МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Чтобы найти минимум abc, предположим, что ab, bc и ac ~~это не есть~~ равны своим делителям, указанным в условии. $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$, $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$.

Перемножив их всех, получим квадрат значения abc: $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$.

Извлекая корень из данного выражения, мы не сможем получить натур. степень двойки, поэтому одно из исходных произведений будет в 2 раза больше, а $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$. Запишем условие сократимости на m: $\begin{cases} a+b \vdots m \\ (a+b)^2-9ab \vdots m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \vdots m \\ 9ab \vdots m \end{cases}$

Т.к. a и b взаимно просты дальше будем рассматривать систему в разложении на простые сомножители.

$9ab \vdots m \Leftrightarrow ab \cdot 3^2 \vdots m \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot 3^2 \vdots m$, т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, то отбросим её.

$b^2 \cdot 3^2 \vdots m \Rightarrow m = \{1; 3; 9; 3b; 9b; 3b^2; 9b^2\}$

Но не забудем про условие $a+b \vdots m$ и то, что $\frac{a}{b}$ — несократима. Следовательно $m \neq 3b; 9b$, т.к. $a < b \Rightarrow a+b < 2b$. И также $m \neq 3b^2; 9b^2$, потому что эти числа ещё больше, в условии натуральности b.

Значит $m = \{1; 3; 9\}$. Максимальное из них 9.

Пример: $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ $\quad a+b = 4+5 \vdots 9$

$9ab = 9 \cdot 4 \cdot 5 \vdots 9$

Ответ: $m = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Замена: $a = 3x^2-6x+2 \geq 0$; $b = 1-9x$

$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \quad || **2 \Rightarrow a - 2\sqrt{a^2-ab} + a - b = b^2$

$b^2 - 2a + b = -2\sqrt{a^2-ab} \quad || **2 \Rightarrow b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + 2b^3 - 4ab = 4a^2 - 4ab$

$b^4 + 2b^3 + b^2(1-4a) = 0 \quad || : b^2 \Rightarrow b^2 + 2b + 1 - 4a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b+1)^2 = 4a \Rightarrow b+1 = 2\sqrt{a}$

Обратная замена: $9x = 2\sqrt{3x^2-6x+2} \quad || **2$

$81x^2 - 12x^2 + 24x - 8 = 0 \Leftrightarrow 69x^2 + 24x - 8 = 0$

$D = 24^2 + 4 \cdot 8 \cdot 69 = 2784$

$x_{12} = \frac{-24 \pm 4\sqrt{174}}{138}$ Подставив в исходное оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Не забудем, что когда мы делили на b^2, то возможен случай $b = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Ответ: $x = \{ \frac{-24 \pm 4\sqrt{174}}{138} ; \frac{1}{9} \}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \iff 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

Теперь для исходного пар-ма мы можем рассмотреть 23 случая разности координат от $x_2 - x_1 = 16$; $y_2 - y_1 = -18$ до $x_2 - x_1 = -6$; $y_2 - y_1 = -26$

Заметим соотношение, выполняющееся для кол-ва точек k в каждом случае: $k = (16 - |x_2 - x_1| + 1)\cdot$ $\cdot(26 - |y_2 - y_1| + 1)$. Посчитав произведение для каждого случая получим сумму Σ: $\Sigma = 1\cdot 9 + 2\cdot 11 +$ $+ 3\cdot 13 + 4\cdot 15 + 5\cdot 17 + 6\cdot 19 + 7\cdot 21 + 8\cdot 23 + 9\cdot 25 + 10\cdot 27 + 11\cdot 25 +$ $+ 12\cdot 23 + 13\cdot 21 + 14\cdot 19 + 15\cdot 17 + 16\cdot 15 + 17\cdot 13 + 16\cdot 11 +$ $+ 15\cdot 9 + 14\cdot 7 + 13\cdot 5 + 12\cdot 3 + 11\cdot 1 = 9(1 + 25 + 15) +$ $+ 11(1 + 2 + 16 + 25) + 13(3 + 5 + 21) + 15(4 + 16 + 17) + 17(5 + 13) +$ $+ 19(6 + 14) + 21\cdot 7 + 23(8 + 12) + 27\cdot 10 + 14\cdot 7 + 12\cdot 3 = 3471$

Также не забудем домножить полученное произведение на два, потому что данный перебор подходит и для точки A, и для точки B $(B(x_1; y_1)$ $A(x_2; y_2))$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{1}{5}$

$\frac{16}{69}$

$\frac{48}{138}$

4) $3x^2+3x+1 = 3x^2-6x+9x+2-1$ $\qquad a = 3x^2-6x+2 \geq 0$

$b = 9x-1$

$3\cdot\frac{1}{81}-\frac{1}{3}+120-24$

$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$

$3x^2+3x+1$

$3\cdot\frac{1}{25}+\frac{3}{5}+120 \; 138$

$3\cdot\frac{1}{81}+\frac{2}{3}+2 \geq 0$

$-\frac{8}{69} \approx -\frac{1}{9}$

$a - 2\sqrt{a^2+ab} + a+b = b^2$

$3\cdot\frac{1}{25}-1{,}2+2 \geq 0$

$4a^2(1-2\sqrt{ab}+ab)$

$b^2-2a-b = -2\sqrt{a^2+ab}$ $\qquad b(b-1) = 2a(1-\sqrt{ab})$

$b^4+\cancel{4a^2}+b^2-4ab^2-2b^3+\cancel{4ab} = \cancel{4a^2}+\cancel{4ab}$

$9x-1\geq 0$

$b^4-2b^3+b^2(1-4a) = 0 \quad | : b^2$

$b^2-2b+(1-4a) = 0$

$b^2-2b+1 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad (b-1)^2 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad b-1 = 2\sqrt{a}$

$9x-2 = 2\sqrt{3x^2-6x+2}$ $\qquad 3x^2-6x+2$

$D = 36-24 = 12$

$x_{12} = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} = 1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$81x^2-36x+4 = 12x^2-24x+8$

$\times\frac{69}{16}$; 414; 69; 1104

$69x^2-12x-4=0 \quad \Rightarrow \quad D = 144+1104 = 1248$

$\times\frac{16}{7}$; 1120

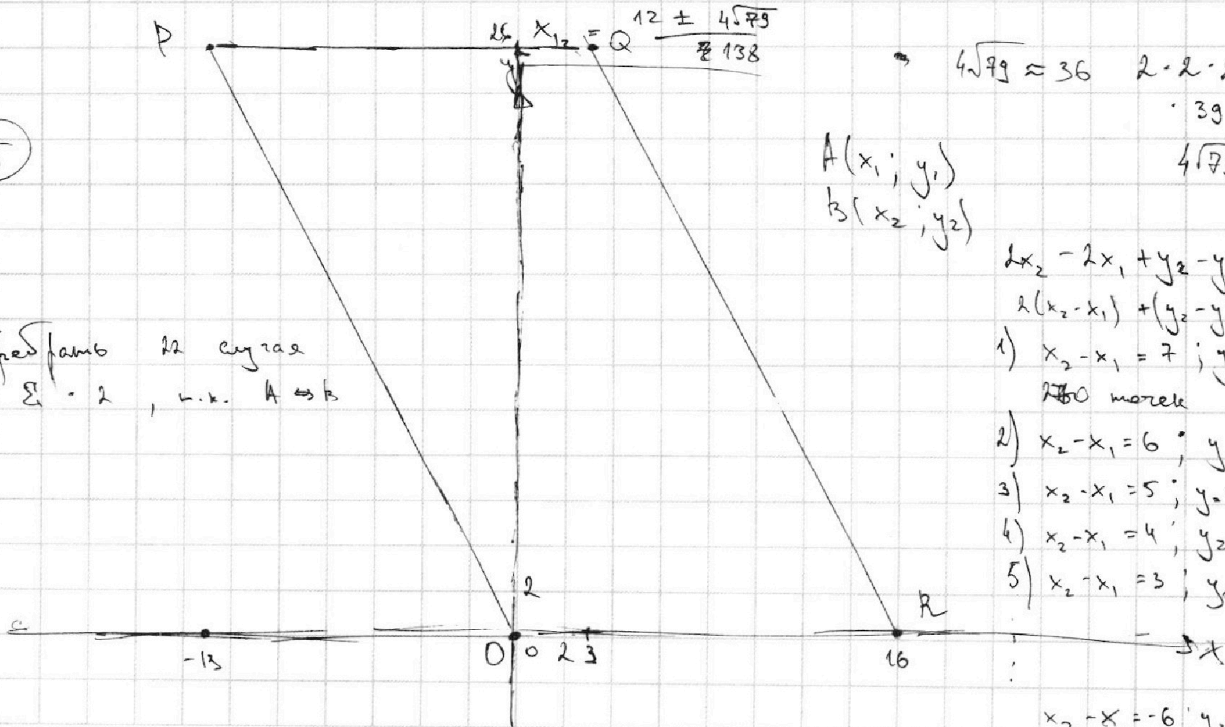
$x_{12} = \frac{12\pm4\sqrt{79}}{138}$

$4\sqrt{79}\approx 36$ $\qquad 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot39$

$4\sqrt{79}$

$\times\frac{14}{14}$; 56; 14; 196

5)



$A(x_1;y_1)$

$B(x_2;y_2)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

Перебрать 22 случая и $\Sigma\cdot2$, т.к. $A\Leftrightarrow B$

1) $x_2-x_1=7$; $y_2=y_1$

280 точек

2) $x_2-x_1=6$; $y_2-y_1=2$

3) $x_2-x_1=5$; $y_2-y_1=4$

4) $x_2-x_1=4$; $y_2-y_1=6$

5) $x_2-x_1=3$; $y_2-y_1=8$

$x_2-x_1=-6$; $y_2-y_1=$

$x_2-x_1=-16$; $y_2-y_1=-18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) $ab: 2^{15}\cdot 7^{11}$; $bc: 2^{17}\cdot 7^{18}$; $ac: 2^{23}\cdot 7^{39}$ $\min(abc)$?

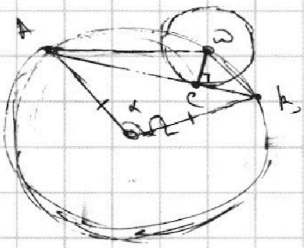
$(abc)^2$:

$2^{55}\cdot 7^{68} = (abc)^2 \Rightarrow abc = 2^{28}\cdot 7^{34}$ – min

(2) $\frac{a}{b}$ – несократима $\max(m)$?

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

(3)



$AC : CB = 17:7$ $r = 7$; $R = 13$

$AB = 24x$ AB?

$OA = OB = 13$ $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha$

(5) $\big(\overset{7}{260} + \overset{16}{9} + \overset{15}{22} + \overset{14}{39} + \overset{13}{60} + \overset{12}{85} + \overset{11}{114}$

$\cancel{2(16 - (x_2-x_1)+1)(26 - (y_2-y_1)) = 14}$ $(16 - (x_2-x_1)+1)(26-(y_2-y_1)+1)$

$\cancel{32 - 2x_2 + 2x_1 + 2 + 26 - y_2 + y_1 = 14}$ $2(x_2-x_1) + (y_2-y_1) = 14$

$60\ 58 + 2(x_1-x_2) + (y_1-y_2) = 14 \Rightarrow \cancel{2(x_1-x_2) + (y_1-y_2)} = -46$

x_2-x_1	y_2-y_1
16	-18
15	-16
14	-14
13	-12
12	-10
11	-8
10	-6
9	-4
8	-2

1 · 9 16 ✓
2 · 11 15 ✓
3 · 15 14 ✓
4 · 15 13 ✓
5 · 17 12 ✓
6 · 19 11 ✓
7 · 21 10 ✓
8 · 23 9 ✓
9 · 25 8 ✓
10 · 27 7 ✓
11 · 25 6 ✓
12 · 23 5 ✓
13 · 23 4 ✓
14 · 19 3 ✓
15 · 17 2 ✓
16 · 15 1 ✓
17 · 13 0 ✓
18 · 11 -1 ✓
19 · 9 -2 ✓
15 · 7 -3
13 · 5 -4 ✓
12 · 3 -5
11 · 1 -6 ✓

$\sum_1 = 9(1 + 25 + 15) + 11(2 + 25 + 1) + 13(3 + 21 + 5) + 15$ (+10)

$+ 15(4 + 17 + 16) + 17(5 + 13) + 19(6 + 14) + 21(7) +$

$+ 23(8 + 12) + 27\cdot 10 + 14\cdot 7 + 12\cdot 3 =$

$17 \times 18 = 136 + 17 = 306$

$= 369 + 473 + 377 + 555 + 306 + 380 + 147 + 460 + 270 +$

$+ 98 + 36 = 850 + 730 + 440 + 380 + 1071 = 3471$

1580 2020 2400

$\sum \cdot 2 = 6942$ пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a - 2\sqrt{a^2 - ab} + a - b = b^2$

$b^2 - 2a + b = \mp 2\sqrt{a^2 - ab}$

$b^4 + \cancel{4a^2} + b^2 - 4ab^2 + b^3 - \cancel{4ab} = \cancel{4a^2} - \cancel{4ab}$

$b^4 + b^3 + b^2(1 - 4a) = 0$

$3x^2 - 6x + 2$

$3 \cdot \frac{1}{64} - 6 \cdot \frac{1}{8} + 2 \geq 0$

$3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \geq 0$

$\sqrt{174} \approx 13$

$x_1 \approx \frac{-24+42}{138} \approx \frac{3}{23} \approx \frac{1}{8}$

$x_2 \approx \frac{-24-42}{138} \approx -\frac{1}{2}$

$\frac{13}{138}$

$24 \times 24 = 96 + 48 = 576$

$69 \times 32 = 138 + 207 = 2208$

$576 + 2208 = 2784$

$\frac{9}{69}$ $\frac{3}{23}$

$\left.\begin{matrix}\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} \\ \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1}\end{matrix}\right\} 0$

$\frac{3}{81} - \frac{2}{3} + 2$?

$\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1$

$2784 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 87$

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 87$

$24^2 = (2^3 \cdot 3)^2 = 2^6 \cdot 3^2$

$69 = 3 \cdot 23$

$32 = 2^5$

2784
1392
696
348
174
87

$\frac{68}{138} = \frac{34}{69}$

$4\sqrt{174}$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$

$a + b \,\vdots\, m$

$(a+b)^2 - 9ab \,\vdots\, m$

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь

$a + b \,\vdots\, m$

$9ab \,\vdots\, m$

на $\max(m)$

$\frac{9a}{b} \,\vdots\, m \Rightarrow \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}$ ~~$9ab = m \cdot k$~~

$9 \cdot 2 \cdot 4 \,\vdots\, 6$

a или b – простое

$(a; b) = 1$

~~$3 + 4 = 7$~~

$4 + 5 \,\vdots\, 9$

$4 \cdot 5 \cdot 9 \,\vdots\, 9$

$9 \cdot a \cdot b = \frac{a \cdot b \cdot 3^2}{m}$ $2+4 \,\vdots\, 6$

$72 \,\vdots\, 6$

$a + b \,\vdots\, m$

$\frac{a}{b} + 1$

$\frac{\frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot 3^2}{m} \Leftrightarrow \frac{b^2 \cdot 3^2}{m}$

$\frac{a}{b} \cdot b + b \,\vdots\, m$

$\Rightarrow m = 3^2$

$m = b^2$ не может быть, т.к. $a + b < b^2$

$m = 3b / 9b$ нет, $a < b$

$b(1 + \frac{a}{b}) \,\vdots\, m$

из того, что дробь несократима $\Rightarrow m = 9$

Пример $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!