



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже ~~велосипедиста~~ ^{мотоциклиста}. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка:

11.

Известно, что:

$$\begin{cases} ab: 3^{11} \\ ac: 3^{21} \\ bc: 3^{18} \end{cases}$$

При перемножении получим: $abc: 3^{11} \cdot 3^{21} \cdot 3^{18}$

$$a^2 b^2 c^2: 3^{50}$$

$$abc: 3^{25}$$

Также, т.к. $ac: 7^{38} \Rightarrow abc: 7^{38}$

Т.к. $\text{НОД}(3^{25}, 7^{38}) = 1$, при этом abc делится на оба этих числа,
то $abc: 3^{25} \cdot 7^{38}$

$$\text{т.е. } abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

Пример:

$$\begin{aligned} a &= 7^{19} \cdot 3^7 \\ b &= 3^4 \\ c &= 7^{19} \cdot 3^{14} \end{aligned}$$

$$ab = 7^{19} \cdot 3^{11} : 3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$ac = 7^{38} \cdot 3^{21} : 7^{38} \cdot 3^{21}$$

$$bc = 7^{19} \cdot 3^{18} : 3^{18} \cdot 7^{19}$$

$$abc = 7^{19} \cdot 3^7 \cdot 3^4 \cdot 7^{19} \cdot 3^{14} = 7^{38} \cdot 3^{25}, \text{ что и требовалось.}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 7^{38}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка:

№2.

Пусть есть такое m , что:

$$\begin{cases} a+b \div m \\ a^2-8ab+b^2 \div m \end{cases}$$

$$a+b \div m \Rightarrow (a+b)^2 \div m \Rightarrow a^2+2ab+b^2 \div m$$

Т.к. $a^2+2ab+b^2 \div m$ и $a^2-8ab+b^2 \div m$, то их разность тоже $\div m$.

$$\text{Т.е. : } (a^2+2ab+b^2) - (a^2-8ab+b^2) \div m \Rightarrow 10ab \div m$$

Пусть $\text{НОД}(a, m) = d > 1$. Т.к. $a+b \div m$ и $m \div d$, то $a+b \div d$.

Но т.к. $a \div d$ и $a+b \div d$, то и $b \div d$, что противоречит тому, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима (и в таком случае можно сократить на d).

Значит, числа a и m взаимно просты. Аналогично, b и m взаимно просты.

Так. $10ab \div m$, но $\text{НОД}(ab, m) = 1$, то $10 \div m$. Значит, $m \leq 10$.

Пример: $a=7, b=3$; $\frac{7}{3}$ - несократимая дробь

$$\frac{7+3}{7^2-168+3^2} = \frac{10}{110} - \text{эту дробь можно сократить на } 10,$$

это и требовалось.

Ответ: $m=10$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3.

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3} - \sqrt{2x^2-3x+4} = 4x-1$$

Заметим, что $(2x^2+x+3) - (2x^2-3x+4) = 4x-1$

Пусть $2x^2-3x+4 = a$, $2x^2+x+3 = b$

Пусть $2x^2+x+3 = a$; $2x^2-3x+4 = b$. Получим уравнение

~~получим уравнение~~

Т.к. $2x^2+x+3$ — парабола с ветвями вверх, её минимум в вершине:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Значит, миним. значение будет: $2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3 = 2\frac{7}{8}$

Аналогично, минимум функции $2x^2-3x+4$ будет в вершине:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$$

Значит, миним. значение будет: $2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 4 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 4 = 4 - \frac{9}{8} = 2\frac{7}{8}$

Т.е. получается, что $a \geq 2\frac{7}{8}$ и $b \geq 2\frac{7}{8}$

Уравнение будет таким:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a}(\sqrt{a}-1) = \sqrt{b}(\sqrt{b}-1)$$

Т.к. $a > 1$ и $b > 1$, с ростом a \sqrt{a} растёт и $\sqrt{a}-1$ растёт,
т.е. левая часть возрастающая, где b аналогично. Значит, из равенства
выше следует, что $a = b$.

То есть:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3$$

$$-3x + 4 = x + 3$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Т.е. единственное x , которое может быть корнем, это $x = \frac{1}{4}$.

$$\text{Проверим: } \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{3}{8}} = 0$$

$$1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Т.е. $x = \frac{1}{4}$ подходит.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

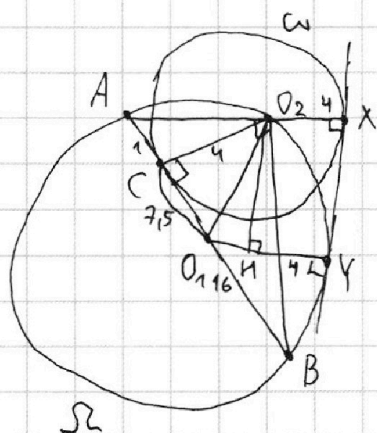
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.



O_1 - центр Ω ; O_2 - центр ω

XY - общая касательная

Т.к. AB - диаметр $\angle AO_2B = 90^\circ$

Т.к. AB касается ω в точке C , то $\angle O_2CB = 90^\circ$

Т.е. O_2C - высота в прямоугольном $\triangle AO_2B$

Тогда, $O_2C = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{1 \cdot 16} = 4 \Rightarrow$ радиус ω равен 4

При этом, радиус Ω равен $\frac{AC+BC}{2} = \frac{1+17}{2} = 8,5$

В прямоугольном $\triangle O_1O_2C$: $O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2$

$$O_1C = O_1A - AC = 8,5 - 1 = 7,5$$

$$O_1O_2^2 = 4^2 + 7,5^2 = 16 + \frac{225}{4} = \frac{225+64}{4} = \frac{289}{4}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{\sqrt{289}}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$$

Т.к. O_1, O_2 - радиус Ω , то $O_1O_2 = 8,5$

Т.к. XY - общая касательная, то $\angle O_2 \perp XY = \angle O_1YX = 90^\circ$

O_2H - перпенд. из O_2 на O_1Y .

Т.к. O_2XYH - прямоугольник $\Rightarrow HY = O_2X = 4$, $O_2H = XY$

$$O_2H = O_1Y - HY = 8,5 - 4 = 4,5$$

$$\text{В прямоугол. } \triangle O_1H O_2: O_1H^2 + O_2H^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow O_2H^2 = O_1O_2^2 - O_1H^2 = 8,5^2 - 4,5^2 = (8,5-4,5)(8,5+4,5) = 4 \cdot 13$$

$$\text{Тогда, } O_2H = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13} \Rightarrow XY = 2\sqrt{13}$$

Ответ: $2\sqrt{13}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$2xy = 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy$$

$$3x^2 + 6y^2 + 9xy = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$(x+y)(x+2y) = 0$$

$$x = -y \text{ или } x = -2y$$

↓

$$(1) z = -3y + 2y = -y$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

$$(2) x = -2y \Rightarrow z = -6y + 2y = -4y$$

$$\frac{3 \cdot (-2y)^2 - 4y^2 - (-4y)^2}{(-2y)^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

Т.к. $4 > \frac{2}{5}$, то максимальное значение искомого выражения будет 4. Оно достигается, например, при $x = -2; y = 1; z = -4$.

Проверка: $3 \cdot (-2) + 2 = -4 \rightarrow$ верно

$$\frac{3}{-2} + \frac{1}{1} = \frac{2}{-4} \rightarrow \text{верно}$$

$$\frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 16}{4 - 6} = \frac{12 - 20}{-2} = \frac{8}{-2} = -4, \text{ что так и требовалось}$$

ответ: 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Пусть S - расст. между пунктами, x - скоростью велосипедиста,
 y - скорость мотоциклиста. S - в км; x, y - в км/ч.

Из первого условия, что один проехал в пункт В на 2 ч раньше
группы: $\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2$

Из второго условия, что один проехал бы на 96 км больше
группы, получаем:

$$x \cdot \frac{S}{y} + 96 = y \cdot \frac{S}{x}$$

Из третьего условия, что при увеличении скорости получили:

$$\frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,25$$

Итого:
$$\begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2 & (1) \\ \frac{Sx}{y} + 96 = \frac{Sy}{x} & (2) \\ \frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,25 & (3) \end{cases} \quad S = ?$$

$$(1) \quad \frac{S}{x} - \frac{S}{y} = 2 \Rightarrow S = \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{y-x}$$

$$(2) \quad \frac{Sx}{y} + 96 = \frac{Sy}{x}$$

$$\frac{2xy \cdot x}{(y-x) \cdot y} + 96 = \frac{2xy \cdot y}{(y-x) \cdot x}$$

$$\frac{2x^2}{y-x} + 96 = \frac{2xy^2}{y-x} \quad | \cdot (y-x), \text{ т.к. } y > x, \text{ то } y-x \neq 0$$

$$2x^2 + 96(y-x) = 2y^2$$

$$x^2 + 48(y-x) = y^2$$

$$y^2 - x^2 = 48(y-x)$$

$$(y-x)(y+x) = 48(y-x)$$

$$\boxed{y+x=48}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Выгнем из (1) уравнение (3):

$$\left(\frac{s}{x} - \frac{s}{x+6}\right) = \left(\frac{s}{y} - \frac{s}{y+6}\right) + 0,75$$

$$\frac{6s}{x(x+6)} = \frac{6s}{y(y+6)} + 0,75 \quad | :6$$

$$\frac{s}{x(x+6)} - \frac{s}{y(y+6)} = \frac{1}{8} \quad (\text{подставим } s = \frac{2xy}{y-x})$$

$$\frac{2xy}{x(x+6)(y-x)} - \frac{2xy}{y(y+6)(y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2xy(y+6) \cdot y - 2xy \cdot x(x+6)}{x(x+6)(y+6) \cdot y \cdot (y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2xy(y^2+6y-x^2-6x)}{xy(x+6)(y+6)(y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2(y-x)(y+x+6)}{(x+6)(y+6)(y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2(y+x+6)}{(x+6)(y+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{y+x+6}{(x+6)(y+6)} = \frac{1}{16} \quad (\text{подставим } x+y=48)$$

$$\frac{54}{(x+6)(y+6)} = \frac{1}{16}$$

$$(x+6)(y+6) = 54 \cdot 16$$

$$xy + 6(x+y) + 36 = 54 \cdot 16 \quad (\text{подставим } x+y=48)$$

$$xy = 54 \cdot 16 - 6 \cdot 48 - 36 = 540$$

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} x+y=48 \\ xy=540 \end{cases}$$

$$x(48-x) = 540 \Rightarrow -x^2 + 48x - 540 = 0 \Rightarrow x^2 - 48x + 540 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 48^2 - 2160 = 2304 - 2160 = 144$$

$$x = \frac{48 \pm 12}{2}$$

$$x = 30 \text{ км} \quad x = 18$$

$$\downarrow$$
$$y = 18$$

$$\downarrow$$
$$y = 30$$

По т.к. $y > x$, то $y = 30$ и $x = 18$.

$$S = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30 - 18} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{12} = 90 \text{ (км)}$$

Ответ: 90 км



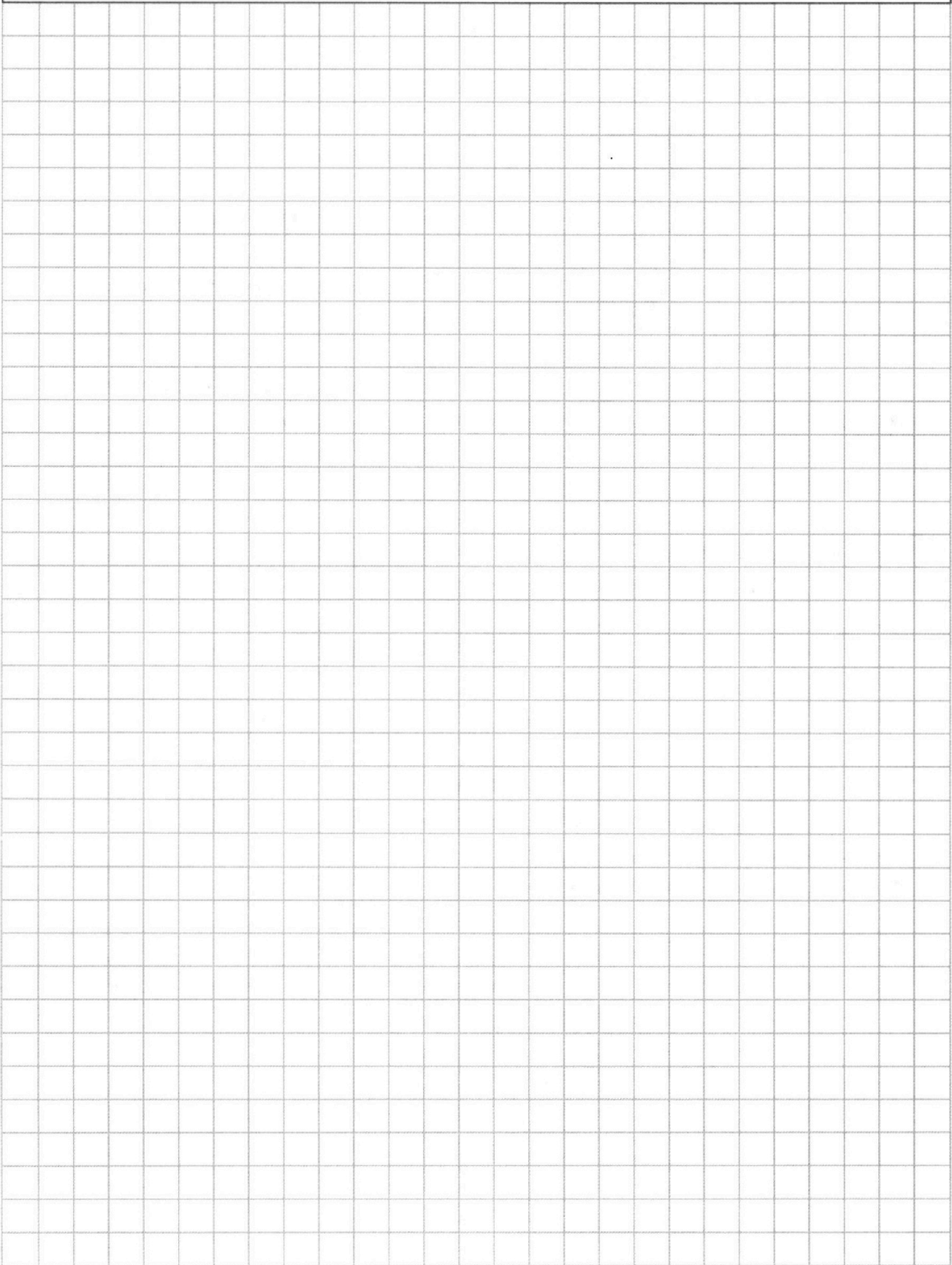
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





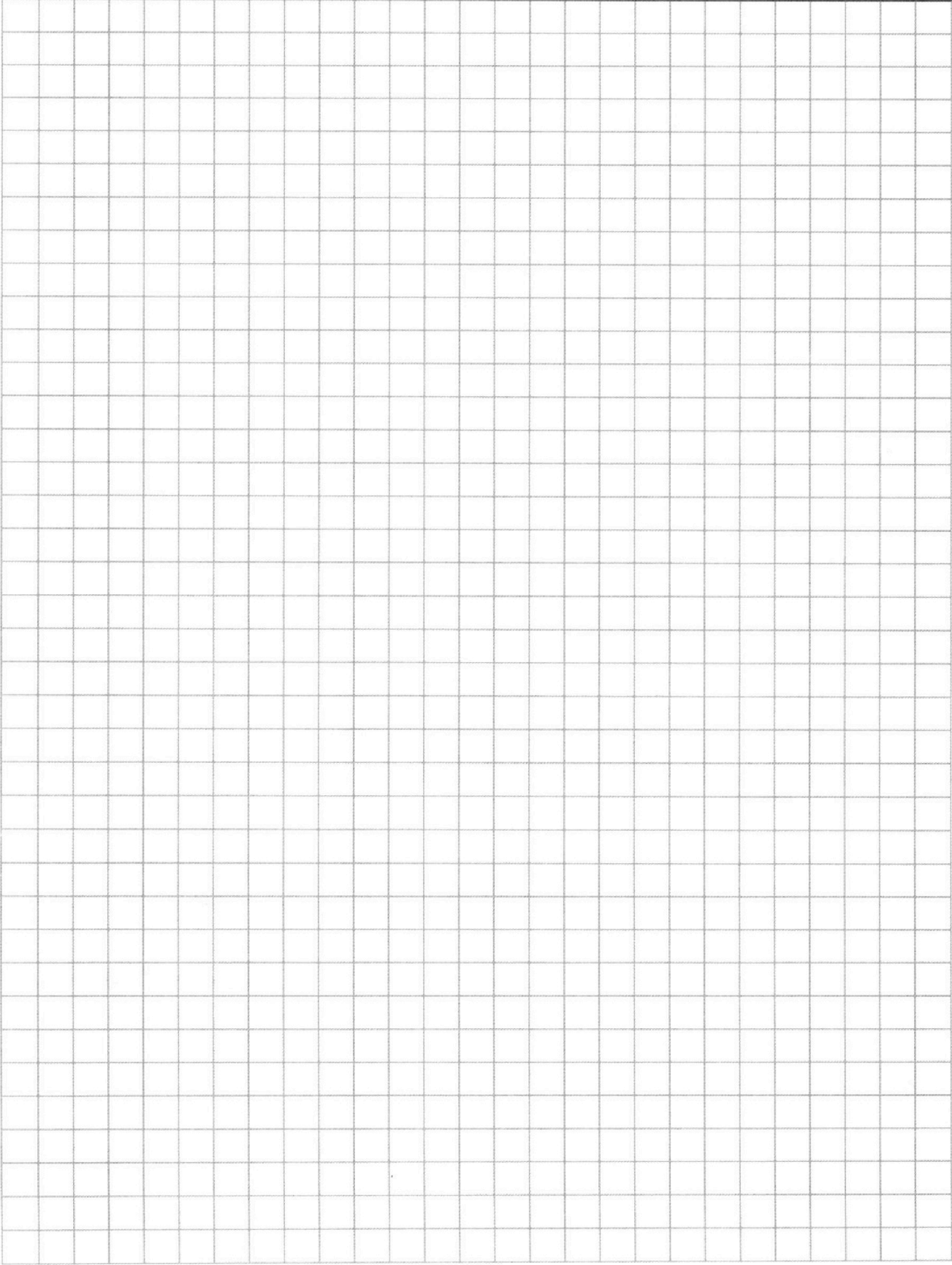
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





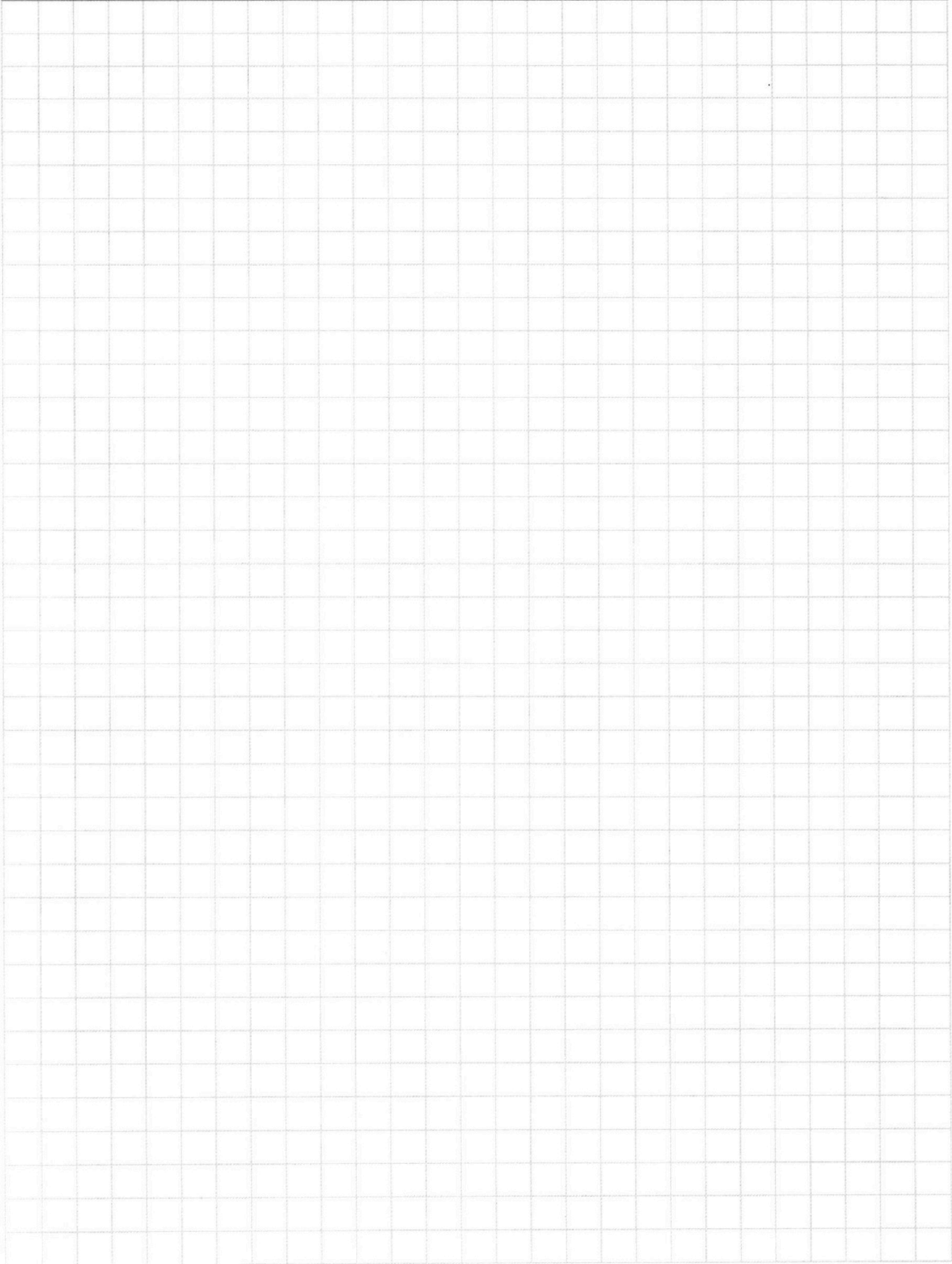
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2 \\ \frac{Sx}{y} + 96 = \frac{54}{x} \\ \frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,25 \end{cases}$$

$$\frac{2xy}{x+y} = \frac{2xy}{x+y}$$

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{y} = 2$$

$$S\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 2$$

$$S\left(\frac{y-x}{xy}\right) = 2 \Rightarrow S = \frac{2xy}{y-x}$$

$$\frac{2xy \cdot x}{y(x-y)} + 96 = \frac{2xy \cdot y}{x(y-x)}$$

$$\frac{2x^2}{y-x} + 96 = \frac{2y^2}{y-x} \quad | \cdot (y-x)$$

$$2x^2 + 96(y-x) = 2y^2 \quad | :2$$

$$x^2 + 48(y-x) = y^2$$

$$48(y-x) = (y-x)(y+x) \quad | : (y-x)$$

$$y+x = 48 \Rightarrow y = 48-x$$

$$\frac{2x(48-x)}{(48-2x)(x+6)} = \frac{2x(48-x)}{(48-2x)(54-x)} + 1,25 \quad | \cdot (48-2x)(x+6)(54-x)$$

$$2x(48-x)(54-x) = 2x(48-x)(x+6) + 1,25(48-2x)(x+6)(54-x)$$

$$2x(48-x)(48-2x) = 1,25(48-2x)(x+6)(54-x)$$

$$2x(48-x) = 1,25(x+6)(54-x)$$

$$-2x^2 + 96x = -1,15x^2 + 60x + 75$$

$$0,75x^2 - 36x + 75 = 0$$

$$3x^2 - 144x + 300 = 0$$

$$D = 144^2 - 4 \cdot 300 \cdot 3 = 20736 - 3600 = 17136$$

$$= 17136$$

$$\begin{cases} xy = 540 \\ x+y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ 16 \\ \hline 324 \\ 54 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 864 \\ -288 \\ \hline 576 \\ 576 - 36 \cdot 2 \\ \hline = 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 146 \\ 146 \\ \hline 2876 \\ 584 \\ \hline 146 \\ \hline 21316 \end{array}$$

$$124x$$

$$144^2 - 60^2 = x^2$$

$$x^2 + 60^2 = 144^2$$

$$\left(\frac{x}{6}\right)^2 + 5^2 = 12^2$$

$$48^2 - t^2 = 4 \cdot 540$$

$$t^2 = 48 \cdot 48 - 2160 = 2304 - 2160 = 144 \quad t = 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2$$

$$\frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,25$$

$$Sy + 6S = Sx + 6S + (x+6)(y+6) \cdot 1,25$$

$$Sy = Sx + 1,25xy + 9x + 9y + 45$$

$$y-x = \frac{1,25xy + 9x + 9y + 45}{S} = \frac{(1,25xy + 9x + 9y)(y-x)}{2xy} \stackrel{1}{=} \frac{320 + 64 + 1600 + 320}{2280 + 2304}$$

$$S = \frac{2xy}{y-x}$$

$$2xy + 9x + 9y + 45 = 2xy$$

$$\boxed{x+y=48}$$

$$\frac{Sy}{x} = \frac{Sx}{y} + 96$$

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{48-x} + 2$$

$$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2 \cdot 108}{\sqrt{1872}} = \frac{2 \cdot 108}{2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{13}} = \frac{108}{6\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{6S}{x(x+6)} = \frac{6S}{y(y+6)} + 1,25$$

$$\frac{2304}{432} = \frac{2304}{1872}$$

$$\frac{S}{x(x+6)} - \frac{S}{y(y+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2xy}{x(x+6)(y-x)} - \frac{2xy}{y(y+6)(y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$y = -6 - x$$

$$\frac{386}{108} = \frac{222}{108}$$

$$\frac{2xy(y+6)y - 2xy \cdot x(x+6)}{x(x+6)(y-x)y(y+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{y=x}$$

$$y^2 + 6y - (x^2 - 6x) = 0$$

$$y^2 + 6y - (x^2 - 6x) = 0$$

$$xy = 108$$

$$\frac{2xy(y^2 + 6y - x^2 - 6x)}{xy(x+6)(y+6)(y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$(y-x)(y+x+6) = 0$$

$$y^2 + x(y+6) - x^2 - 6x = 0$$

$$\begin{aligned} 48^2 - t^2 &= 4 \cdot 108 \\ t^2 &= 2304 - 432 = 1872 \\ t &= \sqrt{1872} \end{aligned}$$

$$\frac{y^2 + 6y - x^2 - 6x}{(x+6)(y+6)(y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{(y-x)(y+x+6)}{(x+6)(y+6)(y-x)} = \frac{1}{8}$$

$$x^2 - 48x + 108 = 0$$

$$\Delta = 48^2 - 432 = 2304 - 432 = 1872$$

$$x+y=48$$

$$8 \cdot 54 = (x+6)(54-x)$$

$$-x^2 + 48x + 6 \cdot 54 = 8 \cdot 54$$

$$(x+6)(y+6) = 8 \cdot 54$$

$$-x^2 + 48x - 2 \cdot 54 = 0 \Rightarrow x^2 - 48x + 2 \cdot 54 = 0$$

$$\begin{aligned} xy + 6(x+y) + 36 &= 432 \\ x + 6 \cdot 48 &= 396 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№6.

Пусть расстояние между пунктами — S , скорость велосипедиста — x , а скорость мотоциклиста — y .

Из первого условия, что один прибывает в пункт B на 2 з раньше второго, получаем: $\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2$ (1)

Из второго условия, что один проехал бы на 96 км больше другого, получаем: $x \cdot \frac{S}{y} = y \cdot \frac{S}{x} - 96$ (2)

Из третьего условия про увеличение скорости получаем:

$$\frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,25$$
 (3)

Итого:
$$\begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2 & (1) \\ \frac{xS}{y} + 96 = \frac{yS}{x} & (2) \\ \frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,25 & (3) \end{cases}$$

Выразим x из (1): $\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2 \mid \cdot xy, xy \neq 0$

$$Sy = Sx + 2xy$$

$$Sy = x(S + 2y)$$

$$x = \frac{Sy}{S + 2y}$$

Подставим это в (2): $\frac{Sy \cdot S}{y(S + 2y)} + 96 = \frac{yS(S + 2y)}{Sy}$

$$\frac{S^2}{S + 2y} = S + 2y + 96 = (S + 2y) + 96 \mid \cdot (S + 2y), S + 2y > 0 \Rightarrow S + 2y \neq 0$$

$$S^2 + 96(S + 2y) = (S + 2y)^2$$

$$S^2 + 96S + 192y = S^2 + 4Sy + 4y^2$$

$$96S + 192y = 4Sy + 4y^2$$

$$96S - 4Sy = 4y^2 - 192y \mid y \neq 24, \div 4y$$

$$S = \frac{4y^2 - 192y}{96 - 4y} = \frac{2y^2 - 96y}{48 - 2y} = \frac{y^2 - 48y}{24 - y}$$

Выразим теперь x : $x = \frac{(y^2 - 192y) \cdot y \cdot (96 - 4y)}{(96 - 4y)(4y^2 - 192y + 2y(96 - 4y))} = \frac{(y^2 - 192y)y}{4y^2 - 192y + 2y(96 - 4y)}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{y^2 - 192y}{4y - 192 + 192 - 8y} = \frac{y^2 - 192y}{-4y} = \frac{y - 192}{-4} = \frac{192 - y}{4}$$

Подставим всё это в уравнение (3):

$$\frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,25 \quad | \cdot (x+6)(y+6)$$

$$S(y+6) = S(x+6) + 1,25(x+6)(y+6)$$

$$S(y-x) = 1,25(x+6)(y+6) \cdot 4$$

$$4S(y-x) = 5(x+6)(y+6)$$

$$4 \cdot \frac{y^2 - 48y}{24 - y} = 5 \left(\frac{216 - y}{4} \right) \cdot (y+6)$$

$$\frac{4y^2 - 192y}{24 - y} = \frac{5}{4} \cdot (y+6)(216 - y)$$

$$4y^2 - 192y = \frac{5}{4} \cdot (y+6)(216 - y)(24 - y)$$

$$4y^2 - 192y = \frac{5}{4} (-y^2 + 8y + 144)(216 - y)$$

$$4y^2 - 192y = \frac{5}{4} (y^3 - 8y^2 - 144y - 216y^2 + 216 \cdot 8y + 216 \cdot 144)$$

$$4y^2 - 192y = \frac{5}{4} (y^3 - 224y^2 + 1584y + 216 \cdot 144)$$

$$4y^2 - 192y = \frac{5}{4} y^3 - 280y^2 + 1980y + 38880$$

$$\frac{5}{4} y^3 - 284y^2 + 2172y + 38880 = 0$$

Решив это уравнение, можем найти y , x и S .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 3^{12} \cdot 7^{16}$$

$$ac: 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$a^2 b^2 c^2: 3^{50} \cdot 7^{65}$$

$$a^2 b^2 c^2: 3^{50} \cdot 7^{66}$$

$$abc: 3^{25} \cdot 7^{33}$$

$$ab^2c: 7^{38}$$

$$ac: 7^{38}$$

$$a: 7^{19}$$

$$c: 7^{19}$$

$$b: 7$$

$$a^2 b^2 c^2: 7^{76}$$

$$abc: 7^{33}$$

$$a = 7^{19} \cdot 3^7$$

$$b = 3^7$$

$$c = 7^{19} \cdot 3^{14}$$

$$a = 7^{19} \cdot 3^7$$

$$b = 3^7$$

$$c = 7^{19} \cdot 3^{14}$$

$$a + b : m \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab : m$$

$$a^2 - 2ab + b^2 : m$$

$$\Rightarrow 10ab : m$$

$$5 \cdot 7, 3$$

$$10ab : m$$

$$a : d, m : d$$

$$a + b : d, b : d$$

$$a \perp m$$

$$b \perp m$$

$$10 : m$$

$$\max m = 10$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{5} - \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{6}{15} = \frac{6}{15} - \frac{2}{15}$$

$$150$$

$$54$$

$$f_{\max} = 3$$

$$f_{\min} = 5$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \alpha + \gamma = 18 \\ \beta + \gamma = 21 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 21 - \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \alpha + 21 - \beta = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \beta - \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\beta = \alpha + 3$$

$$\alpha + \alpha + 3 = 11$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = 7$$

$$\gamma = 14$$

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x + z = 16 \\ y + z = 38 \end{cases}$$

$$z = 38 - y$$

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x + 38 - y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y - x = 22 \end{cases}$$

$$y = 22 + x$$

$$22 + x + x = 12$$

$$x = -5$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \beta + \gamma = 18 \\ \alpha + \gamma = 21 \end{cases}$$

$$\gamma = 21 - \alpha$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \beta + 21 - \alpha = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 11 \\ \alpha - \beta = 3 \end{cases}$$

$$2\alpha - 3 = 11$$

$$2\alpha = 14$$

$$\alpha = 7$$

$$\beta = 4$$

$$\gamma = 14$$

$$a \perp b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

~~$$\sqrt{t} - \sqrt{t + 4x - 1} = 1 - 4x$$~~

$$\sqrt{t + 4x - 1} - \sqrt{t} = 4x - 1$$

M

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3$$

$$-3x + 4 = x + 3$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a - b$$

$$4x = 1$$

$$2\sqrt{ab} = 2b$$

$$x = 0,25$$

$$\sqrt{ab} = b$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 3$$

$a, b > 1$
орев $a = b$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$a = b$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab - a - b + 2\sqrt{ab} = 0$$

$$\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) = \sqrt{b}(\sqrt{b} - 1)$$

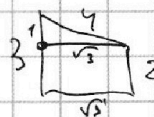
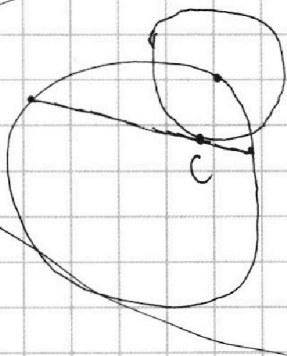
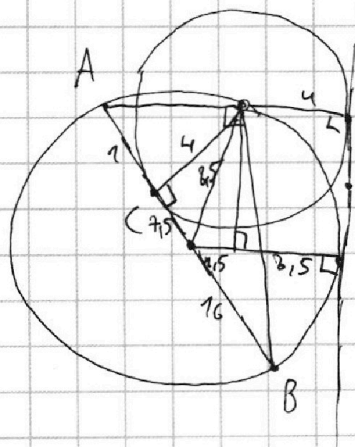
$$\begin{matrix} \sqrt{a} & \nearrow & 0 \\ \sqrt{a} & -1 & \uparrow & 0 \end{matrix}$$

$$2x^2 - 3x + 4$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 4 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 4 = \frac{9 - 18 + 32}{8} = \frac{23}{8} > 1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 4 > 0$$



$$85^2 = 40^2 + 75^2$$

$$85^2 - 75^2 = 40$$

$$10 \cdot (85 + 75) = 10 \cdot 160$$

$$85^2 = 45^2 + x^2$$

$$x^2 = 85^2 - 45^2 = 40 \cdot 130 =$$

$$x = 13 \cdot 400 \quad x = 20\sqrt{13}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10000 - 284 \cdot 400 + 2172 \cdot 20 + 33880 \stackrel{?}{=} 0$$

$$1000 - 284 \cdot 40 + 2172 \cdot 2 + 33880 \stackrel{?}{=} 0$$

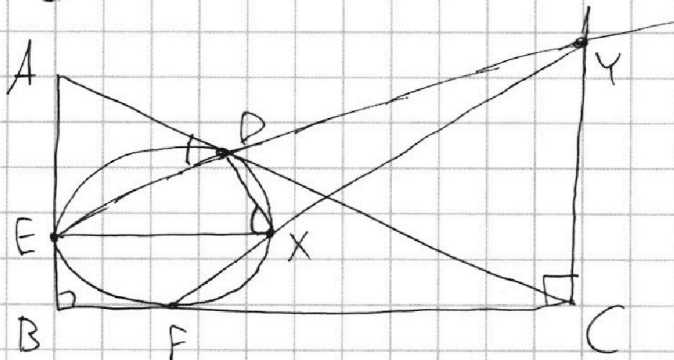
86

$$\frac{7344}{2} = 972$$

$$250 - 284 + 1086 + 972 = 0$$

$$\frac{15}{4}y^2 - 568y + 2172 = 0$$

$$15y^2 - 2272y + 8688 = 0$$



$$EX = 2\sqrt{2} \cdot XY$$

$$\frac{EX}{XY} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \cdot xy = z$$

$$3yz + xz = 2xy$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 \geq x^2 - 6y^2$$

$$2x^2 + z^2 \geq 2xy$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq z^2$$

$$3xy < 0$$

$$x > 0, y < 0$$

$$9x^2 + 4y^2 + 12xy = z^2$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$(x + \sqrt{2}y)^2 > 0$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x + 2y}$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{3x + 2y}$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$(x + \sqrt{2}y)^2 + (3 - 2\sqrt{2})xy = 0$$

$$(x + \sqrt{2}y)^2 < 0$$

$$2xy = 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy$$

$$6y^2 + 3x^2 + 9xy = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$(x + 2y)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} =$$

$$3x + 2y = 2$$

~~$$3x + 2y = 2$$~~

$$396 \times 5$$

$$\begin{matrix} 1500 \\ 450 \\ 90 \end{matrix}$$

$$1980$$

вел.

мот.

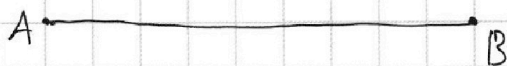
$$\begin{array}{r} 276 \\ \underline{8} \\ 1728 \\ - 144 \\ \hline 7584 \end{array}$$

скорость

x

y

$$\begin{aligned} &2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \\ &= 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5 \end{aligned}$$



$$\boxed{\frac{s}{x} = \frac{s}{y} + 2} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{s}{x+6} = \frac{s}{y+6} + 1,25} \quad (3)$$

$$t_{\text{мот}} = \frac{s}{y}$$

$$t_{\text{вел}} = \frac{s}{x}$$

$$x \cdot \frac{s}{y} + 96 = y \cdot \frac{s}{x}$$

$$\boxed{\frac{sx}{y} + 96 = \frac{sy}{x}} \quad (2)$$

$$(1) sy = sx + 2xy$$

$$sy = x(s + 2y)$$

$$x = \frac{sy}{s + 2y}$$

~~$$(2) s(s + 2y)$$~~

$$(2) \frac{s \cdot sy}{y(s + 2y)} + 96 = \frac{s \cdot (s + 2y) \cdot y}{sy}$$

$$\frac{s^2}{s + 2y} + 96 = s + 2y \quad | \cdot (s + 2y)$$

$$s^2 + 96(s + 2y) = (s + 2y)^2$$

$$s^2 + 96s + 192y = s^2 + 4ys + 4y^2$$

$$96s + 192y = 4ys + 4y^2$$

$$96s - 4ys = 4y^2 - 192y$$

$$s(96 - 4y) = 4y^2 - 192y$$

$$s = \frac{4y^2 - 192y}{96 - 4y}$$

$$x = \frac{(4y^2 - 192y) \cdot y \cdot (96 - 4y)}{(96 - 4y)(4y^2 - 192y + 2y(96 - 4y))}$$

$$= \frac{y(4y^2 - 192y)}{4y^2 - 192y + 2y(96 - 4y)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y^2 - 192y}{-8y} = \frac{4y - 192}{-8} = \boxed{\frac{192 - 4y}{8}}$$

$$\frac{(4y^2 - 192y) \cdot 8}{(96 - 4y)(140 - 4y)} = \frac{(4y^2 - 192y)}{(96 - 4y)(y + 6)} + 1,25$$

$$\frac{8(y + 6)(4y^2 - 192y) - (4y^2 - 192y)(140 - 4y) - 1,25(96 - 4y)(140 - 4y)(y + 6)}{(96 - 4y)(140 - 4y)(y + 6)}$$

$$32 + 16 - 20$$

$$\frac{72 \cdot 2 \cdot 5^3}{4} = 180$$

$$780$$

$$\begin{aligned} &2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3^2 \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 216 \\ 180 \\ \hline 000 \\ 1728 \\ 216 \\ \hline 38880 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$2x^2 + 4y^2 + 6xy = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 2(x^2 + 2y^2 + 3xy) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}xy)$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - (3x + 2y)^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} =$$

$$2\sqrt{2} < 6 \\ \sqrt{2} < 3$$

$$= \frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} = - \frac{6x^2 + 8y^2 + 12xy}{x^2 - 6y^2} = (-2) \cdot \frac{3x^2 + 4y^2 + 6xy}{x^2 - 6y^2} =$$

$$= (-2) \cdot \frac{x^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$x^2 \neq 0 \quad x^2 - 6y^2 = -8y^2 - 3xy$$

$$(x + y)(x + 2y) = 0$$

$$x = -y$$

$$\text{или } x = -2y$$

$$x = -y \Rightarrow y = -x$$

$$(-2) \cdot \frac{x^2}{x^2 - 6x^2} = (-2) \cdot \frac{x^2}{-5x^2} = (-2) \cdot (-\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$$

$$x = -2y$$

$$(-2) \cdot \frac{(-y)^2}{(-2y)^2 - 6y^2} = \frac{4y^2}{4y^2 - 6y^2} = (-2) \cdot \frac{4y^2}{-2y^2} = (-2) \cdot (-2) = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 2 \\ \frac{5x}{y} + 96 = \frac{5y}{x} \end{cases}$$

$$\frac{S}{x+6} = \frac{S}{y+6} + 1,5$$

$$\frac{S}{30} = \frac{S}{54} + 2 \quad | \cdot 6$$

$$\frac{S}{5} = \frac{S}{9} + 12 \quad | \cdot 45$$

$$9S = 5S + 12 \cdot 45$$

$$4S = 12 \cdot 45$$

$$S = 3 \cdot 45 = 135$$

$$\frac{S}{48} = \frac{S}{30} + 2 \quad | \cdot 6$$

$$\frac{S}{12} = \frac{S}{5} + 12 \quad | \cdot 60$$

$$5S = 12S + 720$$

$$\frac{S}{12} = 2$$

$$\begin{cases} 72S = 5S + 720 \\ 7S = 720 \end{cases}$$

$$\frac{S}{30} = \frac{S}{54} + 32 \quad | \cdot 2$$

$$\frac{S}{15} = \frac{S}{27} + 32 \quad | \cdot 3$$

$$\frac{S}{5} = \frac{S}{9} + 72 \quad | \cdot 45$$

$$9S = 5S + 72 \cdot 45$$

$$4S = 72 \cdot 45$$

$$\boxed{S=18} \quad S = 18 \cdot 45 = 810$$

$$Sx = Sy = 5x + 2xy$$

$$S = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}$$

$$\frac{S}{y} + 2 = \frac{S}{x}$$

$$\frac{S}{y}x + 96 = y\left(\frac{S}{y} + 2\right)$$

$$\frac{S}{y}x + 96 = S + 2y$$

$$S(y+6) = S(x+6) + 1,5(x+6)(y+6)$$

$$5y + 6S = 5x + 6S + 1,5xy + 9x + 5y + 54$$

$$9x + 9y + 54 - 0,5xy = 0$$

$$9x + 9y + 54 = 0,5xy$$

$$18x + 18y + 108 = xy$$

$$xy - 18x - 18y + 108 = 0$$

$$(x-18)(y-18) - 324 = 108$$

$$(x-18)(y-18) = 432 = 46 \cdot 2 = 24 \cdot 3^3$$

$$S = 135$$

$$\frac{2xy \cdot x}{(x+y)y} + 96 = \frac{2xy \cdot y}{(x+y)x}$$

$$\frac{2x^2}{x+y} + 96 = \frac{2y^2}{x+y}$$

$$2x^2 + 96(x+y) = 2y^2$$

$$x^2 + 48(x+y) = 2y^2$$

$$\begin{aligned} y-18 &= 36 \\ y &= 54 \\ x-18 &= 12 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

$$y-18 = 36$$

$$\boxed{y=54}$$

$$x-18 = 12$$

$$\boxed{x=30}$$

$$\frac{810}{30} = 27$$

$$\frac{810}{54} = 15$$

$$\frac{135}{30} = 4,5$$

$$\frac{135}{54} = 2,5$$

$$\frac{135}{36} - \frac{135}{60} = \frac{1350 - 810}{360} =$$

$$= \frac{540}{360} = 1,5$$

$$\frac{135}{6}$$

$$810$$

$$45$$

$$18$$

$$\frac{360}{45}$$

$$45$$

$$\frac{810}{45}$$