МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

Так как $ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{17}$ то $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17}$ где k – натуральное число. Так как $bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18}$ то $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$ где m – натуральное число. Так как $ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$, то $ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$ где n – натуральное число:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow a^2b^2c^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot k\,n\,m$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot k\,n\,m$$

так как квадрат натурального числа содержит в своем разложении все делители в четных степенях то $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \frac{knm}{2}$

если abc наименьшее то и $(abc)^2$ – наименьший, а значит и $2^{56} \cdot 7^{58} \cdot \frac{knm}{2}$ – наименьшее, а наименьшее оно при $\frac{knm}{2}$ равном $1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \Rightarrow abc = 2^{25} \cdot 7^{\cancel{58}}$ так как по условию a; b; c – натуральные $\Rightarrow abc > 0$

Ответ: ~~abc~~ $\cancel{2^{28} \cdot 7^{58}}$ $2^{25} \cdot 7^{58}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Задача 4~~

$$\cancel{\begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \\ \text{возведем в кв} \\ \left[\begin{array}{l} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{array}\right. \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} 3x^2-6x+2+ \end{cases}}$$

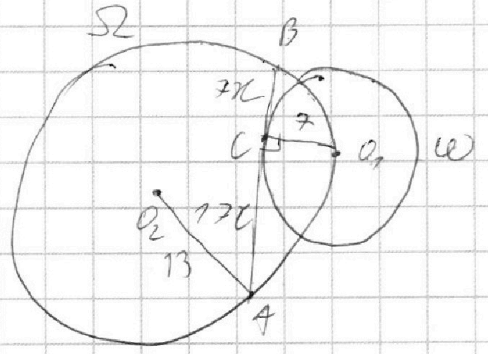
Задача 2

Если дробь $\frac{a}{b}$ - несократима то у a и b нет общих простых делителей, а это означает что $a+b$ и ab - взаимопросты так как ab - делится только на те простые делители в которые входили в состав a и b, а $a+b$ не может делится ни на 1 простое число что входило в состав a или b так как в обратном случае будет следовать что если 1 число делится и их сумма делится то и 2 число обязано делится, тогда $\frac{a}{b}$ можно будет сократить. Поэтому $a+b$ и ab - взаимопросты пусть $a+b=k$ $ab=n$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{k}{k^2-9n}$$ если эту дробь можно сократить то k делится на то на что делится k^2-9n. Понятно что оба эти числа могут делится только на 9 так как k и n - взаимопросты. Пусть k и k^2-9n кратно какому то числу ~~n~~ x отличному от 3 и 9 и >1. тогда $k \vdots x$ $k^2-9n \vdots x$ тогда $9n \vdots x$ $9 \not\vdots x \Rightarrow n \vdots x$ тогда k и n невзаимопросты $\Rightarrow x$ может быть только 3 или 9

Ответ: $m=9$ Например: $a=2$ $b=7$ $\frac{9}{4-98+49} = \frac{9}{4\cdot 5} = \frac{1}{5}$

Задача 3

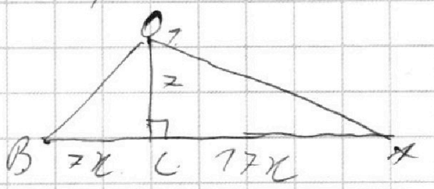


Дано:
радиус ω = 7
радиус Ω = 13
$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$
AB — касательная к ω

O_1 — центр окружности ω AB = ?

$O_1C \perp AB$ ~~так как~~ как угол между касательной и радиусом проведенным к точке касания

$\triangle AO_1B$ — вписан в ~~ок~~ Ω



Пусть $BC = 7x$ тогда $AC = 17x$

Из теорем пифагора для $\triangle BCO_1$ и $\triangle CO_1A$. $BO_1 = 7\sqrt{x^2+1}$ $O_1A = \sqrt{289x^2+49}$

$\sin\angle BO_1C = \frac{BC}{BO_1}$ $\sin\angle AO_1C = \frac{AC}{O_1A}$ $\cos\angle BO_1C = \frac{O_1C}{BO_1}$ $\cos\angle AO_1C = \frac{O_1C}{O_1A}$

$\sin\angle BO_1A = \sin(\angle BO_1C + \angle CO_1A) = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2+49}} + \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49x^2+49}} \Rightarrow \sin\angle BO_1A = \frac{24x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{289x^2+49}}$

O_2 — центр Ω

$2O_2A = \frac{BA}{\sin\angle BO_1A}$ $26 = \frac{24x}{\frac{24x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{289x^2+49}}}$ $26 = \sqrt{x^2+1}\sqrt{289x^2+49}$

$676 = 289x^4 + 49x^2 + 289x^2 + 49$ $t = x^2 \Rightarrow t \geq 0$

$676 = 289t^2 + 49t + 289t + 49$ $t = 1$ $t = -1 - \frac{338}{289}$ т.к. $t \geq 0$ $t = 1$

$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. $x \geq 0$ т.к. это расстояние

$AB = 24x = 24$. Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4.

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x^2-6x+2\ge 0\\ 3x^2+3x+1\ge 0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\frac{\sqrt{12}}{6}\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\\ x\in R\end{array}\right.\\ \sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\frac{\sqrt{12}}{6}\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\ne 0\\ 1-9x=(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\frac{\sqrt{12}}{6}\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ 1-9x\ne 0\\ \cancel{1-9x\ne 0}\left[\begin{array}{l}1-9x=0\\ 1=\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\end{array}\right.\\ \cancel{1=}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\frac{\sqrt{12}}{6}\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ x\ne\frac{1}{9}\\ 1-\sqrt{3x^2+3x+1}=\sqrt{3x^2-6x+2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\frac{\sqrt{12}}{6}\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ x\ne\frac{1}{9}\\ 1-2\sqrt{3x^2+3x+1}+3x^2+3x+1=3x^2-6x+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1+\frac{\sqrt{12}}{6}\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ x\ne\frac{1}{9}\\ -2\sqrt{3x^2+3x+1}=-9x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{\sqrt{12}}{6}+1\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ x\ne\frac{1}{9}\\ 4(3x^2+3x+1)=81x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{\sqrt{12}}{6}+1\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ x\ne\frac{1}{9}\\ 12x^2-69x+4=0\end{cases}$$

$$D=69^2-4\cdot 12\cdot 4=4569$$

$$x_{1,2}=\frac{69\pm\sqrt{4569}}{24}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{\sqrt{12}}{6}+1\\ x\le 1-\frac{\sqrt{12}}{6}\end{array}\right.\\ x\ne\frac{1}{9}\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{69+\sqrt{4569}}{24}\\ x=\frac{69-\sqrt{4569}}{24}\end{array}\right.\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{69+\sqrt{4569}}{24}$

4 из 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5

Заметим что нам подходят любая пара точек находящаяся на 2 прямых вида $y=-2x+b$ если b этих 2 прямых отличаются ровно на 7 (любые 2 точки подходят так как если у них одинаковая y координата то x у них отличаются ровно на 7 а следовательно $2(x_2-x_1)+y_2-y_1=14$ $2\cdot7+0=14$, ну а если мы смещаемся по этой прямой то с добавлением 2 y ~~на~~ x уменьшается на 1) ~~значит количество~~ при этом B всегда лежит на прямой с большим b. Значит количество ~~при~~ таких пар точек это количество способов выбрать пару точек на 2 прямых умноженное на кол-во способов выбрать пару прямых.

Всего в нутри данного параллелограмма 10 пар таких прямых и если мы выбираем на 1 паре точку B то у нас для этого есть 13 или 14 способов а на другой прямой для точки A также 13 или 14 ~~точек~~, ~~но если на одной 13 точек~~ то на другой обяза~~тельно 14 так как b отличаются~~ на 7 значит общее число способов это: $14\cdot13\cdot10$ ~~$+13\cdot13\cdot10$~~

способов выбрать ~~пункт~~ способов выбрать прямые

~~$14\cdot13\cdot10=1820$ способов~~

Ответ: 1820 способов выбрать пару A B.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

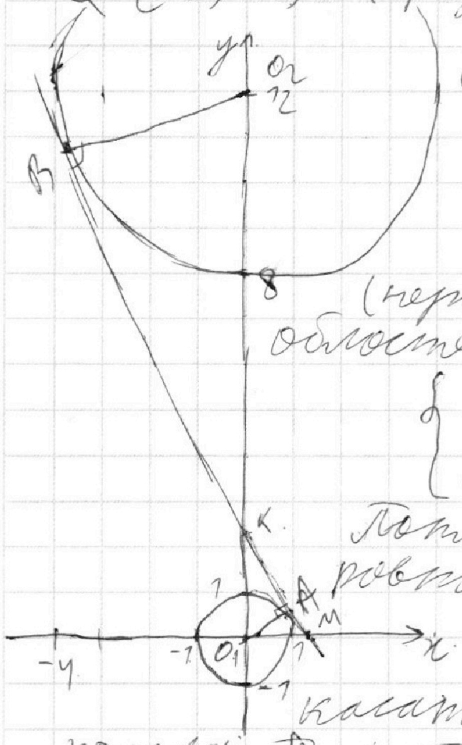
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$

Оно верно в 2 кругах на координатной плоскости xy первый круг с центром в $(0,0)$ и радиусом 1, а второй круг с центром в $(0;12)$ и радиусом 4. Пусть окружность с центром в $(0,0)$ это ω а с центром в $(0;12)$ это Ω



$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

(неравенство выполняется в областях ограниченных ω и Ω)

$$\begin{cases} y=-ax+8b \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

Понятно что у этой системы ровно 2 решения когда прямая $y=-ax+8b$ является общей касательной к ω и Ω

тогда ~~нам эту систему можно перепи~~сать как

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \text{ первая систему} \\ \begin{cases} y=-ax+8b \\ (y-12)^2+x^2=16 \end{cases} \text{ вторая системы} \end{array}\right.$$

у обоих этих систем должно быть по 1 решению решим их по отдельности

далее см на обороте.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+ax^2-16abx+64b=1 \end{cases}$$

$x^2(1+a)-16abx+64b-1=0$ $\quad 256(ab+b-a-1)$

$D=256a^2b^2-256(b-1)(1+a)=256a^2b^2-\cancel{256b-256ab}=$

$=256a^2b^2-\cancel{256b-256ab}\ 256(ab+b-a-1)$

так как у системы должно быть 1 решение

$D=0.$ $\quad 256a^2b^2-\cancel{256b-256ab}=0$ $\quad a^2b^2-ab-b+a+1=0$

$a^2b^2-b-ab\neq 0$

~~b~~ Очевидно при $b=0$ у этой системы больше 1 решение

$a^2b-a-1\neq 0$ (1)

$$\begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+(y-12)^2=16 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{8b-y}{a} \\ \frac{64b}{a^2}-\frac{16by}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+y^2-24y+144=16 \end{cases}$$

$D=0$ так как у система одно решение.

$y^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)-y\left(\frac{16b}{a^2}+24\right)+\frac{64b}{a^2}+144-16=0$

$\left(\frac{16b}{a^2}+24\right)^2-4\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{64b}{a^2}+128\right)=0$

$$\begin{cases} \left(\frac{16b}{a^2}+24\right)^2=4\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\left(\frac{64b}{a^2}+128\right) \\ a^2b^2-ab-b+a+1=0 \end{cases}$$

$a^2b^2-ab-b+a+1=0$ $\quad a^2b^2-a(b-1)-b+1=0$

$D=b^2-2b+1-4b^2(-b+1)$

Пусть эта касательная касается ω в A и Ω в B пусть O_1 - центр ω и O_2 - центр Ω

$AO_1=1$ как радиус. $BO_2=4$ как радиус

Пусть K - точка пересечения AB с OY

Пусть $O_2K=x$ тогда $O_1K=12-K$ ~~(Точки A и B.~~

$\angle O_2BK = 90$ (как между касательной и радиусом к точке касания)
$\angle O_1AK = 90$ (как между касательной и радиусом к точке касания)
Из теоремы пифагора для $\triangle O_2BK$ и $\triangle O_1AK$.

$AK^2 = (12-x)^2 - 1$
$BK^2 = x^2 - 16$

Посчитаем степень точки K относительно Ω

$BK^2 = (KO_2 - 4)(KO_2 + 4)$

$\triangle BO_2K$ подобен $\triangle AO_1K$ ($\angle O_2BK = \angle O_1AK$, $\angle BKO_2 = \angle AKO_1$ как вертикальные)

$\frac{BO_2}{AO_1} = \frac{O_2K}{O_1K}$ $\quad \frac{4}{1} = \frac{x}{12-x}$ $\quad x = 48 - 4x$
$5x = 48$ $\quad x = 9{,}6$ тогда

координаты K это $(0; 2{,}4)$. Тогда чтобы прямая $y = -ax + 8b$ ~~прош~~ являлась общей касательной к ω и Ω она должна проходить через $(0; 2{,}4)$ и касаться 2 окружностей
если $y = -ax + 8b$ касается ω то система $\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет 1 решение

$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0$ так как $y = -ax + 8b$ проходит через $(0; 2{,}4)$ то $2{,}4 = 8b$ $\quad b = 0{,}3$

$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0$
$x^2 + 64b - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$
$x^2(1 + a^2) - 16abx + (64b - 1) = 0$
$D = 0$ т.к. у системы 1 решение
$D = 256a^2b^2 - 4(1 + a^2)(64b - 1) = 0$
$64a^2b^2 = 64b - 1 + 64a^2b - a^2$
$64 \cdot 0{,}09 \cdot a^2 = 64 \cdot 0{,}3 - 1 + 64 \cdot 0{,}3\, a^2 - a^2$
$a^2(64 \cdot 0{,}09 + 1 - 64 \cdot 0{,}3) = 64 \cdot 0{,}3 - 1$
$a^2 = \frac{64 \cdot 0{,}3 - 1}{64 \cdot 0{,}09 + 1 - 64 \cdot 0{,}3}$ $\quad a^2 = \frac{64b - 1}{64b^2 + 1 - 64b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда из теоремы пифагора

~~$KA = 25$~~ $KA^2 = 5{,}76 - 1$ $KA = \sqrt{4{,}76}$

$\triangle O_1AK$ подобен $\triangle MO_1K$ (где K – точка пересечения AB с OX $\angle KO_1M = \angle O_1AK = 90$ $\angle O_1KM$ – общий)

$$\frac{O_1A}{MO_1} = \frac{\cancel{O_1K}\ AK}{O_1K} \qquad \frac{1}{MO_1} = \frac{\sqrt{4{,}76}}{2{,}4} \qquad MO_1 = \frac{2{,}4}{\sqrt{4{,}76}}$$

~~рассм~~ Рассмотрим прямую $y = -ax + 68$
~~и~~ тангенс угла наклона этой прямой равен $-a$ также эта прямая совпадает с AB поэтому с другой стороны тангенс угла наклона этой прямой это $\frac{O_1K}{O_1M}$

$$-a = \frac{1 \cdot \sqrt{4{,}76}}{2{,}4} \qquad a = -\frac{\sqrt{4{,}76}}{2{,}4}$$

, но так как AB может быть симметрично расположенной относительно OX ~~a~~ – a может быть равно $\frac{\sqrt{4{,}76}}{2{,}4}$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{4{,}76}}{2{,}4}$ $a = -\frac{\sqrt{4{,}76}}{2{,}4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

$1-9x = (1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$

$1=\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}$

$1-\sqrt{3x^2+3x+1}=\sqrt{3x^2-6x+2}$

$1-2\sqrt{3x^2+3x+1}+3x^2+3x+1=3x^2-6x+2$

$1-2\sqrt{3x^2+3x+1}=-9x$

$4(3x^2+3x+1)=81x^2$

$12x^2+12x+4=81x$

$12x^2-69x+4=0$

$1 = \quad x=\frac{1}{9}$

$\frac{1}{27}=2+2$

$\frac{1}{27}+2$

$-2+1$

$8+$

4

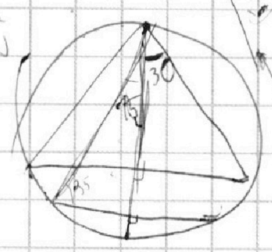
$-6x+2=3x+1$

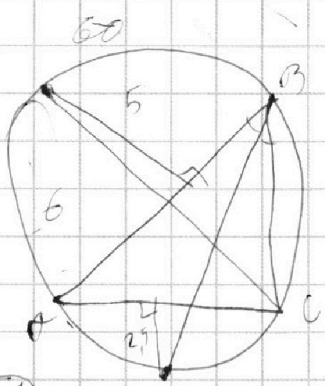
$9x=-1$

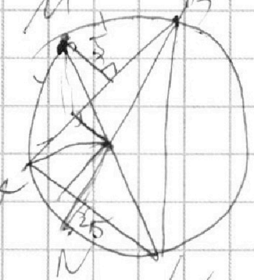
$x=1 \quad x=-1$

$4+4+5=13$ из

8 м





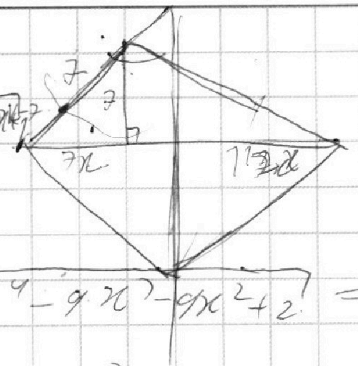


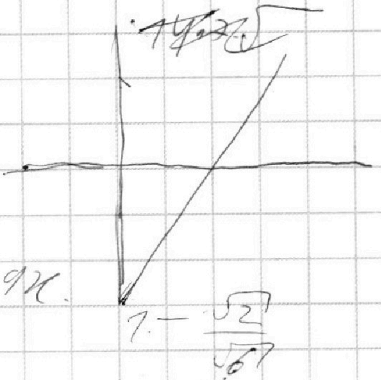
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$49x + 4y = 7$

$2\sqrt{x+1}$

$-9x+1+2\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2} = 1-9x$

$\cancel{9x^4-9x^3-9x^2+2=0}$

$14\cdot(2\sqrt{x+1}-7) = 98\sqrt{x+1}-98 = 9\cdot 49x$ $\quad x = \frac{7}{9}$

$\cancel{6x^2 = 3x + 1 + 2\sqrt{} = 1-9x}$

$1-9x = (1-9x)$ $\quad 3\cdot 6 = 18$

$2\sqrt{x+1}-2 = x$ $\quad 24x$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ $\quad a+b = mk$ $\quad a^2-2ab+b^2 = nk$ $\quad a+b = k$ $\quad ab = n$ $\quad$ к.и.п. взаимн.

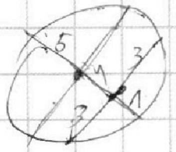
$(a-b)^2+5ab =$

$\cancel{\frac{k}{k^2-9n}}$

$k^2-9n =$ $\quad 9$ $\quad 22-23$

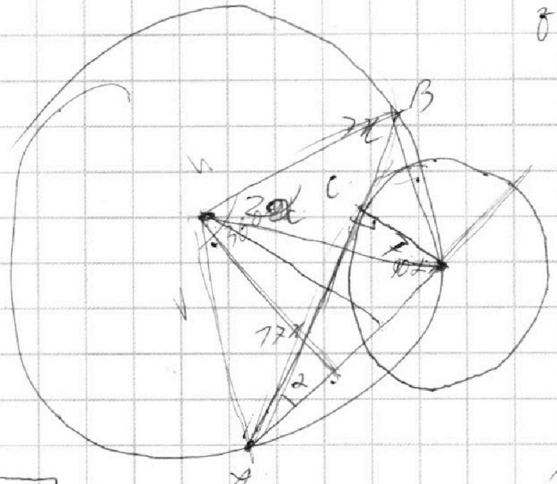
9 $\quad$ 6 $\quad \frac{2}{7}$

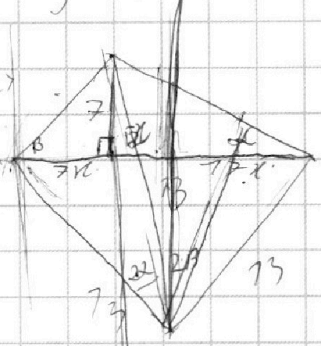
$\frac{9}{87-9\cdot 14} = \frac{9}{}$



7.10

y 1·9 9





180 − 2x

130

2894 12

$17x \quad 7x \quad 7x+5x$

$2\sqrt{x+1} = x+2$

12

$4x+4 = x^2+4x+4 \quad x=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a^2b^2c^2: 2^{56} \cdot 7^{58}$

$abc: 2^{28} \cdot 7^{29}$

15 + 40

11 + 18 + 39

15 + 17 + 23

№2

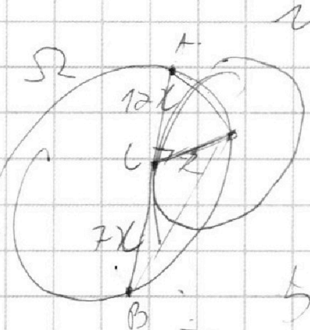
$a+b=15$

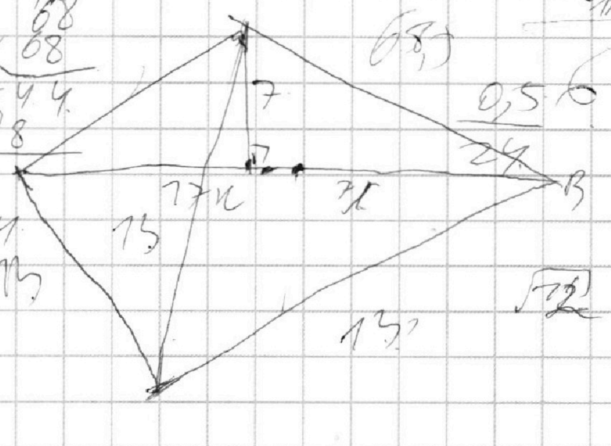
$\frac{a}{b}=$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

4761 − 792

№3





$\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

№4

$3x^2-6x+2=3x^2+3x+1$

$1-9x \geq 0$

$x-2\sqrt{3x^2-6x+2}=9x$

$12x^2-24x$

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

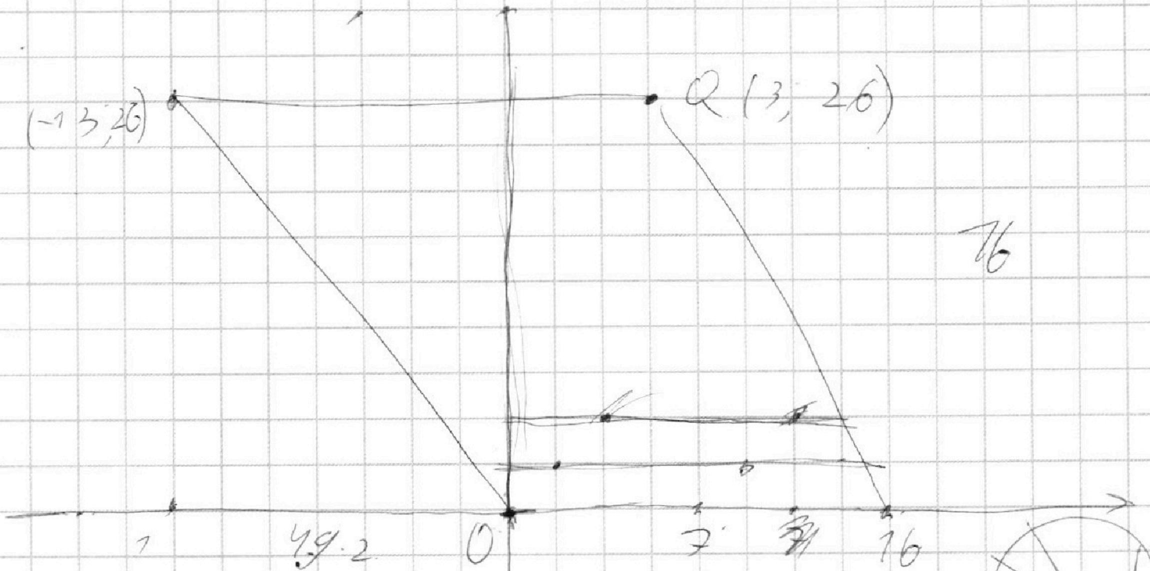
$\sqrt{(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2-1}-\sqrt{(\sqrt{3}x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



16

$y - 98 + 49$

$A(x_1; y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$16 - 9$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

10

$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1$

$-9x - 1$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$D = 36 - 24 = 12$

$\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$D = 9 - 12$ $(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) =$

$= 9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2 =$

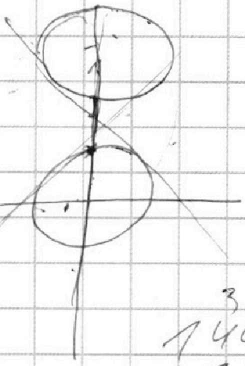
$= 9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$



$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

$12 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=1$

4 6 7

144
71

$\begin{array}{r} 144 \\ 16 \\ \hline 128 \end{array}$

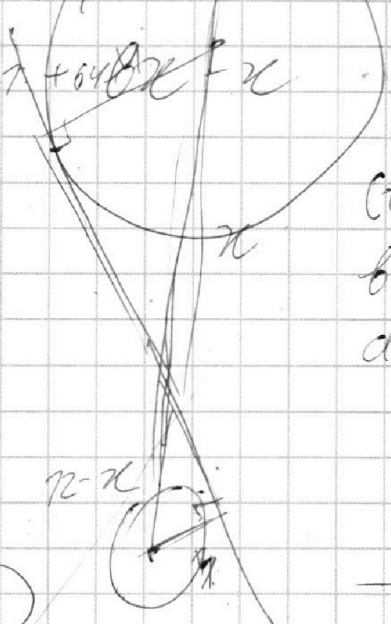
$ax+y-8b=0$ $ax-8b=y$

$y=-ax+8b$

$64a^2b^2=(1+a^2)(64b-1)$

$64a^2b^2=64b-1+64ba^2-a^2$

$64x\cancel{b^2}=64b-1+64bx-x$



$2{,}4\ge 8b$

$\sqrt{4{,}76}$

$-b+1$

$(b-1)(1+a)$ $+(-b+1)$

$b+ab-1-a$

$ab+b-a-1$

$2{,}4=8b$

$x-x$

$\begin{array}{r} 14 \\ 64 \\ \hline 3 \\ 2 \\ 71 \end{array}$

18,2

$b=0{,}3$

19,2

$\begin{cases} y=-ax+2{,}4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$426 \mid 4$ $\sqrt{119}$

$476 \mid 9$, 45, 26

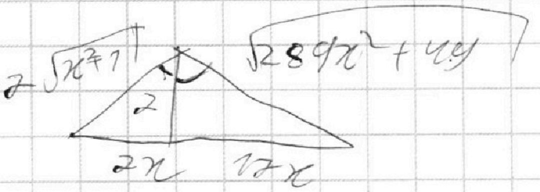
$2\sqrt{119}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$526x^2 = 49x^2 + 49 + 289x^2 + 49 - 2\sqrt{49x^2+49}\sqrt{289x^2+49} \cdot 2$

$234x^2 = 98 - 2$

$\cos = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

$2\sqrt{x^2+7}$ $\frac{x}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2+49}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}}$

$= \frac{24x}{\sqrt{x^2+7}\sqrt{289x^2+49}}$ $\frac{24x}{\frac{24x}{\sqrt{x^2+7}\sqrt{289x^2+49}}} = 2R$

$\sqrt{x^2+7}\sqrt{289x^2+49} = 26$

$(x^2+7)(289x^2+49) = 676$

$289x^4 + 49x^2 + 289x^2 + 49 = 676$

$289t^2 + 338t - 627 = 0$

$1 + x = -3$

26

520

120

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!