МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ \left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Пусть $a = 2^{x_a}\cdot 7^{y_a}\cdot d_a$, $b = 2^{x_b}\cdot 7^{y_b}\cdot d_b$, $c = 2^{x_c}\cdot 7^{y_c}\cdot d_c$, где $x_{a,b,c}, y_{a,b,c} \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $d_{a,b,c}\in\mathbb{N}$: $d_{a,b,c}\perp 2,7$. Имеем:

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 15 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ x_c + x_a \geq 23 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{x_a + x_b + x_c}^{x_s} \geq \frac{1}{2}(15+17+23) = 27{,}5 \Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq \overset{28}{\cancel{28}},$$ т.к. $x_{a,b,c}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и 2-простое

$$\begin{cases} y_a + y_b \geq 11 \\ y_b + y_c \geq 18 \\ y_c + y_a \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{y_a + y_b + y_c}^{y_s} \geq \frac{1}{2}(11+18+39) = 34.$$ Но поскольку $\begin{cases} y_b \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ y_c + y_a \geq 39 \end{cases}$, $y_s \geq 39$.

$$abc = 2^{x_s}\cdot 7^{y_s}\cdot d_a\cdot d_b\cdot d_c \geq 2^{x_s}\cdot 7^{y_s} \geq 2^{28}\cdot 7^{39}$$ (т.к. $d_{a,b,c}\in\mathbb{N}$)

Пусть $a = 2^{11}\cdot 7^{16}$, $b = 2^{5}\cdot 7^{0}$, $c = 2^{12}\cdot 7^{\cancel{28}23}$. Тогда $ab = 2^{16}\cdot 7^{16} \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$, $bc = 2^{17}\cdot 7^{\overset{23}{\cancel{28}}} \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$, $ca = 2^{23}\cdot 7^{39} \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$. При этом $abc = 2^{28}\cdot 7^{39}$ – наименьшее возможное значение достигается.

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

Имеем:

$$\begin{cases} a+b \vdots m \\ a^2-7ab+b^2=(a+b)^2-9ab \vdots m \\ m,a,b\in\mathbb{N} \\ a\perp b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m,a,b\in\mathbb{N} \\ a+b \vdots m \\ 9ab \vdots m \\ a\perp b \end{cases}$$

. Поскольку $\begin{cases} a\perp b \\ a+b \vdots m \end{cases}$, $a,b\perp m$: a и b не могут одновременно иметь общий делитель >1 с m, т.к. тогда $a \not\perp b$. Предположим НУО a и m имеют общий делитель d с m. Тогда $a\perp b \Rightarrow b\perp d \Rightarrow a+b\perp d \Rightarrow a+b\perp m$, противоречие. Итак, $a,b\perp m$.

$$\begin{cases} m,a,b\in\mathbb{N} \\ a+b \vdots m \\ a,b\perp m \\ 9ab \vdots m \\ a\perp b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m,a,b\in\mathbb{N} \\ a+b \vdots m \\ a,b\perp m \\ 9 \vdots m \\ a\perp b \end{cases} \Rightarrow m\leq 9.$$

Пусть $a=4$, $b=5$, $m=9$. Тогда $a,b,m\in\mathbb{N}$; $a+b=9 \vdots m=9$; $a^2-7ab+b^2=16-140+25=-99 \vdots m=9$; $a\perp b$. Наибольшее возможное значение m достигается.

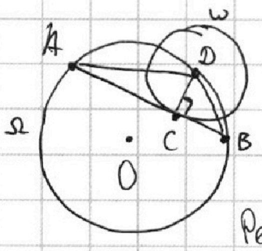
Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



$AC : CB = \frac{17}{7}$

$R_\omega = 7 = DC = r$

$R_\Omega = 13 = OA = OD = OB = R$

$AB = ?$

Решение: Пусть $AC = 17a$, $BC = 7a$. Тогда $BD = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 49a^2} = 7\sqrt{1+a^2}$;
$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{49 + 17^2a^2}$. Th. синусов $\triangle ABD$: $\frac{AD}{\sin\angle ABD} = 2R$. $\sin\angle ABD = \frac{DC}{DB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2R = \frac{AD \cdot BD}{DC} = \frac{\sqrt{49+17^2a^2} \cdot 7\sqrt{1+a^2}}{7} = \sqrt{49+17^2a^2} \cdot \sqrt{1+a^2} = \sqrt{\underbrace{17^2}_{=289}a^4 + (17^2+49)a^2 + 49} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4R^2 = 4 \cdot 13^2 = 4 \cdot 169 = 676 = 289a^4 + 338a^2 + 49 \Leftrightarrow 289x^2 + 338x - 627 = 0$, где $x = a^2$. Тогда

т.к. $x = a^2$

$$x = \frac{-338 + \sqrt{338^2 + 4 \cdot 627 \cdot 289}}{289 \cdot 2} = \cancel{\frac{-338+\sqrt{\ }}{2 \cdot 289}} \; \frac{-169 + \sqrt{169^2 + 627 \cdot 289}}{289} = \frac{-169 + \sqrt{28561 + 181203}}{289} =$$

$$= \frac{-169 + \sqrt{209764}}{289} = \frac{-169 + 2\sqrt{52441}}{289} = \frac{-169 + 2 \cdot 229}{289} = 1 \Rightarrow a = 1, \text{ т.к. } x = a^2 \text{ и } a > 0.$$

Поскольку $AC = 17a$, $BC = 7a$, $AB = 24a = 24$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \Leftrightarrow \sqrt{y+z}-\sqrt{y}=z$, где $y=3x^2+3x+1$, $z=1-9x$.

Разбор случаев: Заметим, что $y=3x^2+3x+1>0$, т.к. $D=9-4\cdot3=-3<0$ и старший коэфф $3>0$.

I. $z\geq 0$. (помним $y>0$)

$\sqrt{y+z}-\sqrt{y}=z \Leftrightarrow y+z=y+z^2+2\sqrt{y}\cdot z \Leftrightarrow z=z(z+2\sqrt{y}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ 2\sqrt{y}=1-z \end{array}\right.$. Решим $2\sqrt{y}=1-z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z\leqslant 1 \\ 4y=1+z^2-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq 1-9x\leq 1 \\ 12x^2+12x+4=\cancel{1+81x^2+1-18x}+18x\ 81x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x\leq \frac{1}{9} \\ 69x^2-12x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq \frac{1}{9} \\ x=\frac{2\cdot 6\pm\sqrt{4\cdot 6^2+4\cdot 69\cdot 4}}{2\cdot 69}=\frac{6\pm\sqrt{4\cdot 9+4\cdot 69}}{69}=\frac{2}{69}(3\pm\sqrt{78}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq \frac{1}{9} \\ x=\frac{2}{69}(3+\sqrt{78}) \end{cases}$, т.к. $\sqrt{78}>8>3$.

Проверим $x\leq\frac{1}{9}$. $\frac{2}{69}(3+\sqrt{78})\leq\frac{1}{9} \Leftrightarrow 18(3+\sqrt{78})\leq 69 \Leftrightarrow 54+18\sqrt{78}\leq 69 \Leftrightarrow 18\sqrt{78}\leq 15 \Rightarrow \sqrt{78}<1$.
Противоречие.

Итак, $\left[\begin{array}{l} z=0 \\ 2\sqrt{y}=1-z \end{array}\right. \Leftrightarrow z=0 \Leftrightarrow 1-9x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$.

II $z<0$ (помним $y>0$)

$\sqrt{y+z}-\sqrt{y}=z \Leftrightarrow \sqrt{t+k}-\sqrt{t}=k$, где $t=y+z$, $k=\overset{9x-1}{-z}>0$. $t=y+z=3x^2-6x+2$.

$\sqrt{t+k}-\sqrt{t}=k \Leftrightarrow \begin{cases} t+k=t+k^2+2k\sqrt{t} \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=k(k+2\sqrt{t}) \\ t\geq 0 \end{cases} \overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} k+2\sqrt{t}=1 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t=\overbrace{(1-k)^2}^{\geq 0} \\ k\leq 1 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t=(1-k)^2 \\ k\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2-24x+8=(2-9x)^2=81x^2-36x+4 \\ 9x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\leq\frac{2}{9} \\ 69x^2-12x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq\frac{2}{9} \\ x=\frac{2}{69}(3+\sqrt{78})^{(\text{см. случай I})} \end{cases}$. Проверим $x\leq\frac{2}{9}$. $\frac{2}{69}(3+\sqrt{78})\leq\frac{2}{9} \Leftrightarrow 9(3+\sqrt{78})\leq 69 \Leftrightarrow 27+9\sqrt{78}\leq 69 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\sqrt{78}\leq 42 \Leftrightarrow \sqrt{78}\leq\frac{14}{3} \Leftrightarrow 78\cdot 9\leq 196$ — неверно. Противоречие.

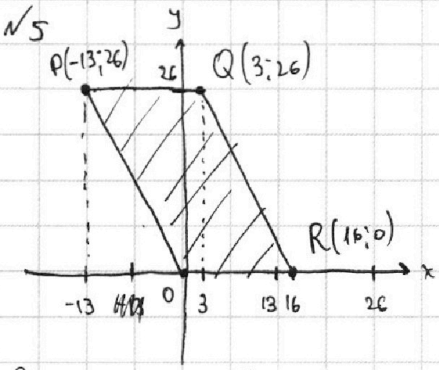
Ответ: $x\in\left\{\frac{1}{9}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

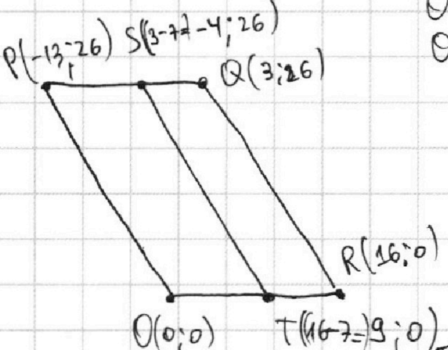


~~Нарисуем~~ Обозначим внутренность (включая границу) параллелограмма OPQR за I.

$$(x;y)\in I \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0\\ y\leq 26\\ 2x+y\geq 0\\ 2x+y\leq 32\end{cases}$$

Зафиксируем $A=(x_1;y_1)\in I$ и рассмотрим мн-во всех $B=(x_2;y_2)$: $2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$.

Ясно, что это мн-во — прямая, параллельная QR, одна из точек которой отстоит от A на +7 в направлении x и на 0 в направлении y.



Обозначим внутренность (включая границу) параллелограмма OPST за J.

Очевидно, если $A\in J$, и y_1 чётно, подходящих B ровно $\frac{26-0}{2}+1=14$; если $A\in J$ и y_1 нечётно, подходящих B ровно $(26-0+1)-14=13$; если $A\notin J$, подходящих B нет.

Тогда пар $(A;B)$ ровно $\underbrace{\overbrace{(x_S-x_P)}^{\text{ширина } J \text{ по } x}}_{=9}\Big(\underbrace{\big(\frac{26-0}{2}+1\big)}_{=14}\cdot 14+\underbrace{\big((26-0+1)-\big(\frac{26-0}{2}+1\big)\big)}_{=13}\cdot 13\Big)=9(14^2+13^2)=$

#положений A при фикс. x_1 и чётн y_1

#положений A при фикс. x_1 и нечётн. y_1

$=9(169+196)=9\cdot 365=3285$

Ответ: 3285

№ 6

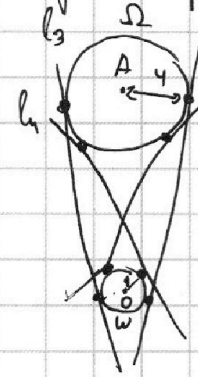
$a=?: \exists b\in\mathbb{R}: \exists$ ровно 2 $(x;y)$: $\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0. \end{cases}$

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2>1 \\ x^2+(y-12)^2\le 4^2 \end{cases} \\ x^2+y^2=1 \\ \begin{cases} x^2+y^2<1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 4^2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ точка $(x;y)$ принадлежит ровно 1 из кругов B_1 и B_2, где B_1 имеет центр в $(0;0)$ и радиус 1, B_2 имеет центр в $(0;12)$ и радиус 4.

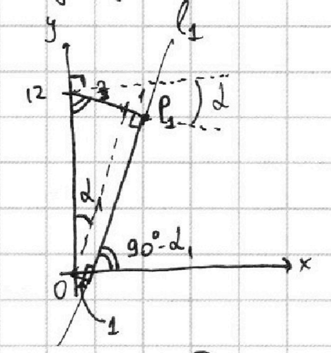
Очевидно, $B_1\cap B_2=\varnothing$. Тогда "ровно 1" $\Leftrightarrow$ "хотя бы 1".

$ax+y-b\cdot 8=0$ — ур-е прямой $(\forall a,b)$. Тогда все $(x;y)$, являющиеся решениями исходной системы образуют пересечение прямой и ~~д~~ совокупности двух непересекающихся кругов. Поскольку круги не пересекаются и ~~пр~~ пересечение прямой и круга содержит либо 0, либо 1, либо ∞ точек, то, что нужно $\Leftrightarrow$ прямая $ax+y-8b=0$ касается B_1 и B_2.

Обозначим окружности-границы B_1 и B_2 ω и Ω, соответственно. ~~Ω проходит через центр~~ $A=(0;12)$.



Найдём ур-е l_1.



$\sin\alpha_1=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$. $\alpha_1\in(0°;90°)\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}=\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha_1=\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_1}}=\sqrt{15}=$
$=\operatorname{tg}(90°-\alpha_1)$. Прямая проходит через $P_1=$
$=(0+4\cos\alpha_1;12-4\sin\alpha_1)=(\sqrt{15};11)$.

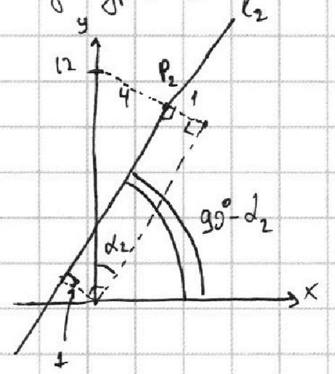
l_1 вида $y=k_1x+b_1$; $k_1=\operatorname{tg}(90°-\alpha_1)=\sqrt{15}$. $P_1\in l_1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 11=\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}+b_1\Rightarrow b_1=-4$.

l_1: $y=\sqrt{15}x+(-4)\Leftrightarrow -\sqrt{15}x+y-8\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

Итак, $\boxed{a=-\sqrt{15} \text{ подходит}}$.

Поскольку l_3 симметрична отн. AB, т.е. OY, $\boxed{a=\sqrt{15}}$ $\boxed{\text{тоже подходит}}$

Найдём ур-е l_2.



$\sin\alpha_2=\frac{5}{12}$. $\alpha\in(0°;90°)\Rightarrow\cos\alpha_2=\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}=\frac{\sqrt{119}}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha_2=\frac{\sqrt{119}}{5}=\operatorname{tg}(90°-\alpha_2)$.

~~Прямая проходит через $P_2=(0+4\cos\alpha_2;12-4\sin\alpha_2)=\left(\frac{\sqrt{119}}{3};12-\frac{5}{3}\right)$~~

~~Ясно, что существует такое b, что~~

l_2 вида $y=k_2x+b_2=\operatorname{tg}(90°-\alpha_2)x+b_2=\frac{\sqrt{119}}{5}x+b_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+\left(-\frac{\sqrt{119}}{5}\right)x+(-b_2)=0$. Ясно, что существует подходящее $b_2\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists$ подходящее b. $a=-\frac{\sqrt{119}}{5}$ подходит. Аналогично, $a=\frac{\sqrt{119}}{5}$ подходит.

Ответ: $a\in\left\{-\sqrt{15};+\sqrt{15};-\frac{\sqrt{119}}{5};+\frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a+b \vdots m$; $a^2-7ab+b^2 \vdots m$. $a^2-7ab+b^2=(a+b)(a+b)-9ab$.

Необх. $\begin{cases} 9ab \vdots m \\ a+b \vdots m \\ m\to max \\ a\perp b. \end{cases}$

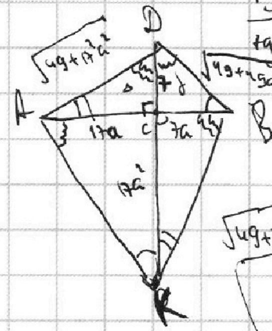
Пусть $m>1$. Поскольку $\begin{cases} a\perp b \\ a+b \vdots m \end{cases} \Rightarrow a, b \perp m$. $9 \vdots m$, $a+b \vdots m$, $m\to max$, $a\perp b$. ч.

$tg\,\gamma = \frac{a}{4}$

$tg\,\Delta = \frac{17}{7}a$

$2\,495$!

$+\begin{array}{r}181203\\28561\\\hline 209764\end{array}$



$\frac{4+5}{16-\underbrace{7\cdot4\cdot5}_{140}+25} = \frac{9}{-99}$

$\sqrt{49+17^2a^2}\cdot 7\sqrt{1+a^2}=2R$

$\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\17\\\hline 289\end{array}$ $+49$ $\times\begin{array}{r}338\\50\end{array}-1$

$338\cdot(50-1)=16900-338$
-338
16562

$\frac{209764}{52441}\Big|4$

$\frac{AC}{CB}=\frac{17}{7}$

$49\left((49+17^2a^2)(1+a^2)\right)=4R^2$

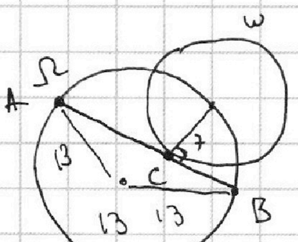
$17^2=(20-3)^2=400-\overbrace{2\cdot3\cdot20}^{120}+9=289$
$+45$

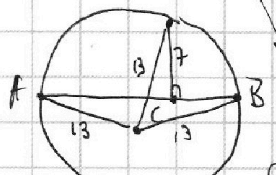
$\sqrt{2\cdot10^5}=\sqrt{2^6\cdot5^5}=2^3\cdot5^2\cdot\sqrt5$

$\times\begin{array}{r}13\\7\end{array}$

$\times\begin{array}{r}338\\49\end{array}$

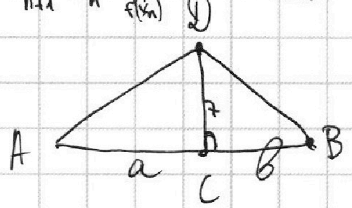
$\sqrt{5\cdot10^4}=300$ 1000 $\frac{53000}{-48\ 50}\Big|\frac{600}{38}$





$x^2-a=0$

$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n}=x_n-\frac12x_n+\frac12\frac{a}{x_n}=\boxed{\frac12\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}$



$\frac{AC}{BC}=\frac{17}{7}$

$R_0=13$

$\frac{AD}{\frac{DC}{DB}}=2R=\frac{AD\cdot DB}{7}\Rightarrow AD\cdot DB=2\cdot13\cdot7=\overbrace{182}^{91}$

$\frac{BD}{\frac{DC}{AD}}=2R=\frac{AD\cdot BD}{7}$

$\frac{5244}{-45\ 74\ -60\ 144}\Big|\frac{15}{35}$

$169\cdot4=400+240+36$

676

$AD\cdot DB=182$

$\frac{AD^2-49}{BD^2-49}=\frac{17^2}{49}$

$xy=2^2\cdot13^2\cdot7^2$

$\frac{x-49}{y-49}=\frac{17^2}{49} \Leftrightarrow 49x-7^4=17^2y-49\cdot17$ $\cancel{\frac{5244}{749}}\Big|7$

$7^6-2^2\cdot13^2\cdot7^4=7^4(49-\overbrace{2^2\cdot13^2}^{676})$

$\frac{a}{b}=\frac{17}{7}\Leftrightarrow a=\frac{17}{7}b$

$\frac{17^2}{7^2}b^4+17^2b^2+7^2b^2+7^4=2^2\cdot13^2\cdot7^2$

$(a^2+49)(b^2+49)=2^2\cdot13^2\cdot7^2$

$\left(\frac{17^2}{7^2}b^2+49\right)(b^2+49)$

$\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline119\\170\\\hline289\end{array}$ $+\begin{array}{r}289\\49\\\hline338\end{array}$

$\times\begin{array}{r}338\\338\\\hline2704\\1014\\1014\\\hline114244\end{array}$

$\hookrightarrow 4\cdot28561$ 169

$676-49=627$

$a=209764$

$x_0=1000$

$500+209{,}764\approx710=x_1$

$289x^2+16562x$

$\times\begin{array}{r}627\\119\\\hline5643\\5016\\1254\\\hline 111203\end{array}$

$x_0=300$

$x_1=150+\frac{52441}{600}\approx270$

$x_2=135+\frac{52441}{540}\approx235$

$x_3=1$

$130+8\ell$ $(170-1)^2=28900-$
$-340+1=$
$=28561$

$355+\frac{209764}{710}<355+\frac{209764}{700}<355+\frac{210000}{700}=355+300=655$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$235 \cdot 235 = 1175 + 705 + 470 = 55225$

$x_3 = 117 + \frac{52441}{470} = 228$

$x_4 = 114 + \frac{52441}{456} = 114 + 115 = 228$

$23 \cdot 23 = 69 + 46 = 529$

$s^2 + c^2 = 1$

$(230-1)^2 = 52900 - 460 + 1 = 52441$

$2 \cdot 229 = 458$, $458 - 169 = 289$

$\sin \in \left\{\frac{\sqrt{15}}{4}; \frac{\sqrt{119}}{12}\right\}$

$1 + ctg^2 = \frac{1}{s^2}$

$\cos \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{5}{12}\right\}$

$12 \cdot 12 = 144 - 25 =$

$y = 3x^2 + 3x + 1$

$tg \in \left\{\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$

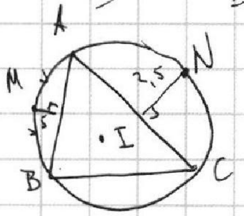
$\underbrace{\sqrt{y+1-9x}}_{\geq 0} - \underbrace{\sqrt{y}}_{\geq 0} = 1 - 9x$

~~I. $1-9x \geq 0$.~~

~~$1-9x = z$ $\sqrt{y}\sqrt{y+(1-9x)} = 1-9x$~~ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y+1-9x=0 \end{array}\right.$

$144 - 25 = 119$

$\frac{144-25}{144} = \frac{119}{144}$



~~II $1-9x \leq 0 \Leftrightarrow 9x-1 \geq 0$~~

~~$\sqrt{y} - \sqrt{y+(1-9x)} = 9x-1$~~

$81 - 12 = 69$

$312 = 3 \cdot 104 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13$

$9 - 4 \cdot 3 \cdot 1$

$280 - 4 = 276$, $276 + 36 = 312$

$1-9x$

$y+z$

$0 \geq 9x - 1 \geq 1$

I. $1-9x \geq 0$.

$\sqrt{y+(1-9x)} - \sqrt{y} = 1-9x$ $2y + (1-9x) - 2\sqrt{y}\sqrt{y+(1-9x)} = 1-9x$

$1 \geq 9x \geq 0$

$y, z \geq 0$.

$0 \leq x \leq \frac{1}{9}$

$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z \Leftrightarrow y + z = y + z^2 + 2\sqrt{y} \cdot z \Leftrightarrow z = z(z + 2\sqrt{y}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ 2\sqrt{y} = 1-z \end{array}\right.$

$\frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 69}}{69} = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$

$y + z = z^2 + y + 2z\sqrt{y}$

$36 \cdot \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}$

$z = 0$

$14^2 = 49 \cdot 4 = 196$

$z = z(z + 2\sqrt{y})$

$2\sqrt{y} = 1 - z$, $z = 9x$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$

$18 + 69 = 87$

$4y = 81x^2$

$9x = 1$

3. $\frac{1}{n} - \frac{2}{3} + 2 \geq 0$

$\sin \alpha = \frac{1}{4}$

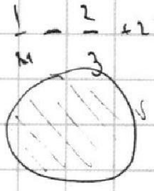
$\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow ctg \alpha - \sqrt{15}$

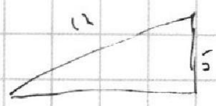
$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$

$9 + 69 = 78$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-4^2 \leq 0 \end{array}\right. \\ x^2+y^2-1=0 \\ \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-1 < 0 \\ x^2+(y-12)^2-4^2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$





$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69 \cdot 4}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 69 \cdot 4}}{69}$

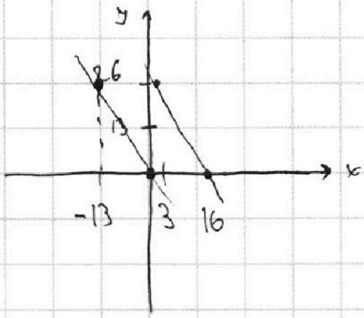
$= \frac{2 \cdot 3 \pm 2\sqrt{78}}{69} = \frac{2}{69}\left(3 \pm \sqrt{78}\right)$

$10 < 144 - 25 < 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y \in [0;26]$; $y + 2x \geq 0$
$y + 2x \leq 32$

$169 + 196$

196

$$\begin{array}{r} 3650 \\ -\;365 \\ \hline 3285 \end{array}$$