



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Пусть для $x \in \mathbb{N}$ ~~пусть~~ $f(x)$ — такая функция, что её значение =
= максимальное y , такое, что $x : 3^y$ ($y \in \mathbb{N}$). $f(x) + f(y) = f(xy)$

$$f(ac) \geq 21 \quad f(ab) \geq 11 \quad f(bc) \geq 18$$

Докажем, что $f(abc) \geq 25$. ~~Пусть $f(abc) < 25$~~ Пусть $f(abc) < 25$

$$f(ab^2c) = f(ab) + f(bc) \geq 29 \quad f(ac) \leq f(abc) \leq 24$$

$$f(b^2) = f(ab) + f(bc) - f(ac) \geq 5, \text{ но } f(b^2) = 2f(b) \Rightarrow f(b^2) \geq 6 \Rightarrow$$

$$f(b) \geq 3 \Rightarrow f(abc) \geq 24 \Rightarrow f(abc) = 24 = f(ab^2c) - f(b) \Rightarrow f(b) \geq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(ac) = f(abc) - f(b) \leq 19 - \text{противоречие} \Rightarrow f(abc) \geq 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 3^{25} \Rightarrow \text{инк. } abc = 3^{25} \cdot 4^{38} \text{ (м.к. } ac : 4^{38}).$$

$$\text{Пример } abc = 3^{25} \cdot 4^{38} : a = 3^7 \cdot 4^{11}, b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 4^{24} \Rightarrow$$

$$ab = 3^{11} \cdot 4^{11} \quad bc = 3^{18} \cdot 4^{24} \quad ac = 3^{21} \cdot 4^{38} \Rightarrow \text{Ответ: } 3^{25} \cdot 4^{38}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2

Если $\frac{a}{b}$ — несократима, то $\text{НОД}(a; b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$ — можно сократить на m , тогда и только тогда,
когда $(a+b) : m$ и $(a^2-8ab+b^2) : m \Rightarrow$ наибольшее подходящее
 $m = \text{НОД}(a+b; a^2-8ab+b^2) = \text{НОД}(a+b; a^2+2ab+b^2-10ab) =$
 $= \text{НОД}(a+b; -10ab) \quad \forall x, a : x : (a+b) : x \Rightarrow \text{НОД}(a+b; -10ab) : x \Rightarrow$
 $\forall x, b : x : (a+b) : x \Rightarrow \text{НОД}(a+b; -10ab) : x$
 ~~$\forall x, a, b, x$~~

$$\Rightarrow \text{НОД}(a; \text{НОД}(a+b; -10ab)) = 1 = \text{НОД}(b; \text{НОД}(a+b; -10ab)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 : \text{НОД}(a+b; -10ab) \Rightarrow \text{НОД}(a+b; -10ab) \leq 10 \Rightarrow m \leq 10$$

~~каждый пример подходящего $m=10$~~

пример для наибольшего $m=10$: $a=4, b=3$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{10}{49-168+9} = \frac{10}{90} \Rightarrow \text{Ответ: при } m=10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3})$$

$$2x^2-3x+4 - 2x^2-x-3 = (1-4x)(\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3})$$

$$1-4x = (1-4x)(\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3})$$

Пусть $1-4x \neq 0$: $\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3} = 1$

$$\sqrt{2x^2-3x+4} = 1 - \sqrt{2x^2+x+3} \quad \text{--- вернемся к этому равенству чуть позже*}$$

$$2x^2-3x+4 = 1 + 2x^2+x+3 - 2\sqrt{2x^2+x+3}$$

$$-4x = -2\sqrt{2x^2+x+3}$$

$$4x^2 = 2x^2+x+3$$

Если $1-4x=0$, то $x = \frac{1}{4}$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ x = -1 \end{cases}$$

~~Но:~~ Но:

$$\text{при } x = 1,5 \quad \sqrt{2x^2+x+3} = 3 \Rightarrow 1 - \sqrt{2x^2+x+3} < 0 \leq \sqrt{2x^2-3x+4} = 2$$

$$\text{при } x = -1 \quad \sqrt{2x^2+x+3} = 2 \Rightarrow 1 - \sqrt{2x^2+x+3} < 0 \leq \sqrt{2x^2-3x+4} = 3$$

--- противоречие $\Rightarrow x \neq -1$ и $x \neq 1,5 \Rightarrow$ Ответ: $x = \frac{1}{4}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Касательная это прямая. ~~У прямой нет длины.~~

А у прямой бесконечная длина. Ответ: $+\infty$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$3x+2y=Z \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{Z} \Rightarrow \frac{Z}{2} = \frac{xy}{3y+x} \Rightarrow Z = \frac{2xy}{3y+x} = 3x+2y$$

$$2xy = 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy$$

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2y^2 = y^2$$

$$x = \frac{-3y \pm y}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases} \quad x = ky, \text{ где } \begin{cases} k = -1 \\ k = -2 \end{cases}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - Z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - (3x+2y)^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3k^2y^2 - 4y^2 - (3ky+2y)^2}{k^2y^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{3k^2 - 4 - (3k+2)^2}{k^2 - 6} = t$$

$$\text{при } k = -1: t = \frac{3-4-(2-3)}{1-6} = \frac{3-4+1}{1-6} = 0$$

$$\text{при } k = -2: t = \frac{12-4-(-6+2)}{4-6} = \frac{12-4+4}{4-6} = \frac{12}{-2} = -6$$

Ответ: 0

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

Пусть S — расстояние от А до В. t_m — время за которое ело проехал мотоциклист, t_b — велосипедист. Тогда:

$$t_m + 2 = t_b \quad \frac{S}{t_m} \cdot t_b = \frac{S}{t_b} \cdot t_m + 96 \text{ км} \quad \frac{S}{\frac{S}{t_m} + 6 \text{ км/ч}} + \frac{5}{4} \text{ ч} = \frac{S}{\frac{S}{t_b} + 6 \text{ км/ч}}$$

$$\frac{S}{t_m} \cdot (t_m + 2) = \frac{S}{(t_m + 2)} t_m + 96$$

$$S(t_m + 2)^2 = S t_m^2 + 96 t_m (t_m + 2)$$

$$S t_m^2 + 4 S t_m + 4 S = 96 t_m^2 + 192 t_m$$

$$4 S t_m + S = 96 t_m^2 + 192 t_m$$

$$t_m (96 t_m + 48 - S) - S = 0$$

$$D = 48^2 + S^2 - 96S + S \cdot 96 = 48^2 + S^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3} = 1$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4} = 1 - \sqrt{2x^2+x+3}$$

$$\sqrt{2x^2+x+3} = 1 - \sqrt{2x^2-3x+4}$$

$$2x^2-3x+4 = 2x^2+x+3 + 1 - 2\sqrt{2x^2+x+3}$$

$$2x^2+x+3 = 1 + 2x^2-3x+4 - 2\sqrt{2x^2+x+3}$$

$$-4x = -2\sqrt{2x^2+x+3}$$

$$2x-1 = -\sqrt{2x^2+x+3}$$

$$x^2 = 2x^2+x+3$$

$$2x-1 = \sqrt{2x^2+x+3}$$

$$x^2+x+3=0$$

$\frac{S}{V_B}$

$$2\sqrt{2x^2+x+3} - \frac{1}{x} + 0 = 2x^2-3x+4$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4}$$

$$2x^2-x-3=0$$

$$\frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{32}{8} = \frac{24}{8} = 1,5\sqrt{1,5}$$

$$x = [-1; 1,5]$$

$$-\sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{24}{8} \quad 48V_M$$

$$V_M^2 - 48V_M + V_B^2 + 48V_B$$

$$\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M} = \frac{2}{S}$$

$$\frac{48V_M - 48V_B}{V_M - V_B} = \frac{S}{V_M - V_B}$$

$$D = 48^2 - 4 \cdot V_B$$

$$\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M} = \frac{2}{S}$$

$$\frac{48V_M - 48V_B}{V_M - V_B} = \frac{S}{V_M - V_B} \Rightarrow \frac{48V_M - 48V_B}{V_M - V_B} = \frac{S}{V_M - V_B} \Rightarrow 48V_M - 48V_B = S$$

$$\frac{96V_B}{V_B^2 + V_M^2} + 2 = \frac{96V_M}{V_B + V_M} \quad \frac{5S}{V_M} + 2 = \frac{5S}{V_B} \quad \frac{S}{V_M} + 2 = \frac{S}{V_B}$$

$$\frac{48}{V_B^2 + V_M^2} = \frac{1}{V_M - V_B}$$

$$\frac{S}{V_B} \cdot V_M = \frac{S}{V_M} \cdot V_B + 96V_M$$

$$\frac{V_M}{V_B} = \frac{V_B}{V_M} + \frac{96}{S}$$

$$\frac{96V_B V_M}{V_B^2 + V_M^2} = S$$

$$\frac{8S}{V_M + 6} + \frac{40}{6} = \frac{8S}{V_B + 6}$$

$$\frac{V_M}{V_B} - \frac{V_B}{V_M} = \frac{96}{S}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - (z-3x)^2 - z^2 = 3x^2 - 9x^2 - 2z^2 + 6xz = -6x^2 - 2z^2 + 6xz$$

$$z^2 = (3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

$$\frac{-6x^2 - 8y^2 + 12xy}{x^2 - 6y^2} \quad \frac{z}{2} = \frac{xy}{3y+x}$$

||
||
||

$$3x^2 - 4y^2 =$$

$$3x + 2y = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$2x^2 + x + 3 = 1 + 2x - 3x + 4 -$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 = 2xy$$

$$-2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$81y^2 - 3 \cdot 4 = 9$$

$$2yx - \frac{1}{2} = -2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$$

$$x = \frac{-9y + 3y}{3} = -2y$$

$$x^2 = 4y^2$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$4x^2 + 4x + 3 = 2x^2 - 3x + 4$$

$$\frac{-24y^2 + 8y^2 + 24y^2}{18y^2} = 4 = 4x^2 + 2x + 0,25$$

$$(2x + 0,5)^2 =$$

$$= 4 = 4x^2 + 2x + 0,25$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(2x^2 - x + 3,5)^2 =$$

$$= 4x^4 + x^2 + 3,5^2 - 4x^3 +$$

$$+ 14x^2 - 7x =$$

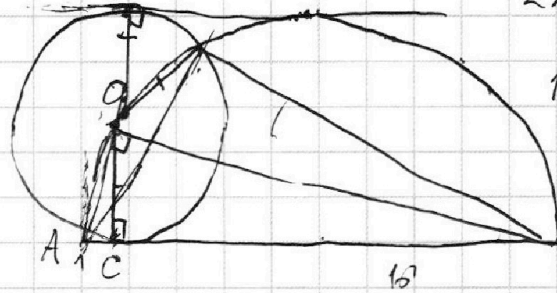
$$= 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 7x + 3,5^2 - 4x^2 - 2x - 0,25 + 12 =$$

$$1 - 4 \cdot 2(-3) =$$

$$1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{4} =$$

$$= [2,5; -1]$$



$$4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 12 =$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3,5 \\ 1 \quad 3,5 \\ 1 \quad 7 \quad 5 \\ \hline 4 \quad 0 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



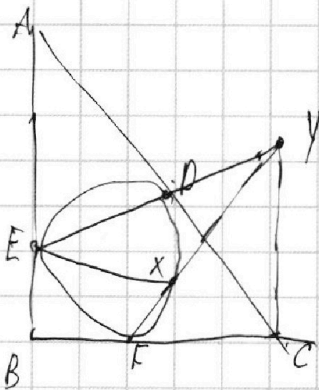
$$\frac{S}{t_M} \cdot \frac{S}{t_B} = t_M + 2 = t_B$$

$$\frac{S}{t_B} \cdot t_M + 96 = \frac{S}{t_M}$$

$$\frac{S t_B}{t_M} + 96 = \frac{S t_M}{t_B} \Rightarrow \frac{S t_M + 2S}{t_M} + 96 = \frac{S t_M}{t_M + 2} =$$

~~96 t_B~~

$$\frac{S}{\frac{S}{t_M} + 6} + \frac{5}{4} = \frac{S}{\frac{S}{t_B} + 6}$$



$$= S t_M^2 + 2S t_M + 2S t_M + 4S + 96 t_M + 192 = \frac{S^2}{t_M}$$

498

$$4S t_M + S = 24 t_M + 48$$

$$S t_M (S - 24) = 48 - S$$

$$t_M = \frac{48 - S}{S - 24} = \frac{-12 - 6S + \sqrt{36 + 600S + 3600}}{60 - 24}$$

↓

$$S \left(\frac{S}{t_M + 2} + 6 \right) + \frac{5}{4} \left(\frac{S}{t_M + 2} + 6 \right) = S \left(\frac{S}{t_M} + 6 \right)$$

$$\frac{S^2}{t_M + 2} + 7.5 + \frac{5S}{4(t_M + 2)} = \frac{S^2}{t_M}$$

$$30 t_M^2 + (60 + 5S) t_M = 8S^2$$

$$S^2 t_M + 7.5(t_M)(t_M + 2) + \frac{5S(t_M)}{4} = S^2(t_M + 2)$$

$$t_M D = (60 + 5S)^2 + 30 \cdot 8 \cdot 4S^2$$

$$25S^2 + 600S + 3600$$

$$98S^2 + 600S + 3600$$

$$4.75 t_M^2 + 15 t_M$$

$$30 t_M^2 + 60 t_M + 5S t_M = 8S^2$$

$$(60 + 5S)(S - 24) + 30 \cdot 8 \cdot 4S^2$$

$$30 \left(\frac{48 - S}{S - 24} \right)^2 + 60 \frac{48 - S}{S - 24} + 5S \frac{48 - S}{S - 24} = 8S^2$$

$$= 194S^2$$

$$5 \cdot 2 \cdot 3 (2^4 \cdot 3 - S)^2 + 2^2 \cdot 5 \cdot 3 (2^4 \cdot 3 - S)(S - 2^3 \cdot 3)$$

$$30 (48 - S)^2 + (60 + 5S)(48 - S)(S - 24) - 8S^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

