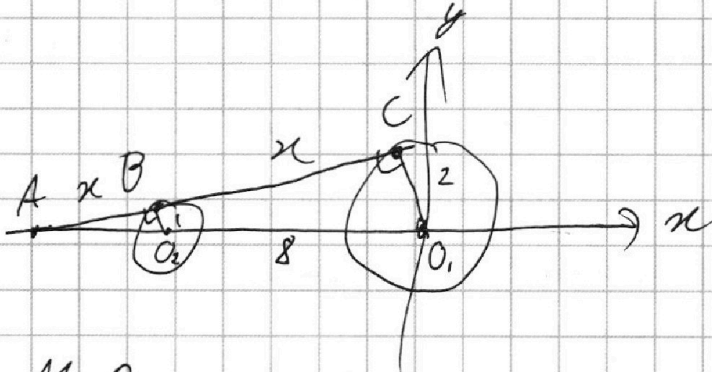
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



прямая для одной касательной дуги окружностей.
 Также возьмем прямую и иллуки
 Сделаем набросок рисунка для внешней одной касательной



Необходимо найти значение α . Введем прямую $y = \alpha x + b$ а это значение угла наклона прямой к Ox .

Обозначим некоторые точки пересечений на рисунке. Пусть $AB = x$. Т.к. O_2 можно перевести в O_1 , заметим с O_1 . А и $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{1} = 2$, то

$AC = 2x$ и $BC = x$ на этом рисунке

По построению $O_1 O_2 = 8$

в $\triangle ABO_2$ по т. Пифагора $AO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$

Из заметимными катетами получаем отношение:

$$\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1} \quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1} + 8}{2} \quad \cdot 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1} + 8$$

$$\sqrt{x^2+1} = 8$$

$$x^2 + 1 = 64$$

$$x^2 = 63$$

$$x = \sqrt{63}$$

т.к. x это длина отрезка

$$\tan \angle BAO_2 = \frac{1}{x} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Вторая внешняя сторона кас-ся будет симметрична первой от O_1 или от центра, т.е. O_x .

Значит O_x будет кас-ся от O_1 кас-ся

и O_2 кас-ся от центра второго угла будет

$\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{21}$. В этом случае

удобнее, если рассмотреть рисунок

Теперь рассмотрим случай внутренней кас-ся

Рассуждения аналогичны первому случаю,
только кас-ся им заметим $k = -2$.

В этом же $AO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$

$AB = x \quad AC = 2x$

Из отношения $\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1}$ получаем

$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1} = \frac{8 - \sqrt{x^2 + 1}}{2}$

$3\sqrt{x^2 + 1} = 8$

$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{8}{3}$

$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$

$x^2 = \frac{55}{9}$

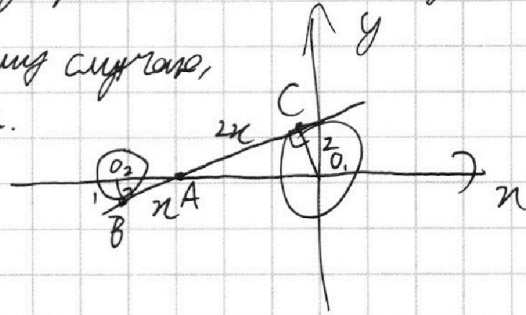
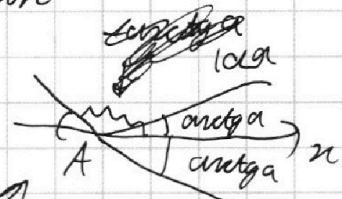
$x = \pm \frac{\sqrt{55}}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

Тогда $\tan \angle O_2 AB = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

аналогично первому рассуждением $\alpha = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ подходит.

В итоге $\alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{21}$, $\alpha = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

Ответ: $\alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{21}$, $\alpha = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7

Пусть окр. сфер. $\Delta ABC - \Omega$

I - incentр, M, N -
основания перпендикуляров на AB и AC .

состав

$\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$
 AI, BI, CI - биссектрисы,
делят углы пополам.

$CI \perp M$ и $BI \perp N$ являются на
сторонах AC и AB прямыми, т.к. биссектрисы
пересекаются в центре сфер. окр. - т.е. треугольнике

в серединном дуге.

$\angle NCA = \angle NBA = \beta$, как опр. по одной дуге Ω
аналогично $\angle ABM = \angle ACM = \gamma$.

Тогда в $\Delta N, NC, \angle N = 90^\circ \sin \beta = \frac{2}{NC}$

в $\Delta M, MB, \angle M = 90^\circ \sin \gamma = \frac{4,5}{MB}$ *

Заметим, что по лемме о трезубце $NA = NI = NC$,
т.е. ΔAIC вписан в окр. - т.е. сф. N .

Аналогично $AM = IM = BM$ и ΔAIB вписан в окр. - т.е. сф. M .

Тогда в ΔAIC по т. синусов

$$\frac{AI}{\sin \gamma} = 2R_{\text{окр.}} = 2 \cdot NC$$

в ΔAMB :

$$\frac{AI}{\sin \beta} = 2R_{\text{окр.}} = 2 \cdot MB$$

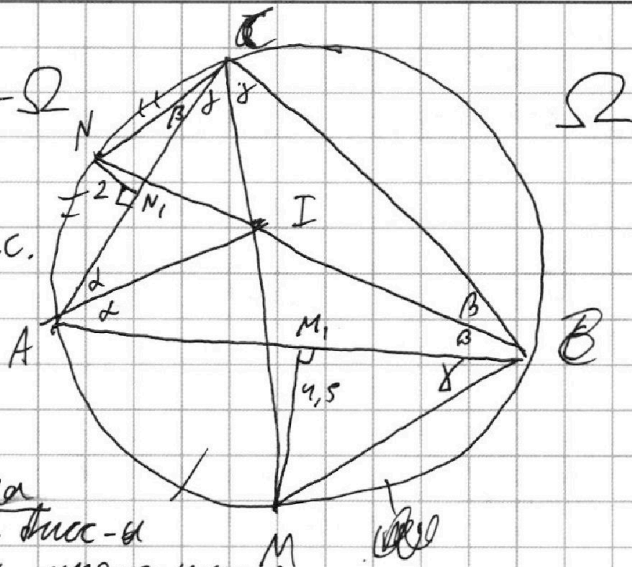
Перемножим: $\frac{AI^2}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = 4 \cdot MB \cdot NC$

подставим равенства (*):

$$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC} \cdot \frac{4,5}{MB}} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$\frac{AI^2 \cdot MB \cdot NC}{9} = 4 \cdot MB \cdot NC \quad AI^2 = 36$$

$AI = \oplus 6$ т.к. это длина отрезка Ответ: $AI = 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4(2x^2 - 5x + 3) = 9 - 42x + 49x^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

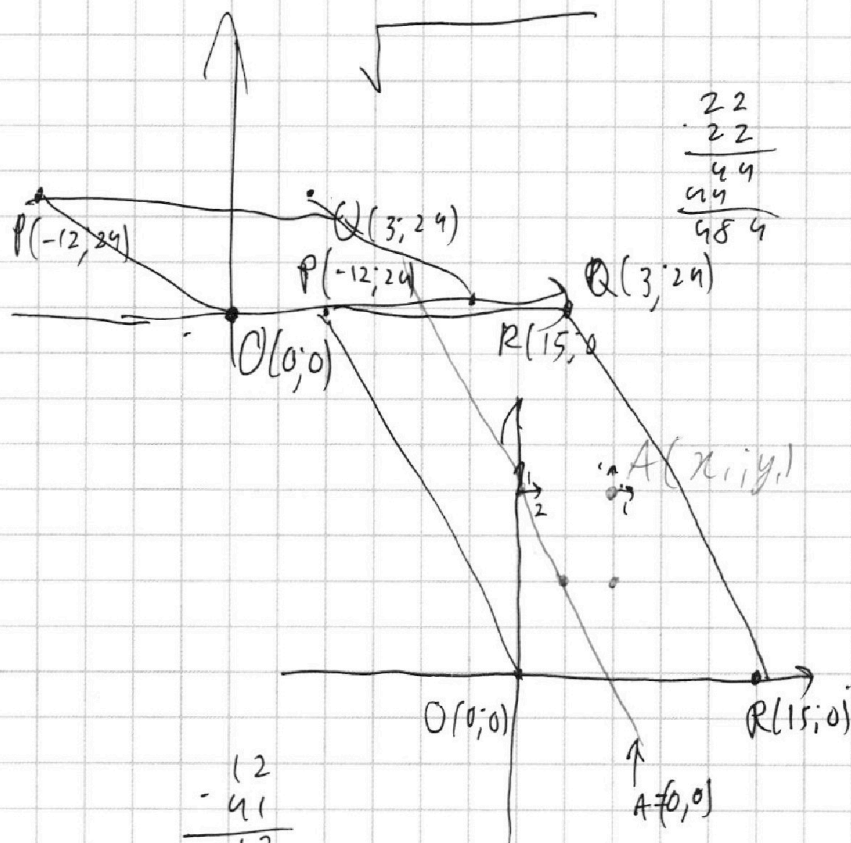
$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ - 77 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ - 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 984 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ - 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 992 \\ + 489 \\ \hline 976 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ - 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 984 \end{array}$$

(4.7)

$$y_2 - y_1 = 12 - 2x_2 + 2x_1$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ - 7 \\ \hline \end{array}$$

$$y = 12 - 2x$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 41 \\ \hline 12 \\ 48 \\ \hline 492 \\ + 484 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + y_2 &= 2 + 2x_1 + y_1 \\ y_2 &= 12 + 2x_1 - 2x_2 + y_1 \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 976 \\ 976 \\ \hline 244 \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \quad \begin{array}{l} 2x + y = 12 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

a b $a - b$

$$\begin{aligned} (2x-1)(x-2) &= \\ &= 2x^2 - 4x - x + 2 = \\ &= 2x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{(2x-1)(x-2)}$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)}$$

$$\begin{aligned} D &= 25 - 8 \cdot 3 = 1 \\ x &= \frac{5 \pm 1}{4} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \quad \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$2(x-1)(x-1,5)$$

$$(x-1)(2x-3)$$

$$\begin{aligned} (2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) &= \\ &= 2 - 7x \end{aligned}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x = a$$

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

$$\sqrt{a+2} - \sqrt{a+7x} = 2-7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$c, d \geq 0$$

$$\begin{aligned} -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} &= \\ 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} &= 3 - 7x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c - d &= c^2 - d^2 \\ c - d &= (c - d)(c + d) \end{aligned}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} \text{I) } c &= d \\ \sqrt{a} &= \sqrt{b} \\ a &= b \\ a &\geq 0 \\ b &\geq 0 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{aligned} 2 &= 7x \\ x &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$\text{II) } c \neq d$$

$$1 = c + d$$

$$1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$1 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$1 - 2\sqrt{a} + a = b$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}) + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{a}{b} \left(\frac{a+b}{a-b} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ a^2 - 6ab + b^2 &: m \\ (a+b)^2 - 8ab &: m \\ &: m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ 8ab &: m \\ m &\leq 8 \end{aligned}$$

$$m=8$$

$\frac{1}{7}$

если есть $p \mid m \cdot p \Rightarrow \begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b:p \\ a:p \end{cases}$

$$\frac{1+7}{1-6 \cdot 7+49} = \frac{8}{50-42} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\begin{aligned} MC^2 &= NO^2 - 1 \\ NC^2 + 1 &= NO^2 \end{aligned}$$

$$a+b \neq \sqrt{49x^2 + 49x^2}$$

$$\begin{aligned} AC \cdot CB &= CO \cdot CT \\ 7x^2 &= CT \end{aligned}$$

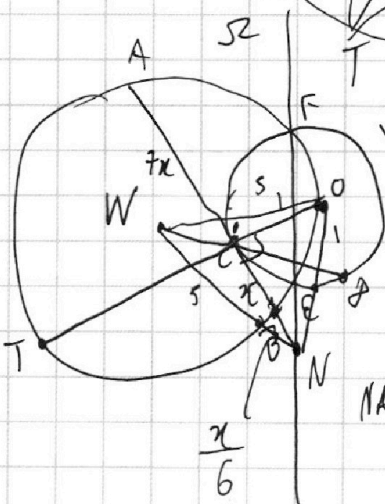
$$CT \cdot (CT+2)$$

$$\begin{aligned} 25 - WC^2 &= 25 \\ 7x^2 &= WC \end{aligned}$$

$$WC \cdot WP = 25 - 1 = 24$$

$$\begin{aligned} \frac{7x}{4x^2} &= \frac{1}{x} \\ NB &= \frac{x}{6} \\ 6x \cdot NB &= x^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 + 49x^2}$$



$$\begin{aligned} NA \cdot NB &= NE \cdot NF = MC^2 \\ NA \cdot NB &= NC^2 \end{aligned}$$

$$NO \cdot (NB + 8x) = (NB + x)^2$$

$$NB^2 + 8x \cdot NB = NB^2 + 2x \cdot NB + x^2$$

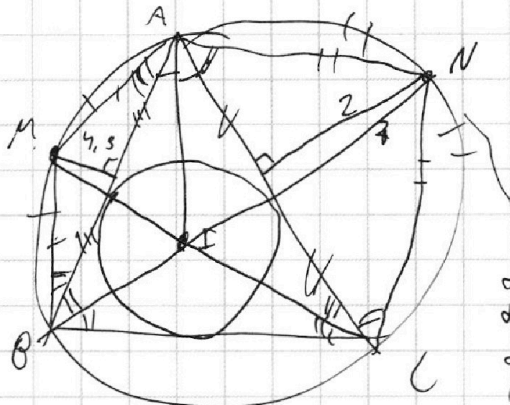
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решено.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 26 \\ \alpha + \beta = 14 \\ \alpha + \gamma = 20 \\ \beta + \gamma = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 6 \\ \gamma = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= 64 \\ &= 20 + 44 \\ &= 27 + 37 \\ &= 10 + 17 + 37 = \\ &19 + 17 + 20 = \\ &= 34 + 17 = 41 + 10 = \\ &= 51 \end{aligned}$$

$$\frac{AI}{\sin \angle TCA} = 2R = \frac{4,5}{\sin \angle MBA}$$

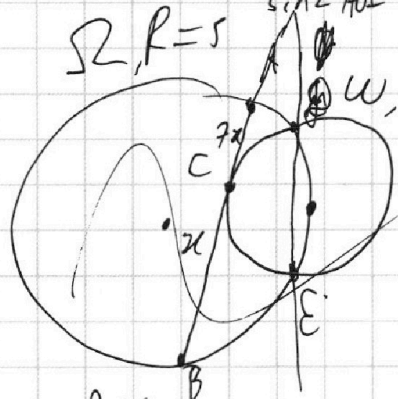
$$AI^2 = 4,5 \cdot 2$$

$$\frac{AI}{\sin \angle AOB} = 2R = \frac{2}{\sin \angle ACN}$$

$$AI^2 = 9$$

$$AI = 3$$

$\Omega, R=5$



$\Omega, R=5$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 32 \\ \alpha + \beta = 14 \\ \gamma = 18 \\ \alpha = 19 \\ \alpha + \beta = 16 \\ \beta + \gamma = 17 \\ \alpha + \gamma = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 14 \\ \alpha + \gamma = 17 \\ \beta + \gamma = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 8 \\ \gamma = 12 \end{cases}$$

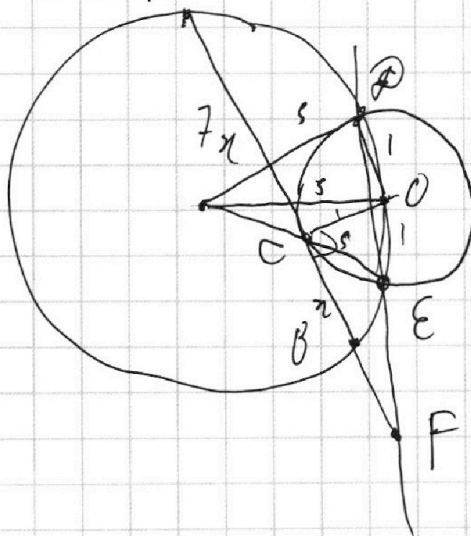
$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &: 2^{51} \cdot 7^{64} \\ a^2 b^2 c^2 &: 2^{52} \cdot 7^{64} \end{aligned}$$

$$abc : 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$(abc)^2 : 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$\Omega, R=5$



$\Omega, R=5$

$$FE \cdot FP = FB \cdot FA = FC^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax - y + 10b = 0$ — прямая
 $y = ax + 10b$ — ~~всегда~~ решение
 $x^2 + y^2 = r^2$

$$a = \pm \arctg\left(\frac{3}{2\sqrt{14}}\right)$$

$$x = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

$$x^2 = \frac{56}{9}$$

$$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{8}{3}$$

$$8 - \sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{x^2 + 1} - \frac{16}{9}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{54}{9} = \frac{144}{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{8 - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\begin{array}{r} 2709 \mid 16 \\ 16 \\ \hline 110 \\ -96 \\ \hline 149 \end{array}$$

$$x^2 = \sqrt{x^2 + 1} = 1$$

$$a = \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$a = \arctg\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ 16 \\ \hline 54 \\ 36 \\ 6 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x^2 + 1} \cdot 169 \\ 169 \\ \hline 16 \\ 160 \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + 5}$$

$$\sqrt{x^2 + 1} + 5 = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$5 = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$25 = x^2 + 1$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -16 \\ \hline 54 \\ 36 \\ 6 \\ \hline 169 \end{array}$$

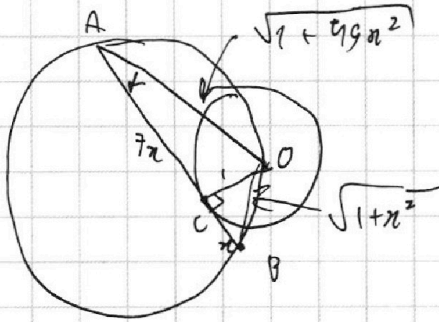
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 99 \\ \hline 81 \\ 81 \\ 36 \\ \hline 4851 \end{array}$$

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49r^2}}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 81 \\ 36 \\ \hline 4851 \\ 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\sqrt{1+r^2} \cdot \sqrt{1+49r^2} = 10$$

$$(1+r^2) \cdot (1+49r^2) = 100$$

$$(1+a) \cdot (1+49a) = 100$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 9904 = 21904$$

$$a = \frac{-50 \pm \sqrt{21904}}{98} = \frac{74 - 50}{98} =$$

$$= \frac{24}{98} = \frac{12}{49}$$

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$AB = \frac{16\sqrt{3}}{7}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \cdot 74 \\ \hline 284 \\ 518 \\ \hline 5476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19404 \\ 4851 \\ \hline 539 \\ 77 \\ \hline 11 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 7 \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1184 \\ \cdot 10 \\ \hline 11840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21904 \\ \cdot 4 \\ \hline 5476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \cdot 37 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4851 \\ 4 \\ \hline 204 \\ 32 \\ \hline 16 \\ 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \cdot 37 \\ \hline 128 \\ 148 \\ \hline 64 \\ 32 \\ \hline 8 \\ 32 \\ \hline 16 \\ 4 \\ \hline 148 \\ 804 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \cdot 37 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 148 \\ \cdot 8 \\ \hline 64 \\ 32 \\ \hline 8 \\ 1184 \\ 552 \\ \hline 148 \\ 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ 74 \\ \hline 16 \\ 28 \\ 28 \\ \hline 49 \\ 5476 \end{array}$$

$$21904 \mid 4$$

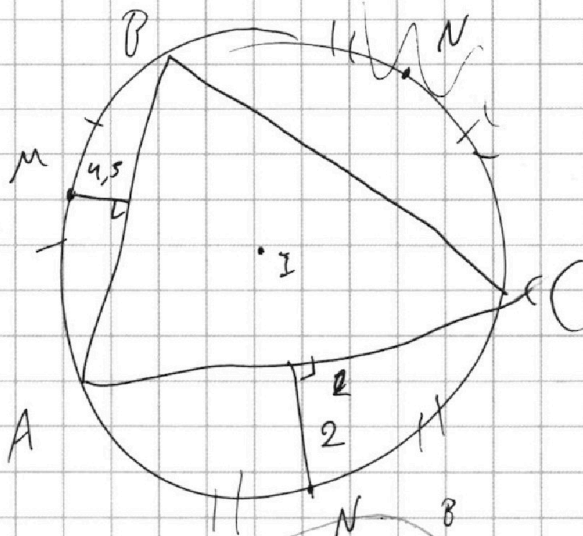
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

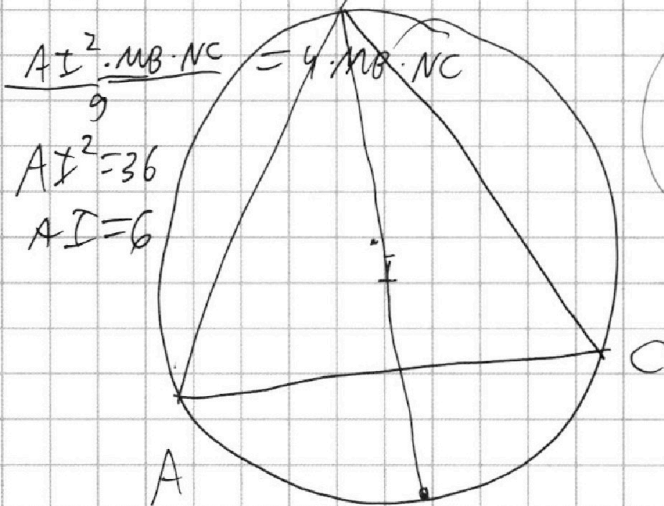
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \beta = \frac{2}{NC}$$

$$\sin \gamma = \frac{4,5}{MB}$$

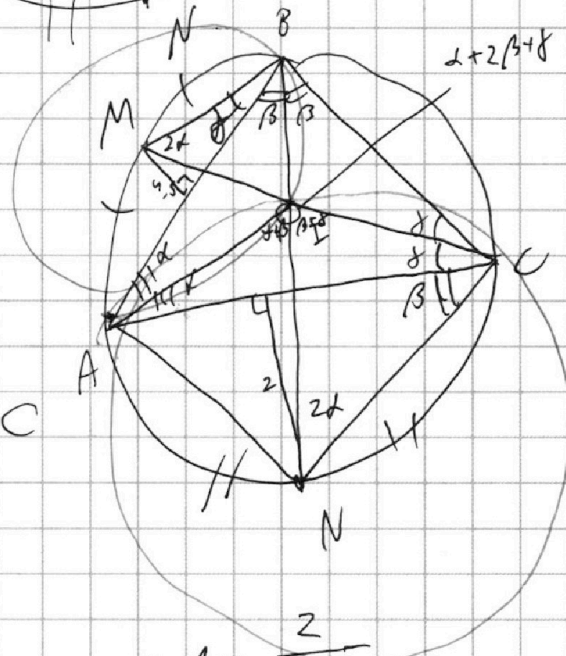
$$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC} \cdot \frac{4,5}{MB}} = 4 \cdot MB \cdot NC$$



$$\frac{AI^2 \cdot MB \cdot NC}{9} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$AI^2 = 36$$

$$AI = 6$$



$$\sin \beta = \frac{2}{NC}$$

$$\frac{NC}{\sin \beta} = 2R = \frac{MB}{\sin \gamma}$$

$$\frac{AI^2}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$\frac{AI}{\sin \beta} = 2 \cdot MB$$

$$\frac{NC^2}{2} = \frac{MB^2}{4,5}$$

$$4,5 \cdot NC^2 = 2 \cdot MB^2$$

$$\frac{MB}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{NC}{\sin \beta} = 2R$$

$$\sin \gamma = \frac{4,5}{MB}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2 \cdot \frac{121 - 44\sqrt{61} + 4 \cdot 61}{41 \cdot 41} - 5 \cdot \frac{1}{41 \cdot 41}}$$

$$\sqrt{3518 + 322\sqrt{61}} = 5 + 14\sqrt{61} + \sqrt{3313 - 252\sqrt{61}}$$

$$\sqrt{3518 + 322\sqrt{61}} - \sqrt{3313 - 252\sqrt{61}} = 41 \frac{5 + 14\sqrt{61}}{1681}$$

$$x^2 = \frac{121 - 44\sqrt{61} + 244}{1681}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \cdot 41 \\ \hline 41 \\ 164 \\ \hline 1681 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242 - 88\sqrt{61} + 488 - 55 \cdot 41 + 10 \cdot 41\sqrt{61} + 3 \cdot 1681}{1681}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3518 + 322\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 410 \\ - 88 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242 - 88\sqrt{61} + 488 + 22 \cdot 41 - 4 \cdot 41\sqrt{61} + 1681}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 55 \\ 41 \\ \hline 91 \\ 220 \\ \hline 2255 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1181^3 \\ 243 \\ 18 \\ \hline 3 \\ 5043 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ - 77 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$5 + 14\sqrt{61}$$

$$\sqrt{\frac{3313 - 252\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 2583 \\ + 242 \\ \hline 2825 \\ + 488 \\ \hline 3313 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 41 \\ \hline 164 \\ + 88 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5043 \\ - 2255 \\ \hline 2788 \\ + 242 \\ \hline 3030 \\ + 488 \\ \hline 3518 \end{array}$$

$$2 \cdot \frac{77 - 14\sqrt{61}}{41 + 1681}$$

$$\frac{3362 - 77 + 14\sqrt{61}}{1681}$$

$$\begin{array}{r} 1681 \\ + 902 \\ \hline 2583 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot 41 \\ \hline 22 \\ + 88 \\ \hline 902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1651 \\ \cdot 2 \\ \hline 3362 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3362 \\ - 77 \\ \hline 3285 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

