



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим числа.

степени входящих

$3$  и  $7$  назовем  $\alpha$  и  $\beta$   
соотв.  $k_1, k_2, k_3$

оставшиеся множители

$a, b, c$  соотв.  $3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$

тогда заменим  $a$  и  $c$

через  $b$  используя условия

$$b = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$$

$$a = 3^{\alpha+3} \cdot 7^{\beta+2} = 3^{\alpha+1} \cdot 7^{\beta+1} \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

$$c = 3^{\alpha+1} \cdot 7^{\beta+5} = 3^{\alpha+1} \cdot 7^{\beta+1} \cdot 7^4$$

$k_1, k_2, k_3 \geq 1 \in \mathbb{Z}$

$$bc = 3^{16} \cdot 7^{16}$$

$$ac = 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 \geq 11 & \alpha \geq 4 \\ 2\alpha + 10 \geq 21 & \alpha \geq 6 \\ 2\beta + 2 \geq 38 & \beta \geq 6 \\ 2\alpha + 7 \geq 18 & \alpha \geq 6 \\ 2\beta + 5 \geq 16 & \beta \geq 6 \end{cases}$$

$$abc \geq 3^{(3+6+10)} \cdot 7^{(2+2+7)} = 3^{19} \cdot 7^{11}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{45}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a$  и  $b$  одновременно

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

$\text{НОД}_{\text{н.ч.}}(a+b \text{ и } 10ab) = m = \text{НОД}(a+b \text{ и } 5ab)$   
причем  $a$  и  $b$  взаимнопросты  
 $\Rightarrow a+b$  и  $ab$  взаимно  
просты  $\Rightarrow m \leq 5$   
максимальное  $m=5$   
пример  $a=2$   $b=3$

В случае если  $a=b=1$   $m=2$   $2 \leq 5$

Ответ: ~~4~~ макс.  $m=5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$  продолжение

$$2(\sqrt{x-1}) - \sqrt{2x^2+x+3} = 4x(\sqrt{x-1})$$

~~корень~~

возводим в квадрат

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+3} = 2x & |^2 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+x+3 = 4x^2 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$
$$\neq \frac{1+5}{4} > \frac{1}{4}$$
$$-1 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Ответ:  $\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$D < 0$   $\Rightarrow$  выражение  $> 0$   $\swarrow$   $\searrow$   
 $D < 0$   $\Rightarrow$  выражение  $> 0$

$$1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 4x - 1$$

$$4x - 1 \leq 0$$

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ \text{возведем в квадрат} \\ 2x^2 + x + 3 \geq 16x^2 + 1 - 8x \end{cases}$$

$$0 \geq 14x^2 - 9x - 2$$

$$D = 81 - 4 \cdot 14 \cdot 2$$

$$D < 0$$

$$\text{выр} > 0$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{1}{4} \quad \text{Возведем в квадрат уравне}$$

или

$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3 + 16x^2 - 8x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot (4x - 1)$$

$$2\sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot (4x - 1) = 16x^2 - 4x$$

$$2(4x - 1)\sqrt{2x^2 + x + 3} = 4x(4x - 1)$$

$4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$  Остаток уравнения  
теперь рассмотрим отдельно  
при  $4x - 1 \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14 продолжение  
 Проведем общую касательную. Она касается  $\omega$  и  $\Omega$

в точках D и E соотв.

$O_1D \perp DE$   $O_2E \perp DE$  из  $O_1$

опустим высоту  $O_1M$  на  $EO_2$

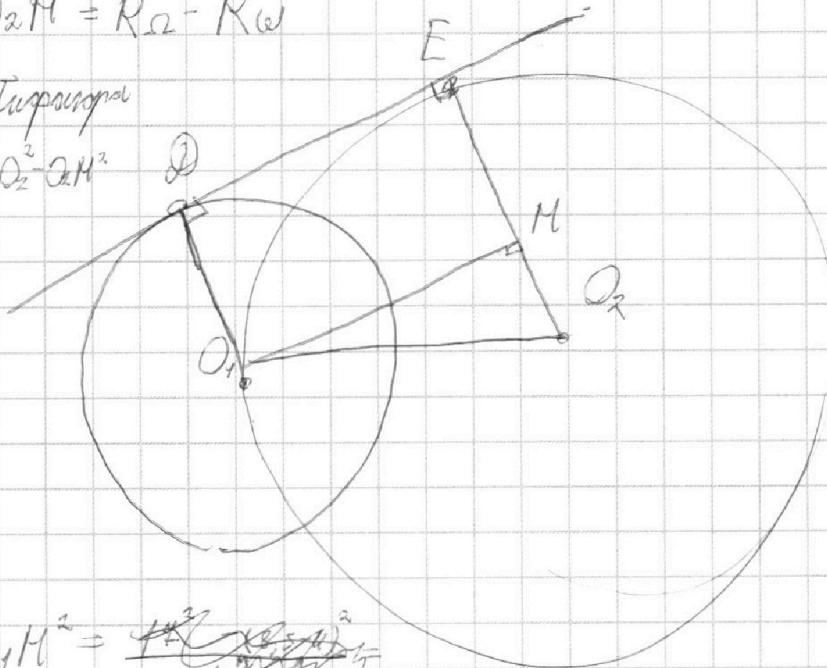
$\triangle O_1ME$  - прямоугольный  $\Rightarrow O_1M = DE$

$$O_1O_2 = R_\Omega$$

$$O_2M = R_\Omega - R_\omega$$

из т. Пифагора

$$O_1M^2 = O_1O_2^2 - O_2M^2$$



$$O_1M^2 = \frac{14^2}{4} - \frac{(14-8)^2}{4}$$

$$= \frac{14^2 - (14-8)^2}{4} = 4,5^2 - 4,5^2 = 4(8,5 - 4,5)(8,5 + 4,5)$$

$$O_1M = 2\sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

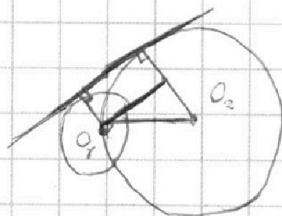
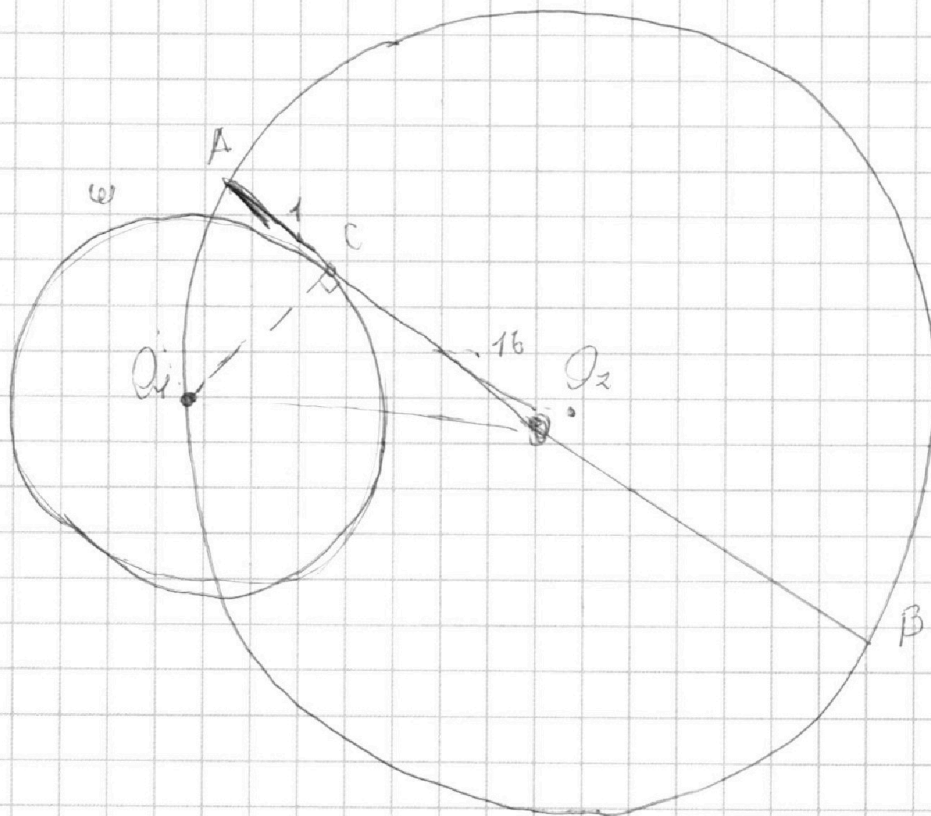
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим диаметр  $\Omega$  за  $D_\Omega = 17$   
центры  $\omega$  и  $\Omega$  за  $O_1$  и  $O_2$  соотв.

Радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  за  $R_\omega$  и  $R_\Omega$   
соотв. Тогда  $O_1O_2 = 8,5$   
 $O_2C = 7,5$

$$R_\omega = O_1C \text{ из Треугольника } O_1C^2 = \frac{17^2 - 15^2}{4}$$
$$O_1C = 4 \quad \Omega$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

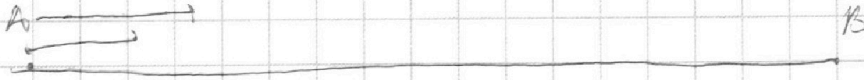
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6



Ск. велосипедиста  $u$ ,  $u, v \neq 0$ ,  $v > u$   
мотороллера  $v$   
расстояние от А до В -  $L$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{u} = \frac{L}{v} + \Delta t \\ 96 \frac{L}{v} = \sqrt{\frac{L}{u}} \end{array} \right. \quad \Delta t = \frac{L(v-u)}{uv}$$

$$96 \frac{L}{v} = L \frac{(v^2 - u^2)}{uv} \quad 96 \frac{L}{v} = L \frac{(v+u)(v-u)}{uv}$$

$$\frac{L}{v+6 \text{ км/ч}} + \frac{5}{4} \Delta t = \frac{L}{u+6 \text{ км/ч}} \quad \frac{5}{4} \Delta t = \frac{L(v-u)}{(v+6 \text{ км/ч})(u+6 \text{ км/ч})}$$

$$\frac{(v+6 \text{ км/ч})(u+6 \text{ км/ч})}{uv} = \frac{8}{5}$$

$$5uv + 30 \text{ км/ч} u + 30 \text{ км/ч} v + 180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} = 8uv$$

$$180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 30 \text{ км/ч} u = v(3u - 30 \text{ км/ч})$$

$$v = \frac{180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 30 \text{ км/ч} u}{3u - 30 \text{ км/ч}}$$

$$u + v = 48 \text{ км/ч}$$

$$48 \text{ км/ч} = \frac{30 \text{ км/ч} \cdot u + 180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 3u^2 - 30 \text{ км/ч} u}{3u - 30 \text{ км/ч}}$$

$$144 \text{ км/ч} - 1440 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} = 180 \frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2} + 3u^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*№ продолжение*

$$3u^2 - 144 \text{ км/ч} \cdot u + 1620 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0 \quad | :3$$

$$u^2 - 48 \text{ км/ч} \cdot u + 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0$$

$$u = \frac{48 \text{ км/ч} \pm \sqrt{144 \text{ км}^2/\text{ч}^2}}{2}$$

$$u < v \Rightarrow u = 18 \text{ км/ч} \Rightarrow v = 30 \text{ км/ч}$$

$$\frac{L}{u} = \frac{L}{v} + 2\tau$$

$$L = \frac{2\tau(v \cdot u)}{v - u} = \frac{2\tau \cdot 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2}{12 \text{ км/ч}} = 90 \text{ км}$$

Ответ: 90 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

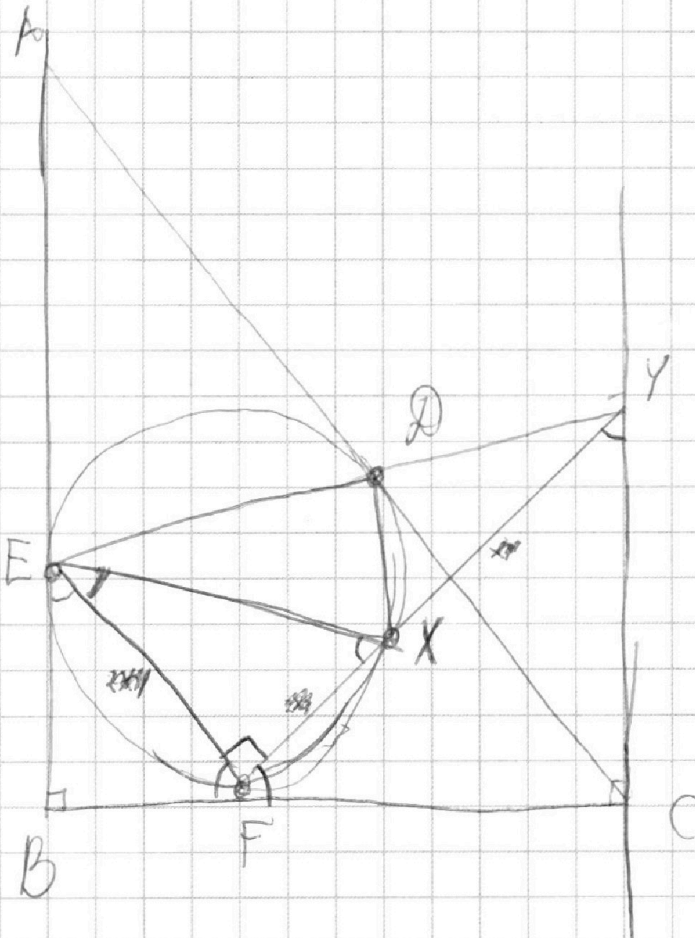
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4



$$\angle ADE = \angle YDC \quad YC \parallel AE \Rightarrow \angle DYC = \angle DEA$$

$\triangle AED$  - равнобедренный  $\Rightarrow \triangle YC$  равнобедренный и  $\triangle CF$  равнобедренный по тем же причинам что и  $AED \Rightarrow YC = DC = CF \Rightarrow$

$\triangle YCF$  - равнобедренный  $\Rightarrow$  углы при основании  $= 45^\circ$

как и в  $\triangle EBF \Rightarrow \angle EFY = 90^\circ \Rightarrow EX$  диаметр высоты  $EF$ .  
 $\angle XEF = \angle XFC = 45^\circ$  („хорда и касательная“)  $\Rightarrow EX \parallel BC$

и  $\angle EXF = 45^\circ$   $\triangle AED$  и  $\triangle CYD$  подобны по трем углам  
 $\Rightarrow \frac{ED}{YD} = \frac{AD}{DC}$  из теоремы о двух секущих  $\triangle YDX$  и  $\triangle YFE$  подобны



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

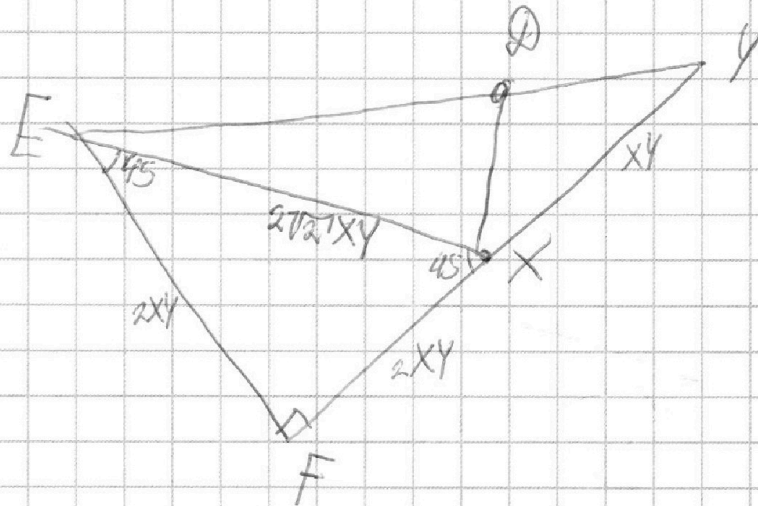
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 прообразован.

$$EF = FX = 2XY$$

из теор. Пифагора

$$EY = \sqrt{13}XY$$



из подобия

$$\frac{DY}{3XY} = \frac{XY}{\sqrt{13}XY}$$

$$DY = \frac{3}{\sqrt{13}}XY$$

$$\frac{ED}{DY} = \frac{\sqrt{13}XY - \frac{3}{\sqrt{13}}XY}{\frac{3}{\sqrt{13}}XY} = \frac{10}{3}$$

Ответ: 10 : 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EX = 2\sqrt{2}XY$

$\angle D = \angle F = \angle X = \angle F$

4D

3

$3x + 2y = z$   
 $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{z}$

$\frac{10}{113}xy$

$\frac{ED}{D}$

$\frac{x}{113x} = \frac{y}{3x}$



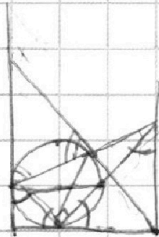
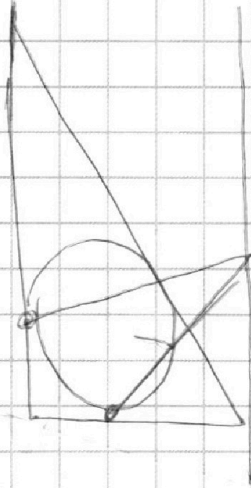
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3(x^2 + 2y^2 + 3xy)}{xy} = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy$$

$$-6x^2 - 12xy$$

$$\underline{-6x(x + 2y)}$$

$$2xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy - 2xy$$

$$\frac{(3y + x)(3x + 2y) - 2xy}{xy} = 0$$

$$(3x + 2y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2$$

$$9 + \frac{6y}{x} + \frac{3y}{y} + 2 = 2$$

$$9 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{2y^2 + x^2}{xy} = -9$$

$$\begin{array}{r} 540 \overline{) 12} \\ 108 \phantom{0} \\ \hline 60 \phantom{0} \end{array}$$

$$\frac{1620}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \overline{) 3} \\ 15 \phantom{0} \\ \hline 12 \phantom{0} \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ 48 \\ \times 18 \\ \hline 384 \\ 102 \\ \hline 2304 \\ -2160 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \\ \times 540 \\ \hline 2860 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 3^{15} \cdot 7^{16}$$

$$ac = 3^{21} \cdot 7^{28}$$

ст. в  $a$  ~~на 3~~  $b$  ~~на 7~~  $c$  на 7 больше степени  $b$   $a$   
4 - на 5

степень  $3$  в  $a$  на  $3 > b$

4 в  $a$  на  $22 > b$

$a > b$

$$b = k_1 \cdot 3^3 \cdot 7^{22} = a \quad ab = 3^{11}$$

$$a \cdot 3^7 \cdot 7^5 \cdot k_2 = c \quad \rightarrow ab = 7^{22}$$

$$c > a > b \Rightarrow$$

$$ab = b^2 \cdot k_1 \cdot 3^3 \cdot 7^{22} \Rightarrow b \cdot k_1 = 3^7$$

$$c = 3^7 \cdot 7^5 \cdot k_2 \cdot 7^{22} \cdot 3^3 \cdot k_1 \cdot b = k_2 \cdot k_1 \cdot b^2 \cdot 7^{27} \cdot 3^3$$

$$abc = k_1^2 \cdot k_2 \cdot b^3 \cdot 3^{13} \cdot 7^{49}$$