



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2.) [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3.) [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6.) [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1  
 $ab : 2^{15} 7^{11} \Rightarrow$  можно представить  $ab$  как  $2^{15} 7^{11} k$  (итд  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $k$  тоже  $\text{н.ч.}$ )  
 аналогично тк  $bc : 2^{17} 7^{18} \Rightarrow bc = 2^{17} \cdot 7^{18} m$ ;  $ac : 2^{23} 7^{39} \Rightarrow ac = 2^{23} 7^{39} n$   
 $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} k \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} m \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} n = 2^{55} \cdot 7^{68} kmn$  ( $n$ -н.ч.)  
 $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} kmn$  ( $m$ -н.ч.)

натуральное натуральное  $\Rightarrow$  ищем корни  
 $abc = \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68} \cdot kmn}$   
 $abc = 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{2kmn}$   
 н.ч. н.ч.  $\Rightarrow$  н.ч.

$\sqrt{2kmn}$  - н.ч.  $\Rightarrow 2kmn$  - квадрат н.ч. числа  $\Rightarrow$  ~~н.ч.~~ одно из чисел  $k, m, n$  кратно 2

~~Значит, произведем  $2kmn$  наименьшее (при  $k, m, n$  н.ч.) равно  $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$   
 $\Rightarrow abc = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2} = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Пример:  
 $a = 2^7 \cdot 7^7$   $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $b = 2^{15} \cdot 7^4$   $bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $c = 2^{21} \cdot 7^{32}$   $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

~~Пример:  
 Заметим, что  $ab \cdot bc = 2^{15} \cdot 7^{11} k \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} m = 2^{32} \cdot 7^{29} km$   
 $ac \cdot b^2 = 2^{32} \cdot 7^{39} km$  при этом  $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} n$   
 $2^{23} \cdot 7^{39} n \cdot b^2 = 2^{32} \cdot 7^{29} km$   
 $n b^2 = 2^9 km$   
 $\frac{7^{10}}{7^{10}} \Rightarrow km : 7^{10}$~~

$\Rightarrow kmn : 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$  ищем наименьшее при н.ч. числах:  $2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$   
 наименьшее значение  $abc = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7^{10}} = 2^{28} \cdot 7^{35}$

Пример:  
 $a = 2^{10} \cdot 7^{21}$   
 $b = 2^5$   
 $c = 2^{13} \cdot 7^{18}$  Тогда  $ab = 2^{15} \cdot 7^{21} = 7^{10} \cdot (2^{15} \cdot 7^{11}) : (2^{15} \cdot 7^{11})$   
 $bc = 2^{18} \cdot 7^{18} = (2^{17} \cdot 7^{18}) \cdot 2 : (2^{17} \cdot 7^{18})$   
 $ac = 2^{10} \cdot 7^{21} \cdot 2^{13} \cdot 7^{18} = 2^{23} \cdot 7^{39} : (2^{23} \cdot 7^{39})$   
 и  $abc = 2^{10} \cdot 7^{21} \cdot 2^5 \cdot 2^{13} \cdot 7^{18} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

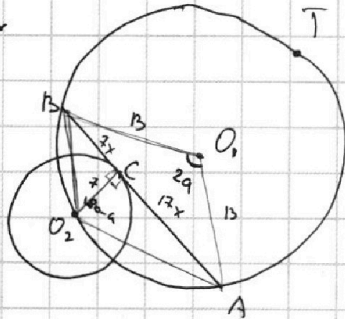
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тк  $BC:AC = 7:17$

то обозначим  $BC = 7x$

и  $AC = 17x$



Обозначим  $\angle AOB = 2\alpha$

тогда  $\angle AOB = 2\alpha$  (тк  $\angle AOB$  - центр)

$\Rightarrow \cup AOB$

$\Rightarrow \cup AB = 360 - 2\alpha$

$\angle BO_2A = \frac{1}{2} \cup AOB$  (как впис.)

$\angle BO_2A = \frac{360 - 2\alpha}{2} = 180 - \alpha$

По т косинусов в  $\triangle AOB$

$$AB^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 2\alpha = 169(2 - 2\cos 2\alpha)$$

( $BO_1 = AO_1 = R = 13$ )  $= 338(1 - \cos 2\alpha)$

т косинусов в  $\triangle AO_2B$

$$AB^2 = BO_2^2 + AO_2^2 - 2 \cdot BO_2 \cdot AO_2 \cdot \cos(180 - \alpha)$$

по т Пифагора в  $\triangle BCO_2$  и  $\triangle ACO_2$

$$BO_2^2 = 49 + 49x^2$$

$$AO_2^2 = 49 + 289x^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 49 + 49x^2 + 49 + 289x^2 - 2 \cdot \sqrt{49(1+x^2)} \cdot \sqrt{49 + 289x^2} \cdot \cos(180 - \alpha)$$

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$AB^2 = 338(1 - \cos 2\alpha)$$

~~$$(7x + 17x)^2 = 338(1 - 2\cos^2 \alpha + 1)$$~~

~~$$AB^2 = 338(1 - 1 + 2\sin^2 \alpha)$$~~

~~$$AB^2 = 676$$~~

$$AB^2 = 338(2 - 2\cos^2 \alpha)$$

$$AB^2 = 676(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$(7x + 17x)^2 = 676(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$(24x)^2 = 676(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$576x^2 = 676 - 676\cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \frac{576}{676} x^2$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \frac{144}{169} x^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} x^2$$

$$\cos \alpha \geq 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169} x^2}$$

~~по т синусов  $AB = 2 \cdot R \cdot \sin(\angle AO_2B)$~~   
 ~~$AB = 26 \cdot \sin(180 - \alpha)$~~   
 ~~$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$~~   
 ~~$AB = 26 \cdot \sin \alpha$~~   
 тк  $\angle BO_2A$  остр на хорде  $< 80^\circ$   
 то  $2\alpha < 180^\circ$  и  $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0$

$$AB^2 = 98 + 329x^2 - 14\sqrt{(1-x^2)} \cdot \sqrt{49 + 289x^2} \cdot (-\cos \alpha)$$

$$(24x)^2 = 98 + 329x^2 + 14\sqrt{(1-x^2)} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Одзначим  $a = 3x^2 + 3x + 1$

$b = 1 - 9x$

Тогда  $a + b = 3x^2 - 6x + 2$

Подставим в уравнение

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = 6$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + 6$

$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$  при  $b=0$   $1-9x=0$   $9x=1$

$b = b(6 + 2\sqrt{a}) \quad | :b$

$1 = 6 + 2\sqrt{a}$

$2\sqrt{a} = 1 - 6$

$4a = 1 - 2b + b^2$  Обратная замена

$4(3x^2 + 3x + 1) = 1 - 2(1 - 9x) + (1 - 9x)^2$

$12x^2 + 12x + 4 = 1 - 2 + 18x + 1 - 18x + 81x^2$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D_1 = 36 + 69 \cdot 4 = 36 + 276 = 312 = 4 \cdot 78$

$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$

~~$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} = \frac{6}{69} + \frac{2\sqrt{78}}{69}$~~

~~$\frac{2\sqrt{78}}{69} < \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{\sqrt{361}}{69}$~~

~~$\frac{16}{69} < \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{19}{69} < \frac{17}{69} < \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{18}{69}$~~

~~$\frac{2 + \sqrt{312}}{39} < \frac{19}{69}$~~

~~$\frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{6}{69} + \frac{17}{69} = \frac{23}{69} < \frac{29}{69} < \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{18}{69}$~~

~~$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} = \frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{17}{69} < \frac{29}{69} < \frac{18}{69}$~~

$(\frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69}) - (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{312}}{69} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{63}{69} = \frac{\sqrt{312}}{69} + \frac{29\sqrt{3}}{69} - \frac{63}{69} > \frac{17}{69} + \frac{29 \cdot 1,7}{69}$

$-\frac{63}{69} = \frac{17 + 49,3 - 63}{69} = \frac{66,3 - 63}{69} = \frac{3,3}{69} > 0 \Rightarrow \frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} > 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{6}{69} - \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{6}{69} - \frac{17}{69} = -\frac{11}{69} < 0 < 1 - \frac{3}{3} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{6 + 18}{69} = \frac{24}{69} < 1$

$\Rightarrow \frac{6}{69} - \frac{\sqrt{312}}{69} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$  не выполняется по ОДЗ  $\Rightarrow \frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Отв.  $\frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

ОДЗ

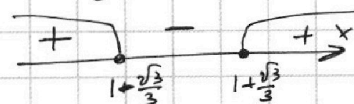
$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$D = 9 - 12 = -3 < 0 \Rightarrow > 0$  по методу

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$D_1 = 36 - 24 = 12$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$



знаки выписаны

корень по ОДЗ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{EK} = \frac{2\sqrt{1,19}}{2,4} \quad EK = \frac{1,2}{\sqrt{1,19}} \quad \operatorname{tg} \angle EKA = \frac{EC}{EK} = \frac{1,2}{\frac{1,2}{\sqrt{1,19}}} = \frac{2\sqrt{1,19}}{1,19}$$

~~tg AKT~~  
угловой коэф прямая (-a) равен  $\operatorname{tg} \angle AKT = -\operatorname{tg}(180^\circ - \angle AKT) = -\operatorname{tg} \angle EKA = -\frac{2\sqrt{1,19}}{1,19}$

$$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{1,19}}{1,19}$$

Для второй касательной  $A'D'$  проведем ~~касательную~~ ~~касательную~~ ~~касательную~~ ~~касательную~~  
( $BA'C' \cap ED'C'$ ), ~~касательная~~  $C'D'E' \sim C'E'K$  и ~~касательная~~  $\operatorname{tg} \angle A'K'E' = \frac{2\sqrt{1,19}}{1,19}$

$C'$  совм с  $C$  тк  
и  $BC$  и  $BC'$  окажутся  
равными

$$\operatorname{tg} \angle A'K'E' = \frac{2\sqrt{1,19}}{1,19} \Rightarrow (-a) = \frac{2\sqrt{1,19}}{1,19}$$

~~касательная~~  $\operatorname{tg} \angle A'K'E' = \frac{2\sqrt{1,19}}{1,19}$  ;  $\operatorname{tg} \angle A'K'E' = \frac{2\sqrt{1,19}}{1,19}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$ax + y - 8b = 0$  можно записать:  $y = -ax + 8b$  - уравнение прямой

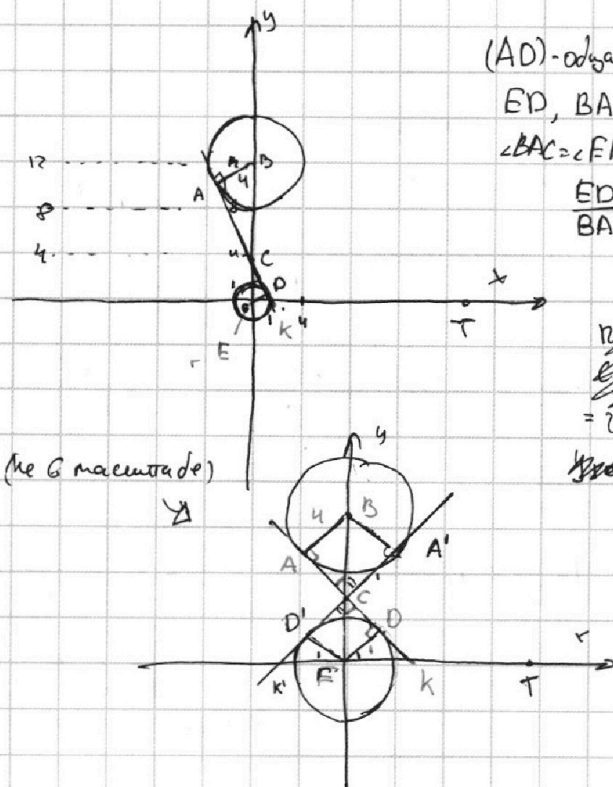
Заметим, что  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  - уравн. окр-ти с центром  $(0; 0)$  и радиусом 1  
 $\Rightarrow$  если  $x^2 + y^2 - 1 > 0$  то точка с коорд  $(x; y)$  лежит вне окр-ти, а если  $x^2 + y^2 - 1 < 0$  то внутри или

Аналогично  $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$  уравн. окр-ти с центром  $(0; 12)$  и радиусом 4

Рассмотрим данное уравнение  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$\leq 0$  это может быть когда одна из скобок  $> 0$ , а другая  $< 0$  или когда сумма в одной из скобок равна 0

$\Rightarrow$  Если ~~прямая~~ система имеет 2 решения то прямая пересекается с данными окружностями или областями внутри окружности в двух точках  
 Если прямая пересекает окр-ть то она имеет с ней 2 общие точки и еще бесконечное множество других точек с областью внутри, и  $\Rightarrow$  тогда система имеет беск. много решений  $\Rightarrow$  прямая  $y = -ax + 8b$  не может касаться их, то имеет с каждой из ~~двух~~ ~~окр-тей~~ по 2 общие точки, и тк решений ровно 2, то она касается сразу двух окр-тей  $\Rightarrow$  данная прямая есть их общая касательная.



(AD) - общая касат. окр-тей с центрами в  $A$  и  $B$   
 $ED, BA$  радиусы  $\perp$  касательной  
 $\angle BAC = \angle FDC = 90^\circ$ ;  $\angle ACB = \angle DCE$  (верт)  $\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle EDC$   
 по 2 угла  
 $\frac{ED}{BA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{1}{4}$   
 $EC + BC = 12 \Rightarrow$

$BC \downarrow$   
 $12 = 5EC$   
 $EC = \frac{12}{5} = 2,4$   
 $BC = 9,6$

~~По теореме~~  
 $EC = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$   
 $= \sqrt{6,76} = 2,6$

~~По теореме~~  
 $\angle ECK = \angle DCE$   
 $\angle CDE = \angle CEK = 90^\circ \Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CEK$   
 $\Rightarrow \frac{ED}{CE} = \frac{CE}{EK}$   
 $\frac{ED}{EK} = \frac{CE}{CE}$

~~По теореме~~  
 $CE = \sqrt{24^2 - 1} = \sqrt{576 - 1}$   
 $= \sqrt{575} = 23,98$   
 $2\sqrt{1,15} = 2,4$   
 $EK =$  По теореме  
 $CD = \sqrt{24^2 - 1} = \sqrt{576 - 1} = 23,98$   
 $= 2\sqrt{1,15}$



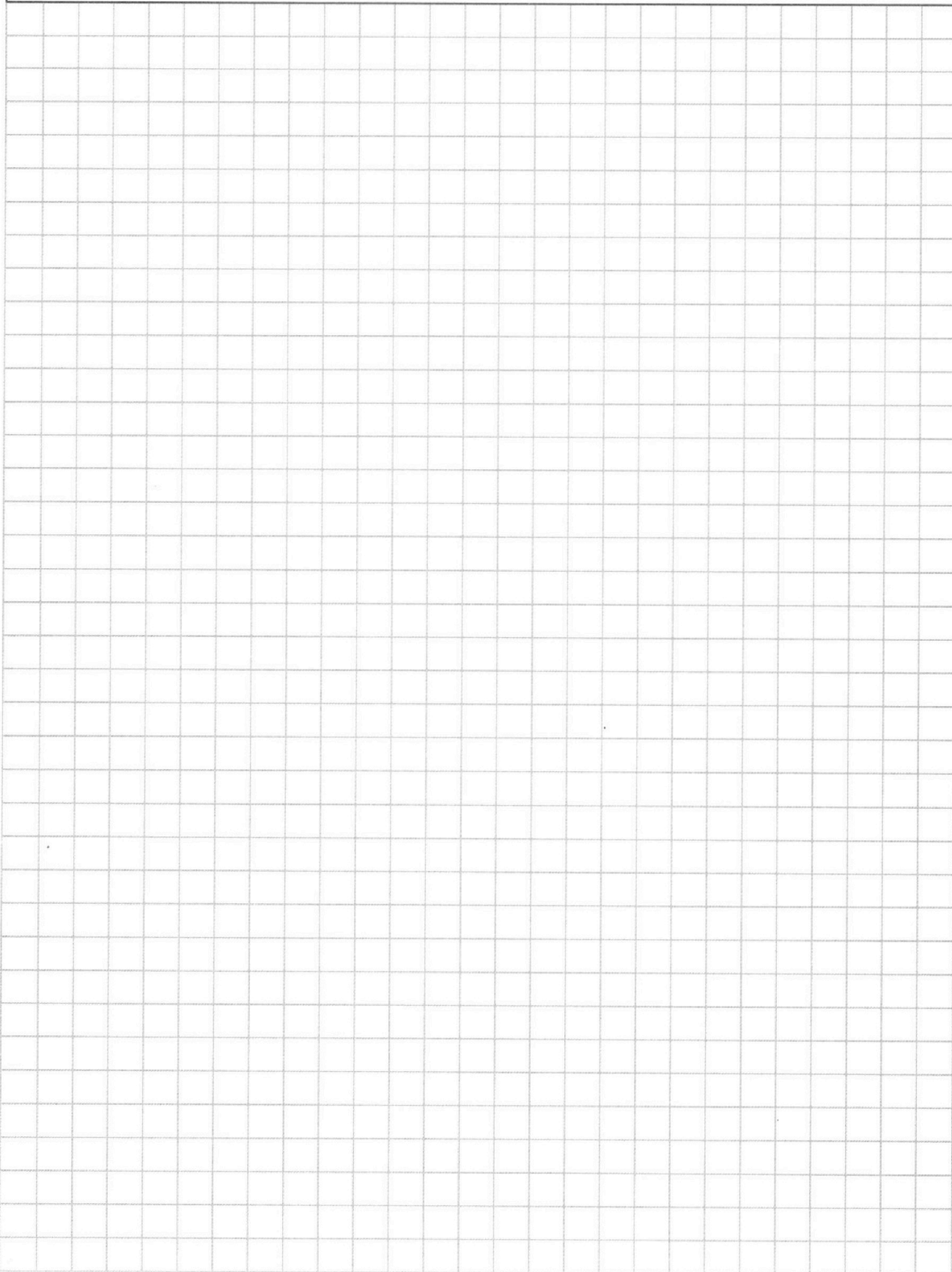
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

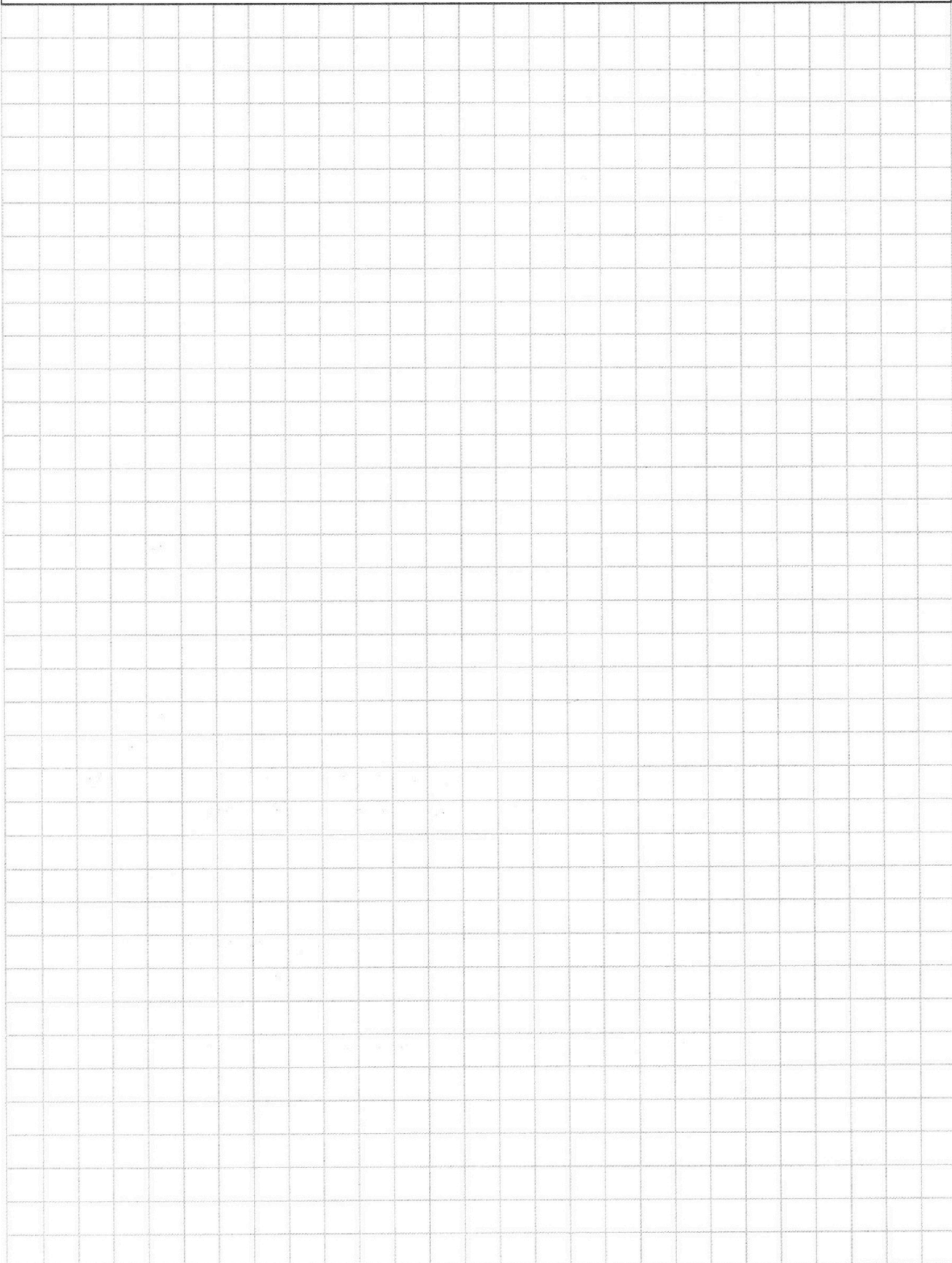
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &= 30 \\ a_2 + c_2 &= 23 \\ b_2 + c_2 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 + b_7 &= 22 \\ a_7 + c_7 &= 39 \\ b_7 + c_7 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &= 15 \\ a_2 + c_2 &= 23 \\ b_2 + c_2 &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(a_2 + b_2 + c_2) &= 70 \\ a_2 + b_2 + c_2 &= 35 \\ c_2 &= 5; a_2 = 18; b_2 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &= 15 \\ b_2 + c_2 &= 18 \\ a_2 + c_2 &= 23 \\ \frac{56}{2} &= 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 + b_7 &= 21 \\ b_7 + c_7 &= 18 \\ a_7 + c_7 &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 + b_7 &= 11 \\ a_7 + c_7 &= 39 \\ b_7 + c_7 &= 36 \\ a_7 + b_7 + c_7 &= 86 = 43 \\ b_7 &= 4 \\ a_7 &= 7 \\ c_7 &= 32 \end{aligned}$$

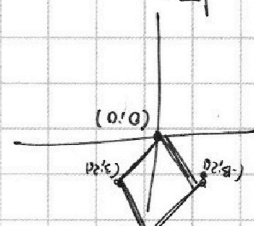
$$\begin{aligned} b_2 &= 5 \\ a_2 &= 10 \\ c_2 &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_7 &= 0 \\ a_7 &= 21 \\ c_7 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 + b_7 &= 21 \\ b_7 + c_7 &= 18 \\ c_7 + a_7 &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 + b_7 &= 21 \\ b_7 + c_7 &= 18 \\ c_7 + a_7 &= 35 \end{aligned}$$

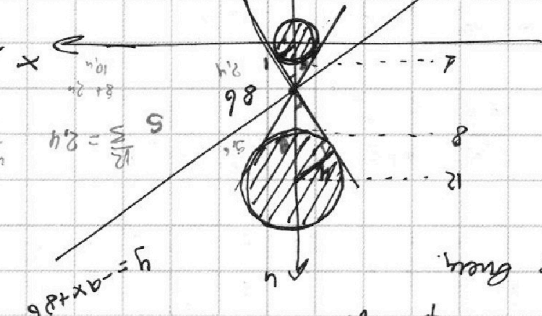
$$2(x^2 - x^2) + (y^2 - y^2) = 14$$



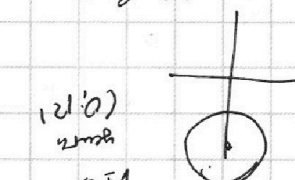
$$\begin{aligned} (a+1-9x)a &= 39x^2 \\ a^2 + a - 9ax &= 39x^2 \end{aligned}$$

$$3. 364 - 78$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-2)^2 - 16) \leq 0$$



$$\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 8 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 + (y-2)^2 &= 16 \\ (x^2 + (y-2)^2 - 16) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 & \times \\ 17 & \times \\ \hline 289 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29 & \times \\ 29 & \times \\ \hline 841 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 & \times \\ 17 & \times \\ \hline 289 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -ax + 86 \\ (x^2 + y^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$~~

$$D_1 = 9 - 6 = 3$$

~~$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$~~

$$x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$3x^2 - 6x + 7 - 3x^2 - 3x - 1 + 2\sqrt{49x + 49} = 2x$$

~~$$AB = 2 \cdot R \cdot \sin(\alpha)$$~~

$$AB = 2 \cdot R$$



$$4(9 + 6) = 78$$

$$39$$

$$78$$

$$312 \begin{array}{r} 13 \\ - 3 \\ \hline 1104 \\ 52 \\ \hline 25 \end{array}$$

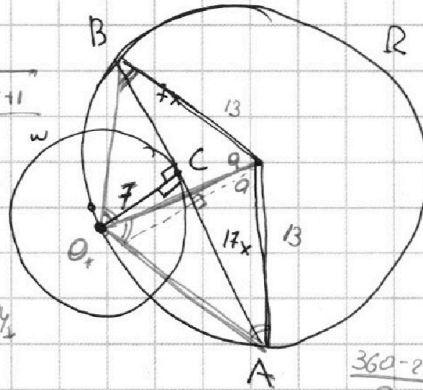
$$OB = 7\sqrt{x+1}$$

$$OA = \sqrt{49 + 289x^2}$$

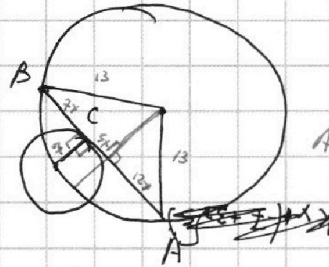
$\cos \tau \cos$      $16 \pm 33e$

$$AB^2 = 338 - 2 \cdot 169 \cos 2\alpha$$

$$AB^2 = 49 + (7x)^2 + 49 + 49x^2 - 2\sqrt{(49x + 49)(49x + 49x^2)} \cdot \cos(180 - \alpha)$$



$$\frac{360 - 2\alpha}{2} = 180 - \alpha$$



$$\alpha = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$AB = 2 \cdot R \cdot \sin(\alpha)$$

$$0 = \sqrt{-5x^2 + x} \pm \sqrt{-x}$$

$$k(x-1) = -x + 3x\sqrt{5} - 1 = 0$$

$$k+1 = kx - 3x\sqrt{5}$$

$$k+1 = (k-3\sqrt{5})x$$

~~$$D = (49 + 49x^2 - 212x - 49x^2) \cdot \max$$~~

$$D = (49 + 49x^2 - 212x - 49x^2) \cdot \max$$

$$D = (49 + 49x^2 - 212x - 49x^2) \cdot \max$$

$$\frac{(k+1) \cdot 9}{(k+1)} = \frac{9 \cdot (k+1) \cdot (k-3\sqrt{5})}{9 \cdot (k+1)} = \frac{9 \cdot (k-3\sqrt{5})}{9} = k - 3\sqrt{5}$$

$$9 +$$

$$9k = 0$$

$$k = \frac{9}{9}$$

$$\frac{(k+1) \cdot 9}{9} = \frac{9 \cdot (k+1) \cdot (k-3\sqrt{5})}{9 \cdot (k+1)} = \frac{9 \cdot (k-3\sqrt{5})}{9} = k - 3\sqrt{5}$$

$$k - 3\sqrt{5} = k - 3\sqrt{5}$$

$$D = 49 - 49 = 0$$

$$k = \frac{9}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



|                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Обозначим

$$a = 3x^2 + 3x + 1$$

$$b = 1 - 9x$$

$$\text{Тогда } a + b = 3x^2 - 6x + 2$$

Подставим в уравн.

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a + b = a + b^2 + 2b\sqrt{a} \quad b=0 - \text{решение} \quad 1 - 9x = 0$$

$$2b\sqrt{a} = b^2 \quad | : b \neq 0 \quad 9x = 1$$

$$2\sqrt{a} = 1 - b$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

обратная подстановка