



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

числовык

№1

$$\begin{aligned} ab &= k 2^{15} 7^4 \\ bc &= n 2^{17} 7^{18} \\ ca &= m 2^{23} 7^{39} \\ \min(abc) &? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a, b, c &\in \mathbb{N} \\ k, n, m &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\min(abc) = X.$$

нужно ↑

$$\begin{cases} x \geq 2^{23} 7^{39} \\ x \in \mathbb{N} \\ x^2 = k n m 2^{55} 7^{68} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{k n m} 2^{27} 7^{34} \\ \sqrt{k n m} \in \mathbb{N} \\ \sqrt{k n m} 2^{27} 7^{34} \geq 2^{23} 7^{39} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{k n m} 2^{27} 7^{34} \\ \sqrt{k n m} \in \mathbb{N} \\ 2^4 \times \sqrt{k n m} \geq 7^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k n m : 2 \\ \sqrt{k n m} : 7^5 \end{cases} \Rightarrow k n m : 2 \times 7^{10}$$

т.к. мы ищем  $\min(abc)$ , нам нужно  $\min(knm)$

$$\Rightarrow knm = 2 \times 7^{10}$$

$$\text{Тогда } \min(abc) = X = \sqrt{2 \times 2 \times 7^{10}} \times 2^{27} \times 7^{34} = 2^{28} \times 7^{39}$$

пример:

$$\begin{aligned} k=2 & \rightarrow ab = 2^{16} 7^{11} \rightarrow c = 2^{12} 7^{28} \\ n=7^{10} & \rightarrow bc = 2^{17} 7^{28} \rightarrow a = 2^{11} 7^{11} \rightarrow abc = 2^{28} 7^{39} \\ m=1 & \rightarrow ac = 2^{13} 7^{19} \rightarrow b = 2^5 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ } 2^{28} 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧАСОВОИК

№2)

$$\frac{(a+b) : m}{(a+b)^2 - 9ab : m} \rightarrow \frac{(a+b)^2 - 9ab : m}{a+b} : m = a+b - \frac{9ab : m}{a+b} = a+b - 9b + \frac{9b^2}{a+b}$$
$$= a - 8b + 9b \frac{1}{a+b}$$

$a$  не имеет с  $b$  никаких  
общих множителей (кратн 1), т. е.  $\frac{b^2}{a+b}$  - не сократима, но  
 $(a+b)$  может иметь общие множители с  $9$ .

~~Решение~~  $\nabla \text{e max}(m) = 9$ .

Пример:

$$\frac{9}{9^2 - 9 \times 4 \times 5} = \frac{1}{9 - 20} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

числовик

№ 4)  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

3. П.  $a = 3x^2 + 3x + 1$      $b = 1 - 9x$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$   $\rightarrow a \geq 0$   
 $D = 9 - 4 \cdot 1 < 0$   
 $3 > 0 \rightarrow a \geq 0$  всегда при  $\forall x$

$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$  ;  $b + \sqrt{a} \geq 0$

$a+b = b^2 + 2b\sqrt{a}$

$b^2 + b(2\sqrt{a} - b) = 0$

$b = 0 \rightarrow b + 2\sqrt{a} - b = 0$

$1 - 9x = 0$

$x = \frac{1}{9}$

1)  $\frac{1}{9} + \sqrt{a} \geq 0$

2)  $\frac{1}{81} + 3 - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 \geq 0$

$x = \frac{1}{9}$  - корень

$\sqrt{a} = \frac{1-b}{2}$  ;  $\frac{1-b}{2} \geq 0 \rightarrow b \leq 1$

$a = \frac{(1-b)^2}{4}$

$(3x^2 + 3x + 1) \cdot 4 = 81x^2$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$\begin{cases} b + \sqrt{a} \geq 0 \\ b \leq 1 \\ \sqrt{a} = \frac{1-b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b \leq 1 \\ \sqrt{a} = \frac{1-b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-b}{2} \geq -b \\ b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \geq -1 \\ b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 12^2 + 4 \cdot 69 = 4^2 \cdot (3^2 + 69)$

$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3^2+69}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \leq 0 - x = \frac{6-2\sqrt{78}}{69}$  - не корень

$x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \gg \frac{22}{69} \gg \frac{2}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  не корень

Ответ:  $\frac{1}{9}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



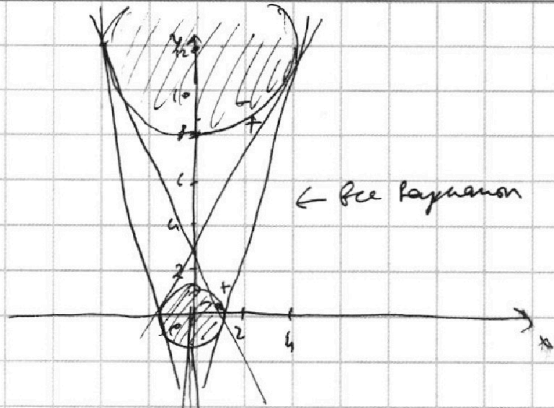
числовик

№1)  $a \neq 0 \exists b$ , всего 2 решения

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

то как упрощать будем, это решаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases}$$



~~то как упрощать будем, это решаем~~  
~~то как упрощать будем, это решаем~~  
~~то как упрощать будем, это решаем~~

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases} \begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (8b - 12 - ax)^2 = 16 \end{cases} \begin{cases} y = 8b - ax \\ x^2(1+a^2) - 16abx + 64b^2 = 1 \\ x^2(1+a^2) - 2(8b-12)ax + (8b-12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 16^2 a^2 b^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 1) \\ D_2 &= 4(8b-12)^2 a^2 - 4(1+a^2)((8b-12)^2 - 16) \end{aligned}$$

варианты  $D_1 = D_2 = 0$   
 ~~$D_1 > 0, D_2 < 0$~~   
 ~~$D_1 < 0, D_2 > 0$~~

$$\begin{aligned} D_1 &= 2^8 a^2 b^2 - 2^8 a^2 b^2 + 4 + 4 \cdot 2^8 b^2 + 4a^2 = 4a^2 - 2^8 b^2 + 4 \\ D_2 &= 2^8 - 4(8b-12)^2 + 2^6 a^2 \end{aligned}$$

~~$$\begin{aligned} 1) \quad 4a^2 - 2^8 b^2 + 4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{2^8 b^2 - 4}{4} \\ 2^6 - 4(8b-12)^2 + 2^4(2^8 b^2 - 4) &= 0 \\ 2^4 - (8b-12)^2 + 2^2(2^8 b^2 - 4) &= 0 \\ (2^8 b^2)^2 + 144 - 24 \cdot 8b - 2^4 + 2^4 - 2^{10} b^2 &= 0 \\ 2^{16} b^2 - 2^{10} b - 2^6 \cdot 3b + 144 &= 0 \\ D = (2^{10} + 2^6 \cdot 3)^2 - 4 \cdot 2^{16} \cdot (2^4 \cdot 3^2) &\leq 0 \Rightarrow \\ a \in \emptyset \quad b \in \emptyset & \end{aligned}$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Черновик~~ черовик

11)

$$ab : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} 7^{14}$$

$$ca : 2^{23} 7^{29}$$

~~т.к. надо найти  $\min(a,b,c)$ , то надо найти  $\min(k,m,n)$ ,  
учитывая что  $abc \in \mathbb{N}$ , или применение  $\mathbb{N}$  инт.~~

$$\Rightarrow abc = \sqrt{2 \times 2^{15} \times 7^{23}} = 2^{28} 7^{34}$$

$$\begin{matrix} 14 & 14 & 0 \\ 10 & 14 & 0 \end{matrix}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} 7^{68}$$

$$k, m, n \in \mathbb{N} \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

$$ab = k \times 2^{11} 7^4$$

$$bc = n \times 2^{17} 7^{14}$$

$$ca = m \times 2^{23} 7^{29}$$

$$\Rightarrow abc^2 = k m n 2^{55} 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{k m n 2^{55} 7^{68}}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$a = 1 - 9x \quad t \geq 0 \quad t + 9 \geq 0$$

$$t = 3x^2 + 3x$$

$$\sqrt{t+a} - \sqrt{t} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{t+a+1}$$

$$\frac{\sqrt{t+16}}{69} = \frac{22}{69} \quad \frac{22}{69}$$

$$\sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$2\sqrt{t+a} - 2\sqrt{t^2+a^2} = a^2$$

$$t+a = (a+\sqrt{t})^2 = a^2 + 2a\sqrt{t} + t$$

$$a^2 + 2a\sqrt{t} - a = 0$$

$$a = 0 \quad a + 2\sqrt{t} - 1 = 0$$

$$2\sqrt{t} = 1 - a \quad \frac{1-a}{2} \geq 0$$

$$t = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \quad \frac{1-1+9x}{2} \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{(1+9x+1)^2}{4}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 9x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 69 = 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 3 \cdot 22$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 69}}{2 \cdot 69}$$

$$\begin{matrix} 1-9x \leq 1 & 9x \geq 0 & x \geq 0 \\ (1-9x) \geq -1 & -9x \geq -2 & x \leq \frac{2}{9} \end{matrix}$$

$$1-6 \geq 0$$

$$b \leq 2$$

$$8 \leq 9x \leq 9^2$$

$$\begin{cases} b \leq 1 \\ b + 9a \geq 0 \\ 9a = \frac{1-b}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1-b}{2} \geq -b$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{-b}{2}$$

$$1 \geq -b$$

$$b \geq -1$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 69}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm \sqrt{243}}{138}$$

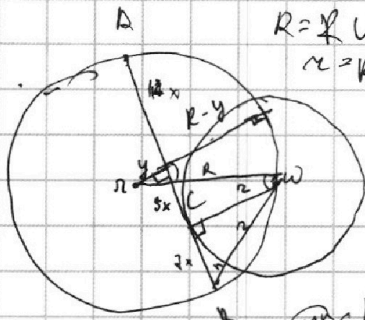
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$R = W = 7$   
 $r = R = 13$

AB-?

$\frac{9b^2}{a+b} - \text{ант. } \frac{9ab}{a+b}$

$BC:AC = 7:17$

$\frac{a+b}{9b^2} = \frac{9}{9b^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{k}{n}$

$12^2 x^2 = 0 \dots k \times \frac{1}{3} (R - 0) \dots y(R-y)(y+R)$

$y^2 - yR + 12^2 x^2 = 0 \quad a = mk - \frac{mk}{3} R^2 - y^2$

$x = R^2 - 12^2 x^2 = 4 \dots y = \sqrt{R^2 - 12^2 x^2}$

$y = \frac{R}{2} \pm \sqrt{k^2 - 24^2 x^2}$

$a - 1 \Rightarrow b; 2 \text{ пар}$   
 $ax + y - 9b = 0$

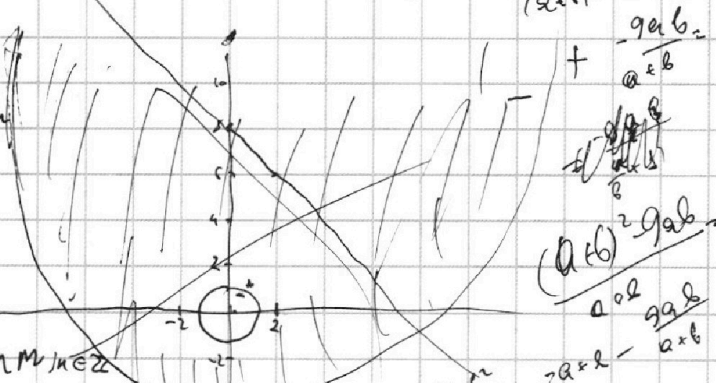
$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) = 0$

$y = 9b - ax$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 24y + 16x^2) \leq 0$

$12^2 + 49x^2 = (2+n)^2$

$(1 + \frac{a}{b})b = m$   
 $b^2 (\frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b} + 1) = m^2$   
 $24 \cdot 12^2 = 15 \cdot 8$   
 $y = \frac{24 \cdot 12^2}{15}$   
 $9ab + 9b^2 - 9a^2 = 9b(a+b) - 9a^2$



$y = 9b - ax$   
 $x^2 + 9a^2 x^2 - 16bax + a^2 x^2 = 1$

$x^2(1+a^2) - 16bax + (9b^2 - 1) = 0$

$4^2 b^2 a^2 - 4 \times 4^2 b^2 + 4 = 4^2 a^2 b^2 + 4a^2 \geq 0$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$9ab - \frac{9ab^2}{a+b} - y^2 + (y-12)^2 = 95$   
 $\frac{9}{b} - \frac{9b}{a+b} - 24y + 12 = 15$   
 $y = \frac{12^2 \cdot 15}{24} = \frac{144 \cdot 15}{24} = \frac{288 \cdot 5}{8} = 180$

$4a^2 - 4^2 b^2 + 4 \geq 0 \quad a^2 - 4^2 b^2 + 1 \geq 0$   
 $\frac{2+3}{2^2 - 7 \cdot 2 + 1 + 3^2} = \frac{(\frac{2}{3} + 1) \cdot 3}{8^2 (\frac{2}{3} - 7 \cdot \frac{2}{3} + 1)}$   
 $\frac{3+5}{3^2 - 2 \cdot 3 + 5 + 5^2} = \frac{8}{34 - 105} = \frac{8}{-71}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab : 2^{15} 7^4 \text{ км(abc) - ?}$$

$$bc : 2^{12} 7^{10}$$

$$ac : 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = k 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = n 2^{12} 7^{10}$$

$$ac = m 2^{23} 7^{39}$$

$$abc = \sqrt{k n m} 2^{55} 7^{68}$$

$$2abc = 2^{56} 7^{68}$$

$$22 + 39 = 61$$

$$-9x + 2 = 5x + 1$$

$$-9x + 1 = 0$$

$$(abc)^2 = 2^{55} 7^{68}$$

$$2(abc)^2 = 2^{56} 7^{68}$$

$$abc = 1$$

$$2abc = 2^{20} 7^{34}$$

$$abc = 2^{20} 7^{34}$$

пусть

$$k = 2^{10}$$

$$n = 7$$

$$m = 7^{11}$$

$$a = 2^9 7^{24}$$

$$b = 2^{25} 7^{11}$$

$$c = 2^{15} 7^{28}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{12} 7^{10}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$c = \frac{x}{2^{15} 7^{11}}$$

$$ac = a \frac{x}{2^{15} 7^{11}} = 2^{24} 7^{39}$$

$$ax = 2^{39} 7^{50}$$

$$ab = 2^6 7^{11}$$

$$bc = 7^{28} 2^{12}$$

$$ac = 2^{11} 7^{39}$$

$$\frac{9}{9^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{9(9-20)}$$

$$ab = 7^4$$

$$bc = 7^{10}$$

$$ac = 7^{39}$$

$$ab^2 = km$$

$$a+b = nm$$

$$\frac{ab^2}{a+b} = \frac{km}{nm} = \frac{k}{n}$$

$$c = \frac{1}{2^{15} 7^{11}} \cdot \frac{1}{2^{24} 7^{39}} = \frac{1}{2^{39} 7^{50}}$$

$$a = 2^{11} 7^{11}$$

$$b = 2^5 7^{11}$$

$$c = 2^{28} 7^{28}$$

$$abc = 7^{34}$$

$$ac = 7^{39}$$

$$b = 7^5$$

$$a = 7^{16}$$

$$c = 7^{28}$$

$$b = \frac{x}{2^{25} 7^{39}}$$

$$a = \frac{x}{2^{12} 7^{18}}$$

$$c = \frac{x}{m 2^{11} 7^{11}}$$

$$\begin{cases} x \geq 2^{23} 7^{39} \\ x^3 \\ 2^{55} 7^{68} km \\ x \in \mathbb{N} \end{cases} = x$$

$$x^2 = 2^{55} 7^{68} km$$

$$x = \sqrt{2 km}$$

$$\sqrt{2 km} \cdot 7^{11} 2^{28} \geq 2^{23} 7^{39}$$

$$\sqrt{2 km} \geq 7^5$$

$$\sqrt{2 km} \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{2 km} \geq 7^{5/2}$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{4+5}{(4+5) \cdot 9 \cdot 10}$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$\frac{x}{(x-15k)(x-13k)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} - 1$$

$$\frac{(a+b)}{b} = \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{a+b}{ab} < \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{ab} > \frac{a}{b}$$



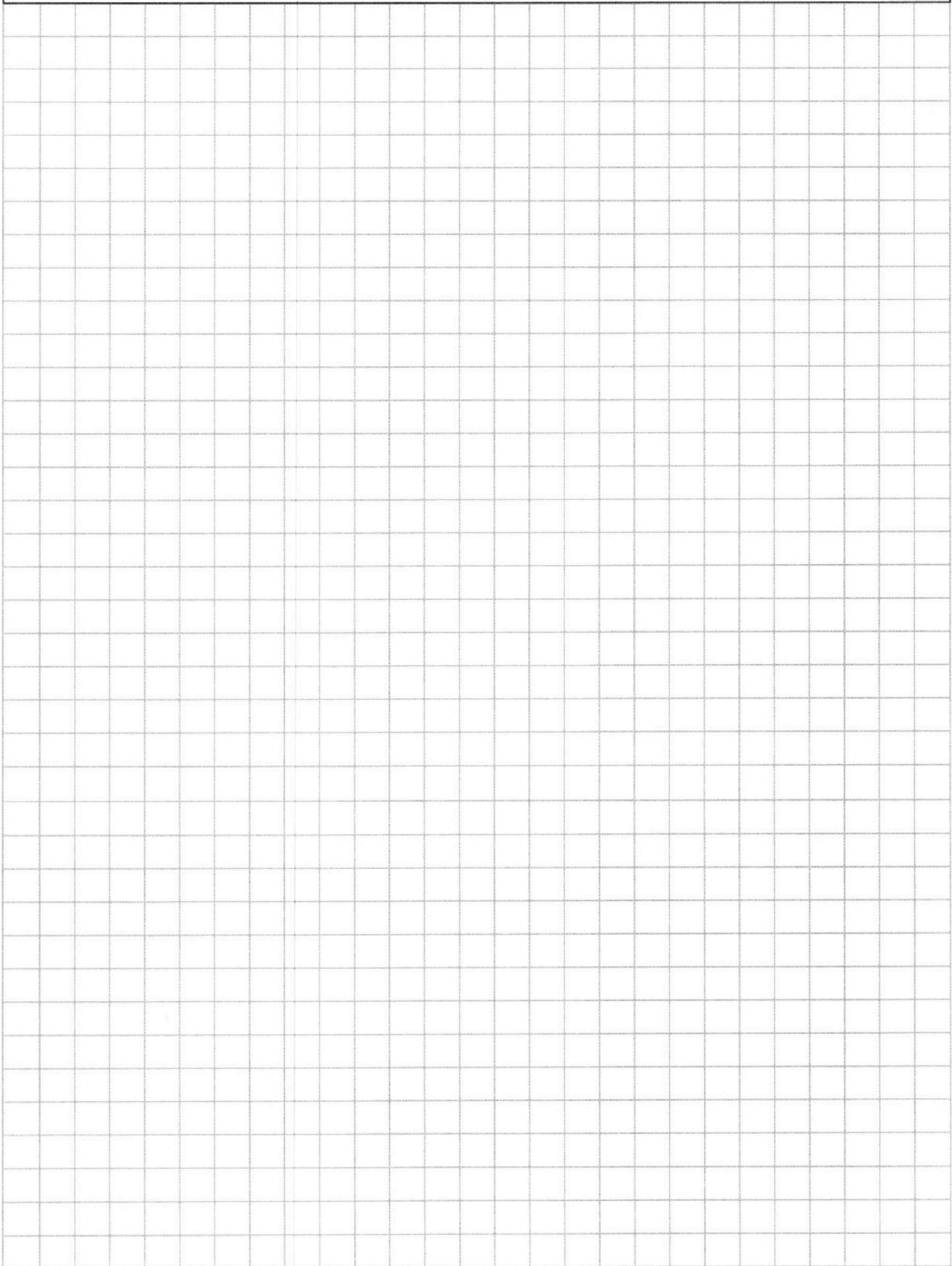
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

