



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

Пусть  $ab = k \cdot 3^{11} \cdot 7^{11}$ ;  $bc = l \cdot 3^{18} \cdot 7^{16}$ ;  $ac = m \cdot 3^{21} \cdot 7^{38}$ , тогда  $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = klm \cdot 3^{50} \cdot 7^{65}$

Пусть  $a = 3^k \cdot 7^l \cdot x$ ;  $b = 3^m \cdot 7^n \cdot y$ ;  $c = 3^p \cdot 7^q \cdot z$ ; при этом

$x, y, z \not\div 3$ ;  $x, y, z \not\div 7$ , т.е.  $k$  — максимальное кол-во раз,

сколько можно разделить  $a$  на 3,

$l$  — максимальное кол-во раз, сколько можно

разделить  $a$  на 7 и т.д. Тогда  $k+m \geq 11$ ;

$k+p \geq 21$ ;  $m+p \geq 18$ ;  $l+n \geq 11$ ;  $l+q \geq 38$ ;  $n+q \geq 16$ .

$abc = xyz \cdot 3^{k+m+p} \cdot 7^{l+n+q}$ . Пусть  $abc = (abc)^2 = k \cdot 3^{k+s} \cdot 7^{l+s}$ ,

тогда  $t = 2(k+m+p)$ ,  $s = 2(l+n+q)$ , и, т.к.  $ab: 3^{11} \cdot 7^{11}$ ;

$bc: 3^{18} \cdot 7^{16}$ ;  $ac: 3^{21} \cdot 7^{38}$ , верно, что  $ab \cdot bc \cdot ac:$

$ab \cdot bc \cdot ac: 3^{11+18+21} \cdot 7^{11+16+38} = 3^{50} \cdot 7^{65} = (abc)^2 \cdot 3^{50}$ .

$\cdot 7^{65} \Rightarrow (abc)^2: 3^{50} \cdot 7^{65} \Rightarrow abc: 3^{25} \cdot 7^{33}$ , но, т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,

то  $k, m, p, l, n, q \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow l+n+q \geq 38$ , т.к.

$l+q \geq 38$ . Т.к.  $abc: 3^{25} \cdot 7^{33}$ ;  $k+m+p \geq 25$ ;  $l+n+$

$+q \geq 33$ , но из предыдущих условий  $l+n+q \geq 38 \Rightarrow$

$\Rightarrow abc: 3^{25} \cdot 7^{38} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$ . Пусть  $a = 3^4 \cdot 7^{19}$ ;

$b = 3^4$ ;  $c = 3^{14} \cdot 7^{19}$ , тогда все верно, и  $abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$ . Ответ:  $3^{25} \cdot 7^{38}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

Пусть  ~~$a+b+mk = m \cdot k$~~   $a+b+mk = m \cdot k$ ;  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Тогда } a^2 - 8ab + b^2 = (a+b)^2 - 10ab = (m \cdot k)^2 - 10ab \\ - 10ab : m \Rightarrow 10ab : m. \text{ П.е. } \begin{cases} \text{НОД}(a; m) \neq 1 \\ \text{НОД}(b; m) \neq 1 \\ 10 : m \end{cases}$$

случай первый:  $10 : m$ , тогда  $m \leq 10$ , ~~и~~

случай второй:  $\text{НОД}(a; m) \neq 1$ ;  $m$  е.  $a : l$ ,  
и  $m : l$ ;  $l : \mathbb{N}$ , тогда  ~~$m \cdot k$~~  и пусть  $m = l \cdot n$ ,

$$\text{и тогда } a+b = m - k = m - l \cdot (n - k) \Rightarrow a+b : l \Rightarrow \\ \Rightarrow b : l, \text{ т.к. } a : l \Rightarrow \frac{a}{b} \text{ можно сократить до } \frac{\frac{a}{l}}{\frac{b}{l}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  предполож. неверно

случай третий:  $\text{НОД}(b; m) \neq 1$ , ~~тогда~~

то же самое, что и ~~случай~~ второй случай.



$$10 : m \Rightarrow m \leq 10$$

$$\text{пример на } 10: a=5; b=5; \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{10}{-150} = \frac{1}{-15}$$

От \* вообще-то,  $k \in \mathbb{Z}$ , но  $m > 0$ , т.к. если  $m < 0$ ,  
то дробь можно сокр. на  $-m > 0$ , и  $a+b > 0 \Rightarrow k > 0$ .

Ответ: 10.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

~~2~~

$$2x^2 - 3x + 4 = 2(x^2 - 1,5x + 2) = 2((x - 0,75)^2 + \frac{32-9}{16}) = 2((x - 0,75)^2 + \frac{23}{16}) \geq \frac{23}{8}$$

$$2x^2 + x + 3 = 2(x^2 + 0,5x + 1,5) = 2((x + 0,25)^2 + \frac{24-1}{16}) = 2((x + 0,25)^2 + \frac{23}{16}) \geq \frac{23}{8}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x = (2x^2 - 3x + 4) - (2x^2 + x + 3) = (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3})(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \sqrt{2x^2 + x + 3} \\ \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 \end{cases}$$

1.  $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \sqrt{2x^2 + x + 3}$

$\sqrt{x}$  строго возрастает на  $D(\sqrt{x}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3 \Rightarrow 1 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0,25$$

2.  ~~$2x^2 - 3x + 4$~~  Пусть  $a(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ;  $b(x) =$

$$= 2x^2 + x + 3, \text{ тогда м.к. } a(x) \geq \frac{23}{8} > 1; \text{ и } b(x) >$$

$$> 1, \text{ то } \sqrt{a} > 1; \text{ и } \sqrt{b} > 1 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > 2,$$

т.е. решений нет  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$  нет.

Ответ:  $x = 0,25$ .



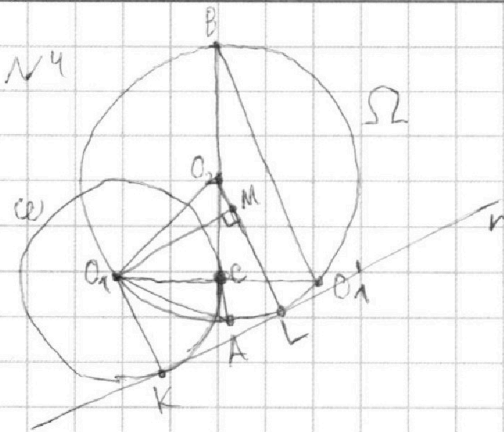
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. Пусть  $O_1$  — центр  $\omega$ ,  
 $O_2$  — центр  $\Omega$ , продолже-  
 ние  $O_1C$  за т.  $C \cap \Omega = O'_1$ ,  
 общ. кас. к  $\omega$  и  $\Omega$  — прямая  
 $v$ ,  $v \cap \omega = K$ ,  $v \cap \Omega = L$ ,  $M \in O_2L$ ,

при этом  $O_1M \perp O_2L$ .

2.  $\angle BO'_1O_1 = \sphericalangle O_1B$  (насколько  $\alpha$  дуга, дуга  $KY$  обозна-  
 чается как  $\sphericalangle XY$ )  $\cdot \frac{1}{2} = \angle O_1AB$ ,  $\angle O_1CA$  и  $\angle BCO'_1$  —  
 вертикальные  $\Rightarrow \angle O_1CA = \angle BCO'_1 \Rightarrow \triangle O_1CA \sim$   
 $\triangle BCO'_1$  (кажется, так обозначается подобие)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{BC}{CO'_1} = \frac{O_1C}{CA} \Rightarrow O_1C \cdot CO'_1 = BC \cdot CA = 4 \cdot 16 = 16$

3.  $O_1C$  — радиус  $\omega$ , проведенный к касательной  $v$   
 $\Rightarrow \angle O_2CB = 90^\circ \Rightarrow O_1$  и  $O'_1$  симметричны относительно  $AB$ ,  
 т.к.  $\Omega$  симметрична себе относительно  $AB \Rightarrow O_1C = O'_1C =$   
 $= \sqrt{16}$  по п. 2  $= 4 \Rightarrow$  радиус  $\omega = 4$ , а радиус  $\Omega = \frac{16+4}{2} =$   
 $= 8,5$ .

4.  $O_1K$  и  $O_2L$  — радиусы, проведенные к кас.  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow O_1K \perp v$ ,  $O_2L \perp v$ ,  $O_1M \perp O_2L \Rightarrow \angle O_1KO_1M = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow O_1MLK$  — прямая  $\Rightarrow O_1M = KL$ ,  $O_1K = ML$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5. O_2M = O_2L - ML = O_2L - O_1K = 8,5 - 4 = 4,5;$$

$$O_2O_1 = \text{радиус } \Omega L = 8,5 \Rightarrow KL = O_1M = \sqrt{O_2O_1^2 - O_2M^2} \\ = \sqrt{8,5^2 - 4,5^2} = \sqrt{72,25 - 20,25} = \sqrt{52}.$$

Ответ:  $\sqrt{52}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

$$Z = 3x + 2y \Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = \frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3x+2y}$$
$$= \frac{9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 2xy}{3x^2y + 2xy^2} = \frac{9xy + 6y^2 + 3x^2}{3x^2y + 2xy^2} =$$

$$= \frac{\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} + 2}{3(x^2y + 2xy^2) \cdot y^2} = 0 \text{ по условию} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} + 2 = 0$$

Замена: пусть  $t = \frac{x}{y}$ , тогда  $t^2 = \frac{x^2}{y^2}$ , тогда:

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$(t+1)(t+2) = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

Случай первый:  $x = -y$ :

$$Z = -3y + 2y = -y \Rightarrow \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

Случай второй:  $x = -2y$ :

$$Z = -6y + 2y = -4y \Rightarrow x^2 = 4y^2; z^2 = 16y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

$\frac{2}{5} < 4 \Rightarrow$  максимум выражения  $= 4$  при  $x = -2y$ ,  $z = 4y$ , тогда всегда выполняется, и  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 4$

Ответ: 4.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть  $v_1, v_2, S$  — скорости велосипедиста, скорости мотоциклиста и расстояние между А и В соотв. Тогда известно, что  $v_1, v_2, S$  — это действительные неотрицательные числа,  $v_1, v_2$  выражены в  $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ,  $S$  выражено в км,  $v_1, v_2 > 0$ . Известно, что:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 2 \\ \frac{Sv_2}{v_1} = \frac{Sv_1}{v_2} + 36 \\ \frac{S}{v_1+6} = \frac{S}{v_2+6} + 1,25 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 2 \Rightarrow \frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_2} = 2 \Rightarrow S(v_2 - v_1) = 2v_1v_2.$$

$$\text{Также } \frac{Sv_2}{v_1} = \frac{Sv_1}{v_2} + 36 \Rightarrow S\left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2}\right) = 36 \Rightarrow S(v_2^2 - v_1^2) = 36v_1v_2 \Rightarrow S(v_2 - v_1) = \frac{36v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

$$\begin{cases} S(v_2 - v_1) = 2v_1v_2 \\ S(v_2 - v_1) = \frac{36v_1v_2}{v_1 + v_2} \end{cases} \Rightarrow 2v_1v_2 = 36 \frac{v_1v_2}{v_1 + v_2} \Rightarrow 1 = \frac{48}{v_1 + v_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 = 48.$$

$$\text{Также } S\left(\frac{1}{v_1+6} - \frac{1}{v_2+6}\right) = 1,25 \Rightarrow S(v_2+6 - v_1+6) =$$

$$= 1,25(v_1+6)(v_2+6) = 1,25(v_1v_2 + 6(v_1+v_2) + 36) =$$

$$= 1,25v_1v_2 + 1,25(6 \cdot 48 + 36) = 1,25v_1v_2 + 405 \Rightarrow S(v_2+6) =$$

$$= 1,25v_1v_2 + 405$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} S(V_2^2 - V_1^2) = 1,25 V_1 V_2 + 405 \\ S(V_2 - V_1) = 2 V_1 V_2 \end{cases} \Rightarrow 0,75 V_1 V_2 = 405 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 V_2 = 540$$

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 48 \\ V_1 V_2 = 540 \end{cases} \Rightarrow V_1^2 + V_2^2 = (V_1 + V_2)^2 - 2 V_1 V_2 = 48^2 - 2 \cdot 540 =$$

$$= 1224 \Rightarrow (V_2 - V_1)^2 = 1224 - 2 V_1 V_2 = 1224 - 1080 = 144 =$$

$$144 \Rightarrow \begin{cases} V_1 - V_2 = 12 \\ V_1 - V_2 = -12 \end{cases}$$

$$S(V_2 - V_1) = 2 V_1 V_2 = 1080 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{1080}{12} = 90 \\ S = \frac{1080}{-12} = -90 \Rightarrow S = 90 \\ S \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: 90.

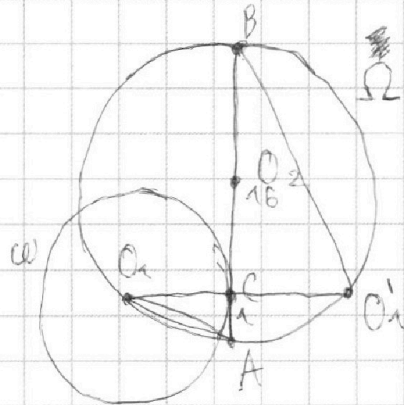
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(8 + 0,5)^2 = 8^2 + 64 + 0,25 = 72,25$$

$$(4 + 0,5)^2 = 16 + 4 + 0,25 = 20,25$$

$$I - II = 52$$

$$d = 2 \left( (x + 0,5)^2 + (1,5 - \frac{1}{16}) \right) \geq$$

$$x = 2$$

$$y = -0,5$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{-1} - \frac{2}{4} =$$

$$1,5 - 1 - 0,5 = 0$$

$$= -6 \cdot 25 = -150$$

$$\frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 4}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x = 2$$

$$y = -1$$

$$z = 4$$

~~1~~

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{-1} - \frac{2}{4} =$$

$$25 - 2 \cdot 8 - 8 \cdot 25 = -150$$

$$\frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 4}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = \frac{2x^2 - 3x + 4 - 2x^2 - x - 3}{\sqrt{2x^2 + x + 3} + \sqrt{2x^2 - 3x + 4}} \neq \frac{1 - 4x}{\dots} = 1 - 4x \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$x \pm \sqrt{2x^2 + x + 3} + \sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1$$

$$a + b = m - k$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = m \cdot l$$

$$x = -0,25$$

$$(a+b)^2 - 2ab = m \cdot (mk^2) \cdot$$

$$- 2ab \Rightarrow 2ab = m \cdot n$$



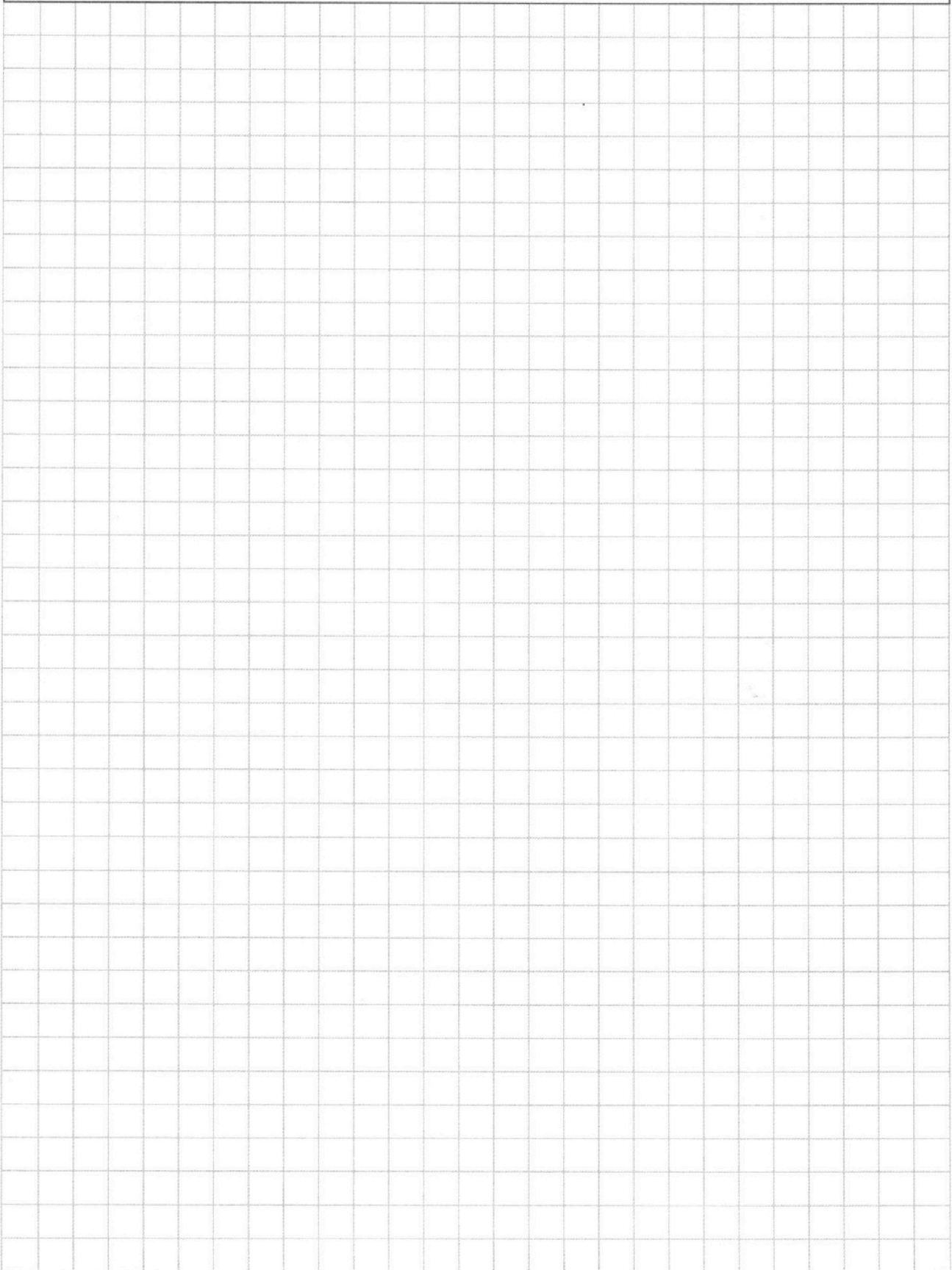
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



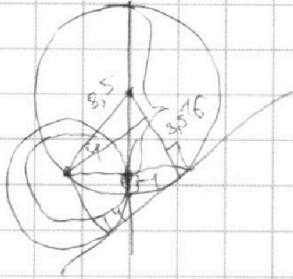
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2}{3x+2y} = \frac{3}{x} + \frac{1}{y} \quad | \cdot (3x^2y + 2xy^2)$$

$$2xy = 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy$$

$$3x^2 + 8xy + 6y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x + \sqrt{2}y)^2 + (3 - 2\sqrt{2})xy = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - 2z =$$

$$= 3x^2 - 4y^2 - (3x+2y)^2 = 3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 12xy - 4y^2 = -6x^2 - 12xy - 8y^2$$

$$= -6(x^2 + 2xy)$$

$$\frac{x^2 + 2xy}{x^2 - 6y^2} = -6 \quad | \cdot (x^2 - 6y^2)$$

$$x^2 + 2xy = -6(x^2 - 6y^2)$$

$$\frac{2y^2 + xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 + 6xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{2y^2 + xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 + 6xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{2y^2 + xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 + 6xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{y^2 + 6xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 + 6xy}{x^2 - 6y^2}$$

$$1 - x = y$$

$$6 \frac{(xy + 2y^2)}{x^2 - 6y^2}$$

$$t = \frac{x}{y} \quad t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$2,25 = 6,25$$

$$6 \frac{-x^2 + 2xx^2}{x^2 - 6x^2} =$$

$$(k+1,5)^2 = 0,25 \quad (t+1,5)^2 = 0,25$$

$$= 0,25 \quad t = -1,5 \pm 0,5$$

$$\frac{x^2}{-5x^2} = \frac{1}{-5}$$

$$z = -4y^2$$

$$xy = -2y^2$$

$$x^2 = 4y^2 \quad z^2 = 16y^2$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

$$2 \cdot x = -2y$$

$$x = ky$$

$$z = 8k^2 y(3k+2)$$

$$\frac{-2y^2 + 2y^2}{4y^2 - 6y^2} = 6 \cdot \frac{0}{-2y^2} = 0$$

$$\frac{3k^2 + 2k}{3k^2 + 2k} = \frac{2}{3k+2}$$

$$3k^2 + 2k = 2(3k^2 + 2k)$$

$$3k^2 + 2k = 6k^2 + 4k$$

$$-3k^2 - 2k = 0$$

$$k^2 + \frac{2}{3}k = 0$$

$$0 = \frac{1}{k} + \frac{3}{k} + \frac{1}{3k+2} = 0$$

$$k = -2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 3^k \neq 1 \quad b = 3^m \neq 1 \quad c = 3^p \neq 1 \neq q$$

$$k+m+p \geq 11 \quad 3^{11} \cdot 48 = 3^{k+m+p} \geq \frac{11+13+21}{2} = 525$$

$$am+pr \geq 18 = 240+18+ \quad abc : 3^{25}$$

$$k+p \geq 2 \cdot 1 + 36 = 324$$

$$l+n \geq 11 \quad 324 - 125 = 199 \Rightarrow l+n+q \geq \frac{11+16+38}{2} = 32,5 \Leftrightarrow l+n+q \geq 33$$

$$n+q \geq 16 = 324 + 81 = 405 \Rightarrow l+q \geq 33$$

$$l+q \geq 33 \quad abc : 3^{25} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 33$$

$$\begin{cases} k=7 \\ p=14 \\ m=4 \\ l=14 \\ q=14 \\ n=0 \end{cases} \begin{aligned} (V_1+V_2)^2 &= 2504 \\ &= V_1^2+V_2^2+2 \cdot 105 \\ &= V_1^2+V_2^2+1080 \\ V_1^2+V_2^2 &= 2304-1080=1224 \\ (V_1-V_2)^2 &= 1224 \\ V_1-V_2 &= 35 \\ -2 \cdot 540 &= -1080 \end{aligned}$$

$$a^2 - 8ab + b^2 = (a+b)^2 - 10ab$$

$$HOA(a,b) = 1 \quad \frac{5}{8} > \frac{13}{-239} \quad \times 400 - 169 = 231$$

$$a+b=k \quad ab = \frac{ab}{a+b} \cdot (a+b)$$

$$\begin{aligned} 10ab &: a+b \\ 10ab &= ka + kb \end{aligned}$$

№6 **возможна велосистема** →  
→ **возможна математическая**

$$k-10l$$

$$k \rightarrow \text{каким } l = k - \frac{k-1}{k}$$

$$k-1 \Rightarrow k-10l \leq -9k+10 \leq$$

$$l \geq \frac{k-1}{k} \Rightarrow k-10l \leq \frac{k^2-10k+10}{k} = \frac{(k-5)^2-15}{k}$$

$$(k-5)^2 - 15 \geq 0 \quad V_1=18 \quad t_1=5 \quad S=90$$

$$V_2=30 \quad t_2=3 \quad S=90$$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} \leq \frac{k}{(k-5)^2-15} = \frac{(k-5)^2-15}{k}$$

$$3x+2y=2 \quad 3y+z+xz=2xy \quad z=-1$$

$$3x+2y+z=0 \quad 3yz+xz+2xy=0 \quad 3y^2+2xy+xz=0$$

$$3x^2=4y^2-z^2 \quad x^2-6y^2=1 \quad 7,5(V_1+V_2) = 7,5 \cdot 48 = 360$$

$$t_1+t_2 = \frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2} \quad t_1+t_2 = t_2+2$$

$$V_1 t_2 + 36 = V_2 t_1 \quad \frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} + 5,125$$

$$\begin{array}{r} 5625 \\ 3330 \\ 10000 \\ -5625 \\ \hline 4345 \end{array}$$

$$723 = 540 + 180 \quad 540 + 240 = 780$$

$$g_6 = S \cdot \left( \frac{V_2^2 - V_1^2}{V_1 V_2} \right) = S \cdot \left( \frac{(V_1+V_2)(V_2-V_1)}{V_1 V_2} \right)$$

$$S(V_2 - V_1) = \frac{g_6}{V_1+V_2} \cdot V_1 V_2$$

$$\frac{S(V_2 - V_1)}{V_1 V_2} = \frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2} = 2$$

$$1,25 = \frac{S}{V_1+6} - \frac{S}{V_2+6} = \frac{S(V_2 - V_1)}{V_1 V_2 + 6(V_1+V_2) + 36}$$

$$S(V_2 - V_1) = 1,25 V_1 V_2 + 7,5 V_1 + 4,5 V_2 + 45$$