



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть: $a = \alpha \cdot 3^{k_1} \cdot 7^{m_1}$; $b = \beta \cdot 3^{k_2} \cdot 7^{m_2}$; $c = \gamma \cdot 3^{k_3} \cdot 7^{m_3}$

$ab: 3^{11} \cdot 7^{11}$; $bc: 3^{18} \cdot 7^{16}$; $ac: 3^{27} \cdot 7^{38}$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 3^{11+18+27} \cdot 7^{11+16+38}$

$\Rightarrow (abc)^2 = 3^{56} \cdot 7^{65}$ - степень нечетная, но т.к. слева квадрат целого числа \Rightarrow степень 7

Однако $ac: 7^{38}$ (цел.) $\Rightarrow abc: 7^{25} \cdot 7^{38}$ $\Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

$abc = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3^{k_1+k_2+k_3} \cdot 7^{m_1+m_2+m_3}$, т.к. можно подобрать

натур. число $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 1$

Подберем $k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3$ так чтобы условия выполнялись

$a = 3^7 \cdot 7^{11}$; $b = 3^4 \cdot 7^{14}$; $c = 3^{14} \cdot 7^{27}$

Не трудно проверить, что все условия выполняются, т.к.:

$$\begin{cases} 7+4 \geq 11 \\ 4+14 \geq 18 \\ 7+14 \geq 21 \\ 11+0 \geq 11 \\ 11+27 \geq 38 \\ 0+27 \geq 16 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \text{все выполняется.}$$

Причем $abc = 3^{7+4+14} \cdot 7^{11+0+27} = 3^{25} \cdot 7^{38} \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

Оценка доказана выше.

Ответ: $abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$ - наименьшее произведение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \not\sim b$; $b \not\sim a$, т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

Если $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$ можно сократить на $m \neq 1$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2-2ab+b^2) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, (a+b)^2-10ab) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, -10ab) = m$$

Заметим, что $m \not\sim a$, т.к. $a+b \not\sim a \not\sim m$, т.к. $b \not\sim a \not\sim m$, т.к. $\frac{a}{b}$ несократ.

Заметим, что $m \not\sim b$, т.к. $a+b \not\sim b$, т.к. $a \not\sim b$, т.к. $\frac{a}{b}$ несократ.

$\Rightarrow m \leq 10$, т.к. одно из слог.: $-10ab$, причем в НОД от него идет не a и не b , а значит 10 - множитель.

\Rightarrow Оценка: $m \leq 10$

Найдем $m=10$: при $a=7; b=3$, дробь $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ - несократима

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{7+3}{49+9-2 \cdot 21} = \frac{10}{58-42} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \text{ видно, что на } m=10 \text{ можно сократить}$$

Пример дробей для $m=10$

Ответ: $m=10$ - наибольшее число, на которое можно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$, при $\frac{a}{b}$ - несократ. дроби.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(D) \sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

Замеча: $t = 2x^2 + x + 3$; $k = 1 - 4x$

$$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k$$

$$\sqrt{t+k} = k + \sqrt{t} \quad |^2$$

1) Возвращаем (*):

$$(H) \begin{cases} t+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + t & (*) \\ t \geq 0 \\ t+k \geq 0 \end{cases}$$

$$k+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + k$$

$$\begin{cases} k=0 \\ k+2\sqrt{t}-1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k=0 \\ k-1=2\sqrt{t}=1-k \quad |^2 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} k=0 \\ 4t = k^2 - 2k + 1 \\ t \geq 0; 1-k \geq 0 \end{cases}$$

2) Возвращаем в (H):

$$\begin{cases} k=0 \\ t+k \geq 0 & (*)1 \\ t \geq 0; 1-k \geq 0 \\ 4t = k^2 - 2k + 1 \\ t+k \geq 0 & (*)2 \\ t \geq 0; 1-k \geq 0 \end{cases}$$

2.1) Решим (*)1 с заданной обратной заменой:

$$\begin{cases} 4x = 1 \\ 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ 2 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \geq 0 - \text{Верно} \\ 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3 \geq 0 - \text{Верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

2.2) Решим (*)2 с обратной заменой:

$$\begin{cases} 8x^2 + 4x + 12 = 16x^2 - 2x \\ 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \\ 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4 \geq 0 - \text{Верно} \\ 2 \cdot (-1)^2 - 1 + 3 \geq 0 - \text{Верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \geq 0 - \text{Верно} \\ 2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3 \geq 0 - \text{Верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

3) Проверим каждый из найденных корней подстановкой:

$$3.1) x = \frac{1}{4} \rightarrow (D): \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3 \frac{3}{8}} - \sqrt{3 \frac{3}{8}} = 0 - \text{Верно} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3.2) x = -1 \rightarrow (\square): \sqrt{2(-1)^2 - 3(-1) + 4} - \sqrt{2(-1)^2 + 3(-1)} = 1 - 4(-1)$$
$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 5$$
$$1 = 5 - \text{неверно} \Rightarrow x = -1 - \text{не корень}$$

$$3.3) x = \frac{3}{2} \rightarrow (\square): \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3} = 1 - 4 \cdot \frac{3}{2}$$
$$\sqrt{4} - \sqrt{9} = 1 - 6$$
$$-1 = -5 - \text{неверно} \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \text{не корень}$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$ - корни уравнения.

Страница 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15) В равнобедренном $\triangle O_1KO_2$ - прямой (т.ч. $O_2K \perp O_1E$ (по н. 9))

$$\nrightarrow O_1O_2^2 = O_1K^2 + O_2K^2 \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$O_2K^2 = O_1O_2^2 - O_1K^2 = 8,5^2 - 4,5^2 = 4 \cdot 13$$

$$O_2K = 2\sqrt{13}$$

16) $\triangle EKO_2D$ - пар. мн (н. 12)

$$\nrightarrow O_2K = ED \text{ (по св. вы пар. мн)}$$

" $2\sqrt{13}$ "

Ответ: $ED = 2\sqrt{13}$

Справедливо

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x+2y=z; \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}; \quad \text{Найти: Максимум } \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{3x+2y} \Rightarrow \frac{6y^2+3x^2+3xy+2xy-2xy}{xy(3x+2y)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ 3x+2y \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)(x+2y)=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ 3x+2y \neq 0 \end{cases}$$

1) Если $x+y=0$:

$$\Rightarrow x=-y \Rightarrow 3x+2y = -3y+2y = -y = z$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{3y^2-4y^2-y^2}{y^2-6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = 0,4$$

2) Если $x+2y=0 \Rightarrow 3x+2y = -6y+2y = -4y = z$

$$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{12y^2-4y^2-16y^2}{4y^2-6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

3) П.к. $y > 0,4$ (найдем минимум в 1 и 2 пунктах)
и рассмотрим все случаи \Rightarrow

Ответ: $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ максимум равно 4, с вышесказанным

условий $3x+2y=z$ и $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$c \cdot \frac{x-y}{xy} = 2 - \text{первое условие}$$

$$c \cdot \frac{30-18}{30 \cdot 18} = 2 \Rightarrow c \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$c = \frac{36 \cdot 30}{12} = 90 \text{ км.} - \text{расстояние между}$$

А и В.

Ответ: расстояние АВ = 90 км.

Справочный лист 11

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть скорость велоседиста y км/ч; скорость мотоциклиста x км/ч; расстояние $AB = l$ км

Тогда: $\frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 2$, т.к. велоседист проезжает на 2 часа позже мотоциклиста

$$l \frac{x-y}{xy} = 2$$

$x \frac{l}{y} - y \frac{l}{x} = 96$, т.к. мотоциклист проехал бы на 96 км больше, чем велоседист, если бы ехал со скоростью, скажем, v в AB , а y мотоцикл. - столько же, сколько велоседист.

$$l \frac{x^2 - y^2}{xy} = 96$$

$$\frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = \frac{5}{4} \quad (\text{после изг. } y \text{ и } x \text{ в } y \text{ км/ч})$$

$$l \frac{x-y}{xy+6(x+y)+36} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{array}{r} x \ 4 \ 8 \\ \underline{ \ 6} \\ + 2 \ 8 \ 8 \\ \hline 3 \ 2 \ 4 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l \frac{x-y}{xy} = 2 \\ l \frac{(x-y)(x+y)}{xy} = 96 \end{array} \right\} \Rightarrow (x+y) \cdot \frac{l(x-y)}{xy} = 96 \Rightarrow x+y = \frac{96}{2} = 48 \quad (\#)$$

$$y = 48 - x$$

$$l \frac{x-y}{xy+6(x+y)+36} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{8xy}{xy+6(x+y)+36} = 5 \Rightarrow \frac{8xy}{xy+324} = 5$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8xy = 5xy + 324 \cdot 5 \\ xy + 324 \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow 3xy = 3 \cdot 108 \cdot 5 \Rightarrow xy = 540 \quad (\#)$$

$\Rightarrow xy + 324 \neq 0$ верно, т.к. скорости > 0

Решим систему из (#): $\begin{cases} x+y=48 \\ xy=540 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=48 \\ x^2-48x+540=0 \quad (*) \end{cases}$

Решим (*):

$$D = 48^2 - 4 \cdot 540 = 4(24^2 - 540) = 16(12^2 - 135) = 16 \cdot 9 > 0; \text{ 2 действ. реш.}$$
$$x_{1,2} = \frac{48 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ км/ч} \\ x = 18 \text{ км/ч} \end{cases}$$

Если $x = 30$ км/ч - скорость мотоциклиста, то $y = 18$ км/ч - скорость велоседиста, не трудно проверить, что все условия выполнены.

Если $x = 18$ км/ч $\Rightarrow y = 30$ км/ч; но тогда $l \frac{x-y}{xy} = l \frac{-12}{30 \cdot 18} = 2$, что не возможно, т.к. расстояние AB - неотрицательное. \neq эта пара скоростей не подходит.

Ответ: скорость мотоциклиста - 30 км/ч;
скорость велоседиста

Страница 10

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- 15) Д.п. $XK \perp \alpha$; $K \in \alpha$; $XL \perp BC$; $L \in BC$
- 16) Рассм. ΔXKY - прямоугольный, $(XK \perp \alpha)$
 $\angle CYF = 45^\circ \Rightarrow \angle YXK = 45^\circ$ (по т. о сдв. углов, ΔXKY - равнобедренный)
 $\Rightarrow XK = KY = XY \cdot \sin 45^\circ = \frac{XY}{\sqrt{2}} = x$
- 17) $LC = XK = x$, т.к. $\angle YCB = 90^\circ = \angle CLX = \angle CKX$, а значит ΔCLX и ΔCKX - прямоугольные (по гип. и катетам).
 ΔCLX - прямоугольный (по сдв. углам)
- 18) ~~$BL = 4x$~~
 ~~$BL = XF$~~
 Параллельно XE - диаметр:
 Методом координат. Пусть $F(0; r)$; $E(r; 0)$, где r - радиус $w(0; r)$
 $\angle CFX = \angle EXE = 45^\circ$ (уже было доказано) (пункт 11)
 $O(r; r)$
 Уравн. w : $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$
 XF : $y = r + x$, т.к. угол наклона 45° (угол $\angle FXC$)
 \Rightarrow коэф. перед x , $k=1$; $F \in XF \Rightarrow y = 0 \cdot 1 + b \Rightarrow b=r$
 $\begin{cases} y = r+x \\ (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = r+x \\ x^2 + (x-r)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = r+x \\ 2x^2 - 2xr = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x=0 & \text{точка } F \\ y=r & \text{точка } X \end{cases}$ $EF = \sqrt{(r-0)^2 + (0-r)^2} = \sqrt{2}r = 2r$ - диаметр.
- 19) ~~$BL = XF = 4x$~~ , т.к. $OE \perp AB$ (по пункту 1)
 т.к. $OE \perp BC$ (по п. 1)
 т.к. $XL \perp BC$ (п. 15)
 т.к. $\angle ABC$ - прямой
 $\Rightarrow BEXL$ - прямоугольник
 $\Rightarrow BL = XE = 4x$
 $BE = XL = r = 2x$
 (по св-ву пер. диаг.)
- 20) $XL = 2x$, т.к. $FO = 2x$ (как радиус)
 (к п. 19) - они равны, как противолежащие стороны параллелограмма
- 21) $BC = CL + BL = x + 4x = 5x$
- 22) Пусть $AE = y$, тогда $AD = y$ (по пункту 3); 23) $AB = AE + BE = y + 2x$
- 24) $S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{5x \cdot (y+2x)}{2}$, по св-ву площадей
- 25) $S_{\Delta ABC} = \frac{P_{\Delta ABC}}{2} \cdot r =$ (т.к. ΔABE вписана в $w(0; r)$)
 $= \frac{5x + y + 2x + y + 5x}{2} \cdot 2x = (2y + 10x) \cdot x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26) \text{ ЧЗ п. 24+25} \rightarrow \frac{5x(y+2x)}{2} = x(2y+10x)$$

$$5y+10x = 4y+20x$$

$$y = 10x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = 10 \Rightarrow \frac{y}{3x} = 3\frac{1}{3}$$

$$27) AD = AE = y \text{ (п. 22)}$$

$$DC = CF = \cancel{3x} BC - FL = \cancel{4x} - FL = 3x$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{y}{3x} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ (по п. 26)}$$

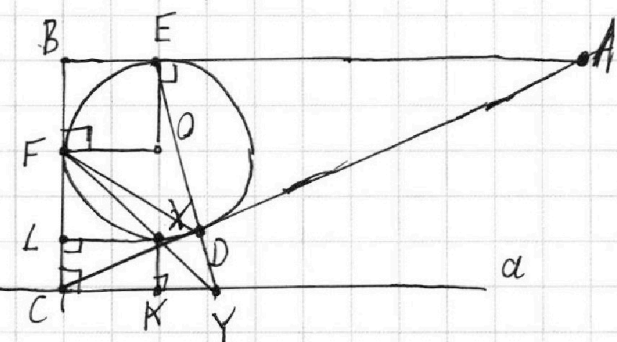
2x, м.к. OX=2x; OX || FL (по перпендикулярам)

FO || AX (м.к. они перпендикуляры к BC)

Ответ: AD:DC = 10:3.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный треуголь.

$\angle B$ - прямой.

$w(O; R)$ вписана в $\triangle ABC$.

$D, E, F \in w$; $D \in AC$; $E \in AB$; $F \in BC$

α - прямая $\alpha \perp BC$.

$C \in \alpha$.

$ED \cap \alpha = Y$. $FY \cap w = X$

лучи F и X несовпадают.

$EX = 2\sqrt{2}XY$.

Найти: $AD:DC$

Решение.

1) Д.н. FD .

2) Пусть $x = \frac{XY}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}XY}{2}$, тогда $EX = 4x$

3) w вписана в $\triangle ABC$; D, E, F - точки касания (усл.)

$\Rightarrow FC = FD \Rightarrow \triangle FCD$ - ∇ , причем $\angle CFD = \angle CDF$

$\Rightarrow AE = AD \Rightarrow \triangle AED$ - ∇ , причем $\angle AED = \angle ADE$.

4) Пусть $\angle ACB = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 90 - \alpha$, т.к. сумма углов треугол. равна 180°

5) $\triangle CFD$ - ∇ (п.3) $\Rightarrow \angle CFD = \angle CDF = 90 - \frac{\alpha}{2}$, но т.о. сумма углов ^{треугол.}

6) $\triangle AED$ - ∇ (п.3) $\Rightarrow \angle AED = \angle ADE = 45 + \frac{\alpha}{2}$, но т.о. сумма углов ^{треугол.}

7) Д.н. $OE; OF$, причем $OF \perp BC$, т.к. F - касания

$OF \perp AB$, т.к. E - касания

8) $\angle XED + \angle DEA = \angle ADX$

$\angle XED = 90 - (45 + \frac{\alpha}{2}) = 45 - \frac{\alpha}{2}$

9) $\angle XED$ - вписанн. $\Rightarrow \widehat{XD} = 2\angle XED = 90 - \alpha$ (по св-ву впис. ^{углов})

10) $\angle XFD$ - вписанн. $\Rightarrow \angle XFD = \frac{\widehat{XD}}{2} = 45 - \frac{\alpha}{2}$

11) $\angle XFD + \angle XFC = \angle CFD \Rightarrow \angle XFC = 90 - \frac{\alpha}{2} - (45 - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ$

12) $\angle XFO + \angle XFC = \angle CFO = 90^\circ$, т.к. $OF \perp BC$

$\angle XFO = 90 - 45^\circ = 45^\circ$.

13) Вспом. $FO \perp BC$ (по пункту 7) $\Rightarrow FO \parallel \alpha$ (по св-ву паралл. ^{прямых})
 $\alpha \perp BC$ (услов.)

14) Вспом. $FO \parallel \alpha$ (п.13)

FY - ~~секущая~~ секущая.

$\angle OFY$ и $\angle FYC$ - накрест. ост.

$\Rightarrow \angle CYF = \angle OFY = 45^\circ$
(по св-ву накрест. ост.)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

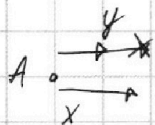
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$l \cdot \frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 2 \quad \text{or} \quad l \cdot \frac{x-y}{xy} = 2$$

$$\frac{x^2 - y^2}{xy} = 96$$

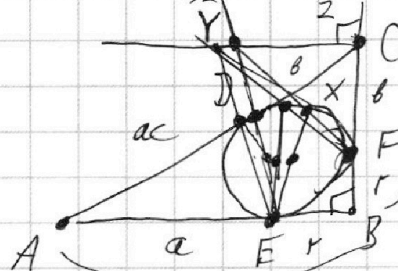
$$\frac{x^2 - y^2}{xy} = 96 \quad (x+y) \cdot 2 = 96 \quad x+y = 48 \quad y = 48 - x$$

$$\frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = 1,25 \quad l \cdot \frac{x-y}{xy + 6x + 6y + 36} = 1,25$$

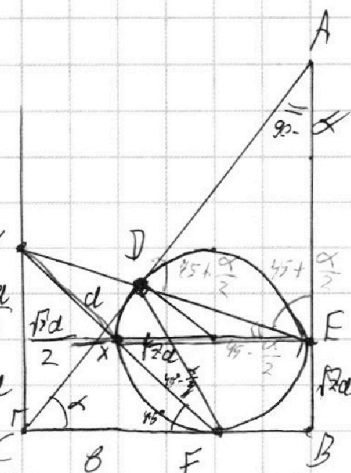
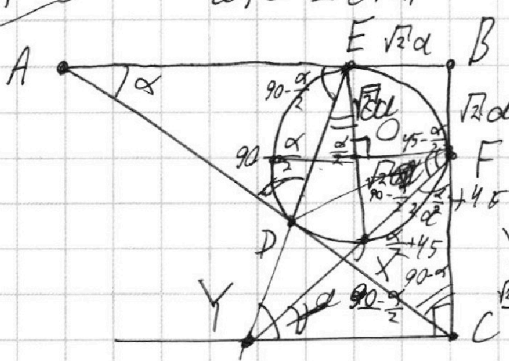
$$\frac{2xy}{xy + 324} = \frac{5}{4}$$

$$8xy = 5xy + 5 \cdot 324 \quad \begin{cases} xy = 540 \\ x+y = 48 \end{cases} \quad \begin{cases} 48x - x^2 = 540 \\ x^2 - 48x + 540 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{48 \pm 12}{2} = \begin{cases} x = 30 \rightarrow y = 18 \\ x = 18 \rightarrow y = 30 \end{cases} \quad D = 48^2 - 4 \cdot 540 = 16(12^2 - 135) = 16 \cdot 9 = 144$$



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= a^2 + 2ax + x^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ ab &= ax + bx + x^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \\ a + b &= c + 2x \end{aligned}$$



$$B + A = c + 2\sqrt{2}a \quad \frac{5\sqrt{2}a}{2} = BC \quad B = \frac{3\sqrt{2}a}{2}$$

$$(A+B) \cos \alpha = B + \sqrt{2}a \quad A + B = \frac{B + \sqrt{2}a}{\cos \alpha} \quad A = \frac{B + \sqrt{2}a}{\cos \alpha} - B = \frac{3\sqrt{2}a}{2} - \frac{3\sqrt{2}a}{2} = \frac{5\sqrt{2}a}{2} - a$$

См. рисунок 9

