МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $ab \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$; $bc \vdots 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$; $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$;

$\Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac = a^2b^2c^2 \vdots 2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68}$; Поэтому $abc \vdots \sqrt{2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68}}$;

– поскольку $a^2\cdot b^2\cdot c^2 = (abc)^2$, $\Rightarrow$ все его делители – также квадраты;

Значит, $abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$; – в силу натуральности a, b, c берём большую степень для тройки;

Подберём степени "2", "3", "5" для a, b и c;

Для "2": т.к. $bc \vdots 2^{12}$, $ac \vdots 2^{14}$, $ab \vdots 2^8$, $\Rightarrow$

$\frac{ac}{bc} \vdots \frac{2^{14}}{2^{12}} = 2^2$; $\Rightarrow \frac{a}{b} \vdots 2^2$; Тогда пусть $b \vdots 2^x$, $\Rightarrow a \vdots 2^{x+2}$;

$\Rightarrow ab \vdots 2^{2x+2} \geq 2^8$; (из-за того, что $ab \vdots 2^8$), $\Rightarrow x \geq 3$;

Тогда $x_{min} = 3$; $\Rightarrow$ при x_{min}: $a \vdots 2^5$, $b \vdots 2^3$, $c \vdots 2^9$;

Для "3" проделаем аналогичные действия:

$bc \vdots 3^{20}$, $ac \vdots 3^{21}$, $\Rightarrow \frac{a}{b} \vdots 3^1$; Пусть $b \vdots 3^y$, $\Rightarrow a \vdots 3^{y+1}$,

$\Rightarrow ab \vdots 3^{2y+1} \geq 3^{14}$, $\Rightarrow y \geq \frac{13}{2}$ – в силу натуральности a, b, c возьмём

$y = 7$; $\Rightarrow a \vdots 3^8$, $b \vdots 3^7$, $\Rightarrow c \vdots 3^{13}$;

Аналогично для "5": Пусть $b \vdots 5^z$, $\Rightarrow a \vdots 5^{z+12}$, $ab \vdots 5^{2z+12} \geq 5^{12}$;

$\Rightarrow z \geq 0$; Возьмём $z_{min} = 0$; $b \vdots 5^0 = 1$, $a \vdots 5^{12}$, $\Rightarrow c \vdots 5^{27}$;

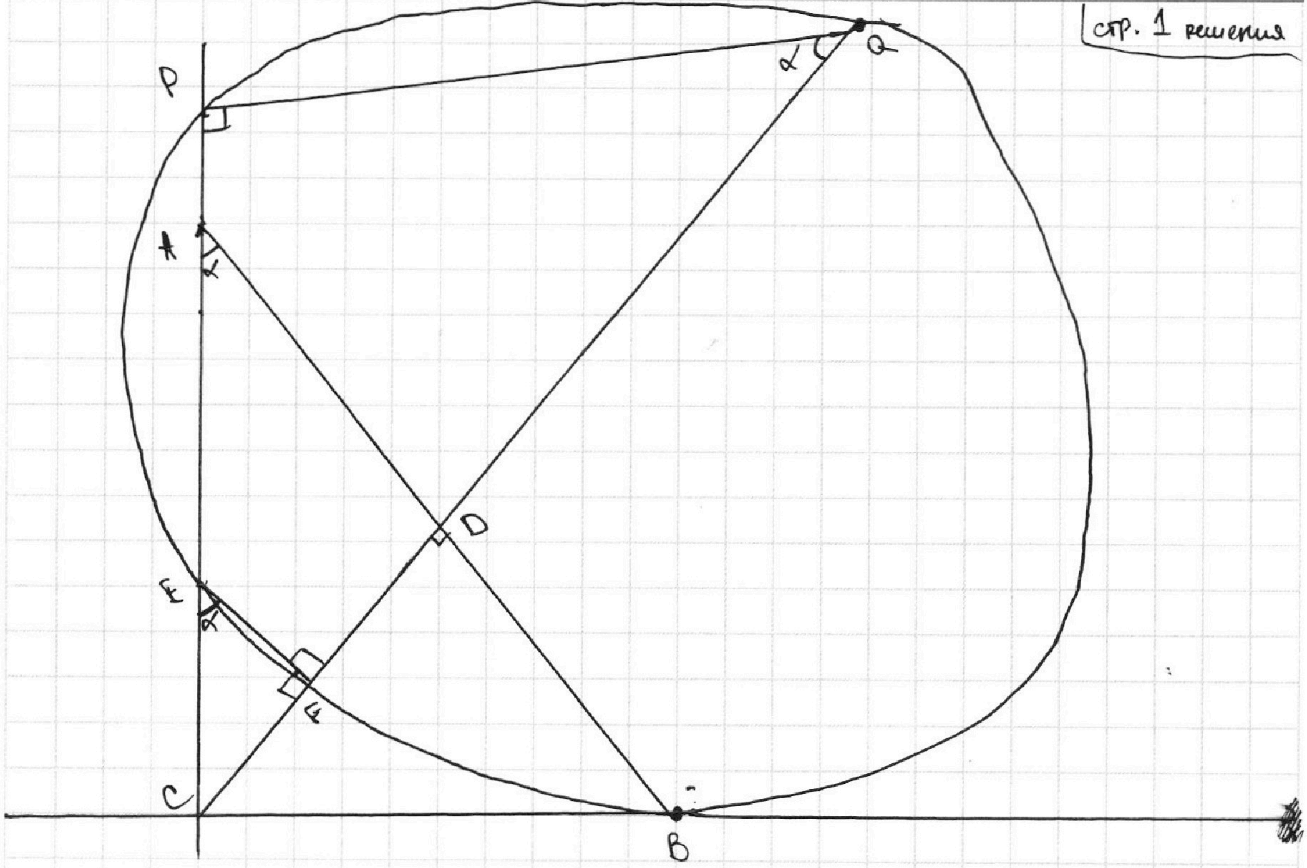
Значит, $a \vdots 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{12}$, $b \vdots 2^3\cdot 3^7\cdot 5^0$, $c \vdots 2^9\cdot 3^{13}\cdot 5^{27}$,

$\Rightarrow$ для минимизации пусть $a = 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{12}$, $b = 2^3\cdot 3^7\cdot 5^0$, $c = 2^9\cdot 3^{13}\cdot 5^{27}$

$\Rightarrow abc = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$; (что делится на $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$);

Ответ: $abc_{наим} = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$;

МФТИ



1. ~~BD = A~~ $CD^2 = AD \cdot BD = 10t^2$ – при $BD = 2t$, $AD = 5t$;
$CD = t\sqrt{10}$;
$AC = t\sqrt{35} = \sqrt{AB \cdot \cancel{AD}}$ AD, $BC = 4\sqrt{14} = \sqrt{AB \cdot BD}$;

2. Пусть $\angle A = \alpha$, $\Rightarrow$ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{35}}{7}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$;
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} \cdot \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{10t}{\sqrt{35}t}\right)^2 \cdot \frac{EF^2}{AD^2} = \frac{20}{7} \cdot \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$;
Пусть $EF = 5z$, $\Rightarrow$ $\frac{EF}{AD} = \frac{z}{t}$;

3. Продлим CA до пересеч. с окруж. в т. P, CD до перес. с окр. в т. Q;
т.к. $\angle EFD = 90°$, ~~…~~ четырехуг. $FEPQ$ – вписанный, $\Rightarrow \angle EPQ = 90°$;
4. По теореме об отрезках секущих и отрезке касат.: $CE \cdot CP = CB^2 = 14t^2$;
$\sqrt{35}t \cdot CP = 14t^2$; $\Rightarrow CP = t \cdot \frac{14}{\sqrt{35}}$; Заметим, что $\triangle CPQ \sim \triangle CEF$ (и $\triangle ABC$)
$\angle PQC = \alpha$;
(СМ. РЕШЕНИЕ НА СТР. 2 РЕШЕНИЯ)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
	X					

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

б. Т.к. $tg\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ и $tg\,\alpha = \frac{PC}{PQ}$, то $PC = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot 2\sqrt{14}t = 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{5}}t =$ | стр. 2 решения

$= \frac{14t^2}{\sqrt{35}\,z}$; $\sqrt{28}t = \frac{7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{t^2}{z}$; $\frac{t}{z} = 2$, ($\Rightarrow zt = \frac{1}{2}$;)

Ответ: $\frac{20}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{7}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x;$

$\arcsin(\cos x) = \frac{1}{10}(\pi - 2x);$

(I) $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2}$ – ОДЗ для левой части;

(II) $-1 \le \cos x \le 1$ – ОДЗ для правой части

(II) – ограничение выполняется всегда;

Возьмём синус от левой и правой частей:

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right);$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \Rightarrow$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{5}\right);$ Пусть $t = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{5}$; $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2};$

$\sin 5t = \sin t;$

$\sin 5t - \sin t = 0;$

$2 \sin 2t \cos 3t = 0;$

$\left[\begin{array}{l} 2t = \pi k, k \in Z; \\ 3t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; \end{array}\right.$ $\Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6};$

Вернёмся к переменной x:

$\frac{\frac{\pi}{2} - x}{5} = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6};$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = -\frac{5\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{2} - x = 0; \\ \frac{\pi}{2} - x = \frac{5\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{5\pi}{6}; \\ \frac{\pi}{2} - x = \frac{5\pi}{6}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} -x = -3\pi; \\ -x = -\frac{\pi}{2}; \\ -x = 2\pi; \\ -x = -\frac{4\pi}{3}; \\ -x = \frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 3\pi, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = -2\pi, \\ x = \frac{4\pi}{3}, \\ x = -\frac{\pi}{3}; \end{array}\right.$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi;$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

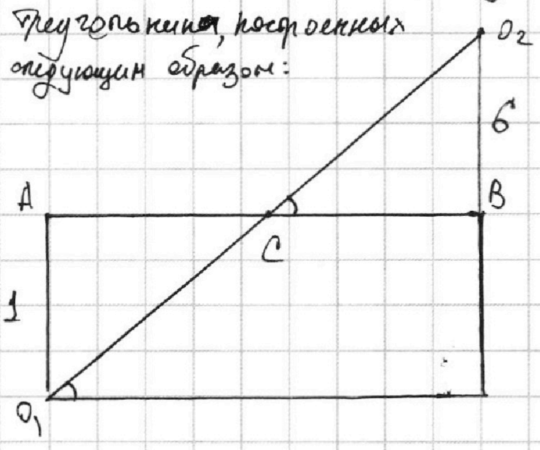
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

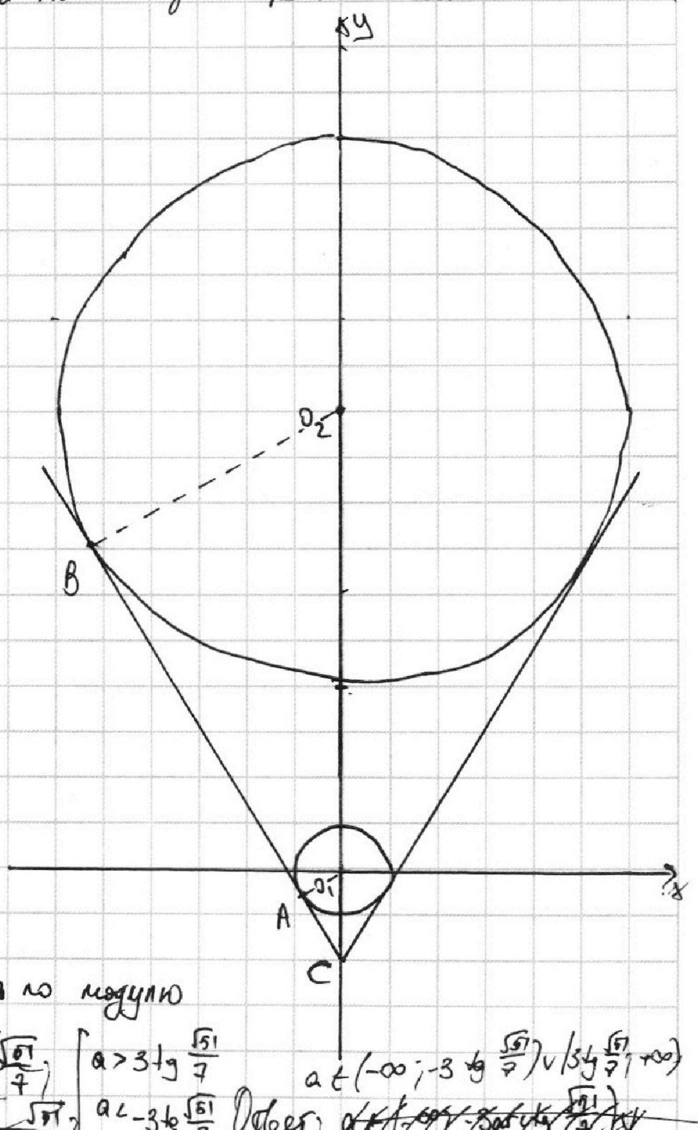
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 $\begin{cases} ax-3y+4b=0, \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0; \end{cases}$

$\begin{cases} ax-3y+4b=0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2-20y+100=36; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} ax-3y+4b=0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1, \\ x^2+(y-10)^2=6^2; \end{array}\right. \end{cases}$

Совокупность задаёт окружности с центрами $O_1(0;0)$ и $O_2(0;10)$ и соответственно радиусами $R_1=1$ и $R_2=6$;
Прямая m: $ax-3y+4b=0$; – должна для выполнения условия пересечь окружности РОВНО дважды. Для этого найдём крайние положения касания прямой обеими окружностями;
Точки касания A и B, точка пересечения O_1O_2 с $AB = C$;
Рассмотрим два вертик. прямоуг. треугольника, построенных следующим образом:





$O_1O_2=10$, $AO_1+O_2B=7$;
$\Rightarrow AB$ по т. Пиф. $=\sqrt{100-49}=\sqrt{51}$;
Нам нужен тангенс угла $\angle CO_2B$, он равен:
$\frac{AB}{AO_1+O_2B}=\frac{\sqrt{51}}{7}$; $\Rightarrow$ коэффициент угла наклона касательной должен быть по модулю больше $tg\,\frac{\sqrt{51}}{7}$:

$\left|\frac{a}{3}\right|>tg\,\frac{\sqrt{51}}{7}$;

$\left[\begin{array}{l} a>3\,tg\,\frac{\sqrt{51}}{7}, \\ a<-3\,tg\,\frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$

$a\in\left(-\infty;-3\,tg\,\frac{\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(3\,tg\,\frac{\sqrt{51}}{7};+\infty\right)$

Ответ: ~~...~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3, \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3; \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ y\neq 1, \\ x\neq \frac{1}{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5 2x} = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{\log_5 2x} - 3; \\ \log_5^4 y + \dfrac{4}{\log_5 y} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\log_5 y} - 3; \end{cases}$$

Пусть $\log_5(2x) = \alpha$, $\log_5 y = \beta$:

$$\begin{cases} \alpha^4 - \dfrac{3}{\alpha} = \dfrac{4}{3\alpha} - 3; \\ \beta^4 + \dfrac{4}{\beta} = -\dfrac{1}{3\beta} - 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^4 - \dfrac{13}{3\alpha} + 3 = 0, \\ \beta^4 + \dfrac{13}{3\beta} + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I)\ 3\alpha^5 + 9\alpha - 13 = 0, \\ (II)\ 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0; \end{cases}$$

Обе функции монотонны, причём при $\alpha = -\beta$ ур-е (I) становится ур-ем (II),

$\Rightarrow$ Единственное решение — $\alpha = -\beta$; Возвращаясь к замене:

$\log_5(2x) = -\log_5 y$; $\Rightarrow$ $\log_5(2xy) = 0$; $\Rightarrow$ $2xy = 1$,

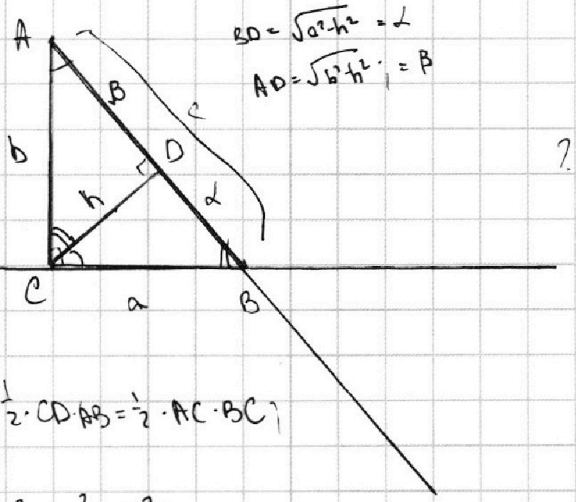
$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ — единственное возможное значение;

Ответ: $\frac{1}{2}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

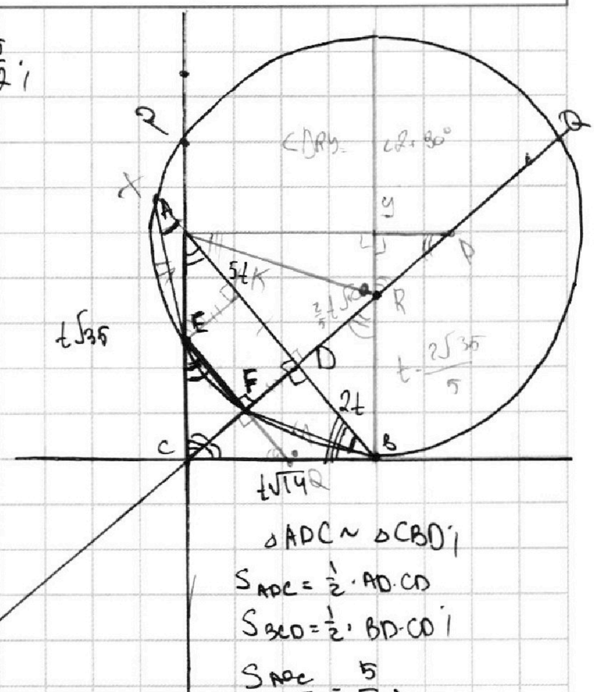


$BD=\sqrt{a^2-h^2}=\alpha$

$AD=\sqrt{b^2-h^2}=\beta$

$\frac{AD}{DB}=\frac{5}{2}$;

$?\ \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$



$\frac{1}{2}\cdot CD\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC$;

$AC^2+BC^2=AB^2$;

$\frac{a}{c}=\frac{h}{b}=\frac{BD}{a}$;

$a^2=c\cdot BD$;

$\boxed{a^2=c\cdot\alpha}$;

$\frac{b}{c}=\frac{\beta}{b}$;

$\boxed{b^2=c\cdot\beta}$

$35t^2+14t^2=(5t+2t)^2=t^2(25+2\cdot2\cdot5+4)=t^2\cdot(29+20)=49t^2$;

$49t^2=49t^2$

$S=\frac{1}{2}\cdot h\cdot c=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$;

$hc=ab$; $h=\frac{ab}{c}$;

$\triangle ADC\sim\triangle CBD$;

$S_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD$

$S_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CD$;

$\frac{S_{ADC}}{S_{BCD}}=\frac{5}{2}$;

$BC^2=7t\cdot 2t=14t^2$;

$BC=t\sqrt{14}$

$AC^2=7t\cdot 5t=35t^2$;

$AC=t\sqrt{35}$;

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{7}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot t\sqrt{35}\cdot t\sqrt{14}=$

$S_{ABC}=\frac{7}{2}t^2\cdot\sqrt{10}$;

$CD=\frac{t\sqrt{14}\cdot t\sqrt{35}}{7t}=$

$=\frac{t^2\cdot 7\cdot\sqrt{10}}{7t}=t\sqrt{10}$;

$CD=t\sqrt{10}$;

$\ell K=BD$;

$\triangle RBC\sim\triangle ABC$; $\frac{BC}{AC}=\frac{BR}{BC}$; $BC^2=AC\cdot BR$; $\boxed{BR}=\frac{t^2\cdot 14}{t\sqrt{35}}=t\cdot\frac{\frac{14\sqrt{35}}{35}}{5}$ $\boxed{=\frac{t\cdot 2\sqrt{35}}{5}}$

$\Rightarrow CR=\sqrt{14t^2+\frac{t^2\cdot 4\cdot 35}{25}}=\sqrt{t^2\left(14+\frac{4\cdot 7}{5}\right)}=t\sqrt{\frac{70+28}{5}}=t\sqrt{\frac{98}{5}}=\boxed{7t\sqrt{\frac{2}{5}}}$ $\quad \frac{98}{49}=2$

$DR=7t\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}-t\sqrt{10}=\frac{7}{5}t\cdot\sqrt{10}-t\sqrt{10}=\frac{2}{5}t\sqrt{10}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$; $bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$; $ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$; ? min abc;

$abc \vdots 5^{33} \cdot 3^{21} \cdot 2^{14}$; – произведение ac также делится на $2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$.

Тогда для минимизации $abc = ac$, $b = 1$. Но тогда $a = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$, $b = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$;

– возможно, не минимальное значение;

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$; $\cos x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\cos x > 0}$

~~$10 \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \pi - 2x$;~~ $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \sin x \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le -\sin x \le 0$

$\arcsin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}$; $\pi \ge \sin x \ge 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sin x > 0}$ $\Rightarrow$

МФТИ

$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$;

$100(1-x^2) = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2$; $100 - 100x^2 = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2$;

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$;

$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3 \end{cases}$ $\boxed{\text{? все } xy}$; ОДЗ: $\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \ne 1 \\ (2x)^3 > 0 \\ (2x)^3 \ne 1 \\ y > 0 \\ y \ne 1 \\ y^3 > 0 \\ y^3 \ne 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1/2 \\ y > 0 \\ y \ne 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \frac{1}{3}\log_{2x} 5^4 - 3; \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3 \end{cases}$

~~$\log_3 3 = \log_9 9 = 2\log_9 3 = 2 \cdot \frac{1}{2}$~~

$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 - \frac{4}{3}\log_{2x} 5 + 3 = 0 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 + \frac{1}{3}\log_y 5 + 3 \end{cases}$

$\log_5 2x = \alpha$ $\log_5 y = \beta$

$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 4\frac{1}{3}\log_{2x} 5 + 3 = 0; \\ \log_5^4 y + 4\frac{1}{3}\log_y 5 + 3 = 0; \end{cases}$ ~~$\log_{2x} 5 = \alpha$~~, $\log_5 y = \beta$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5 2x = \alpha$; $\log_5 y = \beta$; $2x = 5^{\alpha}$, $y = 5^{\beta}$; $2xy = 5^{\alpha+\beta}$; $xy = \frac{1}{2}\cdot 5^{\alpha+\beta}$;

$$\begin{cases} 3\alpha^5 + 8\alpha - 13 = 0, \\ 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0; \end{cases}$$

№3 $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$;

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}$; ОДЗ: $-1 \le \cos x \le 1$ $\le \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \le$

! ограничение !

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$; $\frac{x}{5} = t$;

$\cos 5t = \sin\left(\frac{\pi}{10} - t\right)$; отбор при ограничении;

Ответ: -2π; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; 3π;

№5 1) Вынести степени, перевернуть логарифмы → замена логарифмов;
! Для 2x: замена вместе с коэффициентами!;
2. Упростить ур-е, домножая на знаменатель — система; ! Меняя (a на b) или (a на −b) — одно ур-е ~~…~~ превращ. в другое!
3. Монотонность каждого ур-я, ⇒ имеет 1 корень $\boxed{a=-b}$ вот он;
4. Обратная замена, находим сумму логарифмов ⟹ $x \cdot y$; (оно только одно)

№1 $ab \cdot bc \cdot ac = a^2b^2c^2$; $2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$;

$\Rightarrow abc$ ⋮ $2^{17} \cdot 3^{\frac{1}{2}(14+20+21)} \cdot 5^{\frac{1}{2}(12+17+39)}$; $\left(!\ \text{делилось}\ \sqrt{a^2b^2c^2}\right)$;

$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi - 3\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$O_1O_2 = 10$, ~~…~~ $AO_1 + O_2B = 7$;

$\Rightarrow AB = \sqrt{100-49} = \sqrt{51}$; Нам нужен тангенс угла $\angle O_2B$, он равен

$\frac{AB}{AO_1 + O_2B} = \frac{\sqrt{51}}{7}$; должен быть по модулю больше $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{51}}{7}$;

⇒ коэффициент угла наклона касательной a ~~…~~ $|a| > \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{51}}{7}$;

$\Rightarrow \left|\frac{a}{3}\right| > \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{51}}{7}$; $\left[\begin{array}{l} a > 3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{51}}{7}, \\ a < -3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{51}}{7}; \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 2x} + 3 = 0, \\ \log_5^4 y + 4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^4 - 4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\alpha} + 3 = 0, \\ \beta^4 + 4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\beta} + 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^5 + 3\alpha - 4\frac{1}{3} = 0, \\ \beta^5 + 3\beta + 4\frac{1}{3} = 0; \end{cases}$$

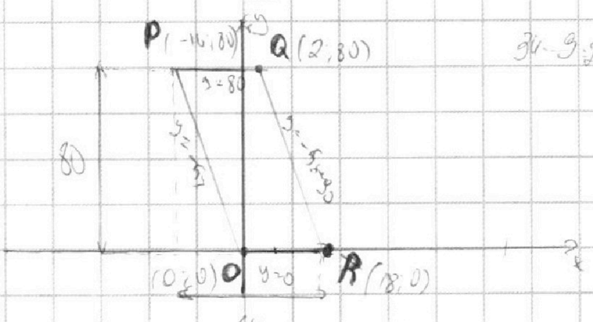
$$\begin{cases} \alpha^5 + 3\alpha - \frac{13}{3} = 0, \\ \beta^5 + 3\beta + \frac{13}{3} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\alpha^5 + 9\alpha - 13 = 0, \\ 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0, \end{cases}$$

$P(13):\ 13^5\cdot 3 + 9\cdot 13 - 13 \neq 0$

$P(-13):\ -3\cdot 13^5 - 9\cdot 13 - 13 \neq 0$,

№6 $5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$, по координатам x макс. разница может быть ~~18~~ 34

по координатам y макс. разница может быть 80,



$34 - 9\cdot 45$ Если взять точки P и R, то значение ~~[illegible]~~ $= 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 5\cdot 34 + 80 = 150 + 20 + 80 = \boxed{250}$

~~$\min$ [illegible] $= 0$~~, $\min$ зн. $= -250$,

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in Z$;

при $(x_2-x_1) > 9$ или $y_2 - y_1 > 45$

при переберём все возможные комбинации:

при (x_2-x_1) max, то есть $x_2 - x_1 = 9$,

$y_2 - y_1 = 0$, $\Rightarrow$ лежат на одном уровне

по y;

На каждой ~~[illegible]~~ точке возможно одной прямой

по

$$\begin{cases} 0 = 18k + b, \\ 80 = 2k + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = -18k \\ 80 = -16k \end{cases} \quad \begin{cases} b = 90 \\ k = -5 \end{cases}$$

$f(x)_1 = -5x + 90$;

$f(x)_2 = -5x$;

$$\begin{cases} y \le -5x + 90 \\ y \ge -5x \\ y \ge 0 \\ y \le 80 \\ 5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45, \end{cases}$$

$-1 \le x \le 1$

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$, $\arcsin(\sin x) = x$, $\arcsin(\cos x) + \sqrt{1-x^2}$,

$-10 \le \pi - 2x \le 10$ $\quad -10 \le 2x - \pi \le 10$ $\quad \pi - 10 \le 2x \le \pi + 10$ $\quad \frac{\pi}{2} - 5 \le x \le \frac{\pi}{2} + 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ