МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

Так как $ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{17}$ то $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17}$ где k – натуральное число. Так как $bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18}$ то $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$ где m – натуральное число. Так как $ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$ то $ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$ где n – натуральное число:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow a^2b^2c^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot knm$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot knm$$

так как квадрат натурального числа содержит в своем разложении все делители в четных степенях то $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \frac{knm}{2}$

если abc наименьшее то и $(abc)^2$ – наименьший, а значит и $2^{56} \cdot 7^{58} \frac{knm}{2}$ – наименьшее. а наименьшее оно при $\frac{knm}{2}$ равном $1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \Rightarrow abc = 2^{25} \cdot 7^{\cancel{58}}$ так как по условию $a; b; c$ – натуральные $\Rightarrow abc > 0$

Ответ: ~~abc~~ $\cancel{2^{25} \cdot 7^{58}}$ $2^{25} \cdot 7^{58}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 4~~

$$\cancel{\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x}$$

~~возведем в кв~~

$$\cancel{\left[\begin{array}{l}3x^2-6x+2\geq 0\\ 3x^2+3x+1\geq 0\end{array}\right.}$$

$$\cancel{3x^2-6x+2+}$$

Задача 2

Если дробь $\frac{a}{b}$ – несократима то у a и b нет общих простых делителей, а это означает что $a+b$ и ab – взаимопросты так как ab – делится только на те простые делители в которые входили в состав a и b, а $a+b$ не может делиться ни на 1 простое число что входило в состав a или b так как в обратном случае будет следовать что если 1 число делится 4 их сумма делится то 4 2 число обязано делиться, тогда $\frac{a}{b}$ можно будет сократить. Поэтому $a+b$ и ab – взаимопросты пусть $a+b=k$ $ab=n$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}=\frac{k}{k^2-9n}$$ если эту дробь можно сократить то k делится на то на что делится k^2-9n. Понятно что оба эти числа могут делиться только на 9 так как k и n – взаимопросты. Пусть k и k^2-9n кратны какому то числу ~~m~~ x отличному от 3 и 9 и >1. тогда $k \vdots x$ $k^2-9n \vdots x$ тогда $9n \vdots x$ $9 \not\vdots x \Rightarrow n \vdots x$ тогда k и n невзаимопросты $\Rightarrow x$ может быть только 1 3 или 9

Ответ: $m=9$ Например: $a=2$ $b=7$ $\frac{9}{4-98+49}=\frac{9}{4\cdot 5}=\frac{1}{5}$

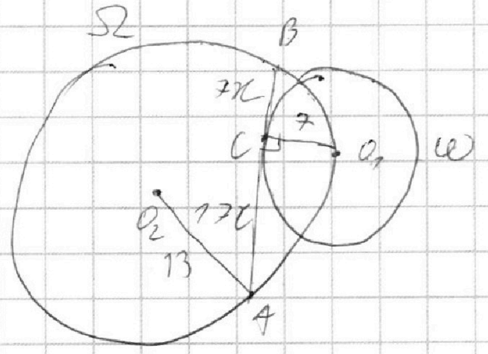
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

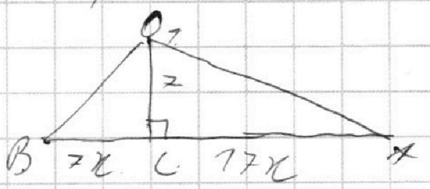


Дано:
радиус $\omega = 7$
радиус $\Omega = 13$
$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$
AB — касательная к ω

O_1 — центр окружности ω. $AB = ?$

$O_1C \perp AB$ ~~так как~~ как угол между касательной и радиусом проведённым к точке касания

$\triangle AO_1B$ — вписан в ~~ок~~ Ω



Пусть $BC = 7x$ тогда $AC = 17x$

Из теорем пифагора для $\triangle BCO_1$ и $\triangle CO_1A$. $BO_1 = 7\sqrt{x^2+1}$. $O_1A = \sqrt{289x^2+49}$

$\sin\angle BO_1C = \frac{BC}{BO_1}$ $\sin\angle AO_1C = \frac{AC}{O_1A}$ $\cos\angle BO_1C = \frac{O_1C}{BO_1}$ $\cos\angle AO_1C = \frac{O_1C}{O_1A}$

$\sin\angle BO_1A = \sin(\angle BO_1C + \angle CO_1A) = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2+49}} +$
$+ \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49x^2+49}} \Rightarrow \sin\angle BO_1A = \frac{24x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{289x^2+49}}$

O_2 — центр Ω

$2O_2A = \frac{BA}{\sin\angle BO_1A}$ $26 = \frac{24x}{\frac{24x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{289x^2+49}}}$ $26 = \sqrt{x^2+1}\sqrt{289x^2+49}$

$676 = 289x^4 + 49x^2 + 289x^2 + 49$ $t = x^2 \Rightarrow t \geq 0$

$676 = 289t^2 + 49t + 289t + 49$ $t = 1$ $t = -1 - \frac{338}{289}$ т.к. $t \geq 0$ $t = 1$

$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. $x \geq 0$ т.к. это расстояние

$AB = 24x = 24$. Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1+\frac{\sqrt{12}}{6} \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \\ x\in R \end{array}\right. \\ \sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1+\frac{\sqrt{12}}{6} \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\neq 0 \\ 1-9x=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1+\frac{\sqrt{12}}{6} \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ 1-9x\neq 0 \\ \cancel{1-9x\neq 0} \quad \left[\begin{array}{l} 1-9x=0 \\ 1=\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1} \end{array}\right. \\ \cancel{1=} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1+\frac{\sqrt{12}}{6} \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ x\neq \frac{1}{9} \\ 1-\sqrt{3x^2+3x+1}=\sqrt{3x^2-6x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1+\frac{\sqrt{12}}{6} \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ x\neq \frac{1}{9} \\ 1-2\sqrt{3x^2+3x+1}+3x^2+3x+1=3x^2-6x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1+\frac{\sqrt{12}}{6} \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ x\neq \frac{1}{9} \\ -2\sqrt{3x^2+3x+1}=-9x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq \frac{\sqrt{12}}{6}+1 \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ x\neq \frac{1}{9} \\ 4(3x^2+3x+1)=81x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq \frac{\sqrt{12}}{6}+1 \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ x\neq \frac{1}{9} \\ 12x^2-69x+4=0 \end{cases}$$

$$D=69^2-4\cdot 12\cdot 4=4569$$

$$x_{1,2}=\frac{69\pm\sqrt{4569}}{24}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq \frac{\sqrt{12}}{6}+1 \\ x\leq 1-\frac{\sqrt{12}}{6} \end{array}\right. \\ x\neq \frac{1}{9} \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{69+\sqrt{4569}}{24} \\ x=\frac{69-\sqrt{4569}}{24} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{69+\sqrt{4569}}{24}$

4 из 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5

Заметим что нам подходят любая пара точек находящаяся на 2 прямых вида $y=-2x+b$ если b этих 2 прямых отличаются ровно на 7 (любые 2 точки подходят так как если у них одинаковая y координата то x у них отличаются ровно на 7 а следовательно $2(x_2-x_1)+y_2-y_1=14$ $2\cdot 7+0=14$, ну и если мы смещаемся по этой прямой то с добавлением 2 y ~~на~~ x уменьшается на 1) ~~значит количество~~ при этом B всегда лежит на прямой с большим b. Значит количество ~~при~~ таких пар точек это количество способов выбрать пару точек на 2 прямых умноженное на кол-во способов выбрать пару прямых.

всего в нутри нашего параллелограмма 10 пар таких прямых и если мы выбираем на 1 паре точку B то у нас для этого есть 13 или 14 способов а на другой прямой для точки A также 13 или 14 ~~точек~~, ~~но если на одной 13 точек то на другой обязательно 14.~~ так как ~~в~~ ~~отличаются~~ на 7 значит общее число способов это: $14\cdot 13\cdot 10+13\cdot 13\cdot 10$

~~способов всего пар~~ способов выбрать прямые
~~$14\cdot 13\cdot 10=1820$~~ способов

Ответ: 1820 способов выбрать пару AB.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

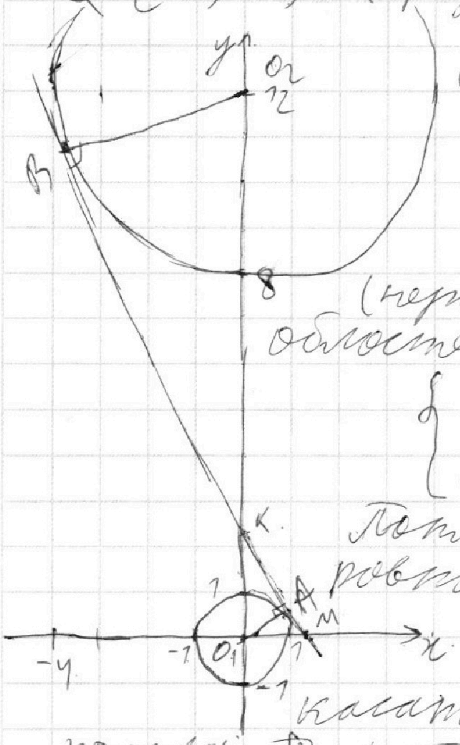
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$

Оно верно в 2 кругах на координатной плоскости xy первый круг с центром в $(0,0)$ и радиусом 1, а второй круг с центром в ~~в~~ $(0;12)$ и радиусом 4. Пусть окружность с центром в $(0,0)$ это ω а с центром в $(0;12)$ это Ω



$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16\le 0 \end{cases}$$

(неравенство выполняется в областях ограниченных ω и Ω)

$$\begin{cases} y=-ax+8b \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

Понятно что у этой системы ровно 2 решения когда прямая $y=-ax+8b$ является общей касательной к ω и Ω

~~тогда нам эту систему можно переписать как~~

~~$\left[\begin{cases} y=-ax+8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}\right.$ первая систему~~

~~$\begin{cases} y=-ax+8b \\ (y-12)^2+x^2=16 \end{cases}$ вторая системы~~

~~у обоих этих систем должно быть по 1 решению решим их по отдельности~~

далее см на обороте.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + ax^2 - 16abx + 64b = 1 \end{cases}$

$x^2(1+a) - 16abx + 64b - 1 = 0$ $256(ab + b - a - 1)$

$D = 256a^2b^2 - 256(b-1)(1+a) = 256a^2b^2 - \cancel{256b - 256ab} =$

$= 256a^2b^2 - \cancel{256b - 256ab}\ 256(ab + b - a - 1)$

так как у системы должно быть 1 решение

$D = 0$. $256a^2b^2 - \cancel{256b - 256ab} = 0$ $a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0$

$a^2b^2 - b - ab = 0$

~~b~~ Очевидно при $b = 0$ у этой системы больше 1 решение

$a^2b - a - 1 \neq 0$ (1)

$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{8b - y}{a} \\ \frac{64b}{a^2} - \frac{16by}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases}$

$D = 0$ так как у системы одно решение.

$y^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) - y\left(\frac{16b}{a^2} + 24\right) + \frac{64b}{a^2} + 144 - 16 = 0$

$\left(\frac{16b}{a^2} + 24\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{64b}{a^2} + 128\right) = 0$

$\begin{cases} \left(\frac{16b}{a^2} + 24\right)^2 = 4\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\left(\frac{64b}{a^2} + 128\right) \\ a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0 \end{cases}$

$a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0$ $a^2b^2 - a(b - 1) - b + \cancel{1} = 0$

$D = b^2 - 2b + 1 - 4b^2(-b + 1)$

Пусть эта касательная касается ω в A и Ω в B. пусть O_1 - центр ω и O_2 - центр Ω

$AO_1 = \cancel{1}$ как радиус. $BO_2 = 4$ как радиус

Пусть K - точка пересечения AB с OY

Пусть $O_2K = x$ тогда $O_1K = 12 - K$ ~~(Точки~~
~~A и B.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle O_2BK = 90$ (как между касательной и радиусом к точке касания

$\angle O_1AK = 90$ (как между касательной и радиусом к точке касания)

Из теорем пифагора для $\triangle O_2BK$ и $\triangle O_1AK$.

$AK^2 = (12-x)^2 - 1$

$BK^2 = x^2 - 16$

Посчитаем степень точки K относительно Ω

$BK^2 = (KO_2 - 4)(KO_2 + 4)$

$\triangle BO_2K$ подобен $\triangle AO_1K$ ($\angle O_2BK = \angle O_1AK$, $\angle BKO_2 = \angle AKO_1$ как вертикальные)

$\frac{BO_2}{AO_1} = \frac{O_2K}{O_1K}$ $\quad \frac{4}{1} = \frac{x}{12-x}$ $\quad x = 48 - 4x$ $\quad 5x = 48$ $\quad x = 9{,}6$ тогда

координаты K это $(0; 2{,}4)$. Тогда чтобы прямая $y = -ax + 8b$ ~~проходила~~ являлась общей касательной к ω и Ω она должна проходить через $(0; 2{,}4)$ и касаться 2 окружностей

если $y = -ax + 8b$ касается ω то система $\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет 1 решение

$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0$ так как $y = -ax + 8b$ проходит через $(0; 2{,}4)$ то $2{,}4 = 8b$ $\quad b = 0{,}3$

$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0$

$x^2 + 64b - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$

$x^2(1 + a^2) - 16abx + (64b - 1) = 0$

$D = 0$ т.к. у системы 1 решение

$D = 256a^2b^2 - 4(1 + a^2)(64b - 1) = 0$

$64a^2b^2 = 64b - 1 + 64a^2b - a^2$

$64 \cdot 0{,}09 \cdot a^2 = 64 \cdot 0{,}3 - 1 + 64 \cdot 0{,}3 a^2 - a^2$

$a^2(64 \cdot 0{,}09 + 1 - 64 \cdot 0{,}3) = 64 \cdot 0{,}3 - 1$

$a^2 = \frac{64 \cdot 0{,}3 - 1}{64 \cdot 0{,}09 + 1 - 64 \cdot 0{,}3}$ $\quad a^2 = \frac{64b - 1}{64b^2 + 1 - 64b}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда из теоремы пифагора

~~$KA = 25$~~ $KA^2 = 5,76 - 1$ $KA = \sqrt{4,76}$

$\triangle O_1AK$ подобен $\triangle MO_1K$ (где K – точка пересечения AB с OX $\angle KO_1M = \angle O_1AK = 90$ $\angle O_1KM$ – общий)

$$\frac{O_1A}{MO_1} = \frac{AK}{O_1K} \quad \frac{1}{MO_1} = \frac{\sqrt{4,76}}{2,4} \quad MO_1 = \frac{2,4}{\sqrt{4,76}}$$

~~уг~~ Рассмотрим прямую $y = -ax + b8$
~~и~~ тангенс угла наклона этой прямой равен $-a$ также эта прямая совпадает с AB поэтому с другой стороны тангенс угла наклона этой прямой это $\frac{O_1K}{O_1M}$

$$-a = \frac{1 \cdot \sqrt{4,76}}{2,4} \quad a = -\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$$, но так

как AB может быть семетрично рассмотренной относительно OX a – a может буть равно $\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$

Ответ: $a = \frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$ $a = -\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$

8 из 9

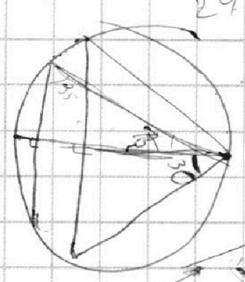
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4+4+5 = 13 из



$1 - 9x = (2-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}\right)$

$1 = \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$

$1 - \sqrt{3x^2+3x+1} = \sqrt{3x^2-6x+2}$

$1 - 2\sqrt{3x^2+3x+1} + \cancel{3x^2} + 3x + 1 = \cancel{3x^2} - 6x + 2$

$1 - 2\sqrt{3x^2+3x+1} = -9x$

$4(3x^2+3x+1) = 81x^2$

$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$

$-69x^2 + 12x + 4 = 0$

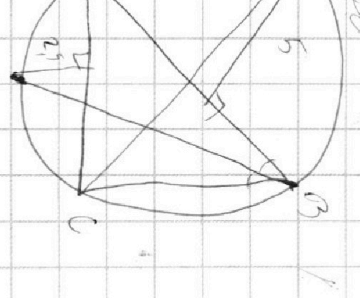
$-6x + 2 = 3x + 1$

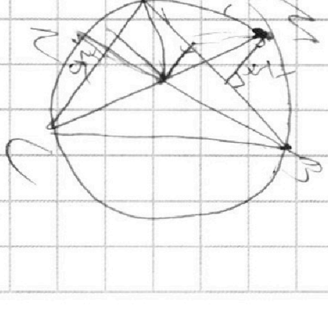
$9x = -1$

$x = -1$

$\frac{1}{27} = 2 + 2$

$1 = \quad x = \frac{-1}{9}$

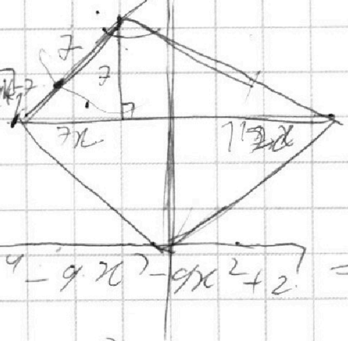


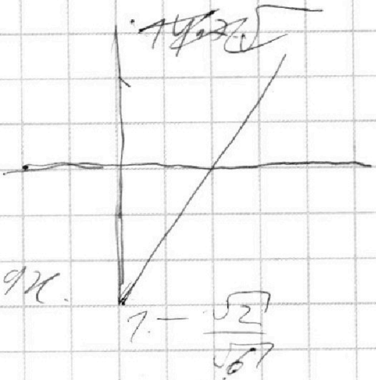


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$4\cdot 9x+4y=7$

$2\sqrt{x+1}$

$-9x+1+2\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2}=1-9x$

$\cancel{9x^4-9x^3-9x^2+2=0}$

$14\cdot(2\sqrt{x+1}-7)=98\sqrt{x+1}-98=9\cdot 49x$ $\quad x=7$

$\cancel{6x^2=3x+1+2\sqrt{\quad}=1-9x}$

$1-9x=(1-9x)\sqrt{\quad}$ $\quad 3\cdot 6=18$

$2\sqrt{x+1}-2=x$ $\quad 24x$

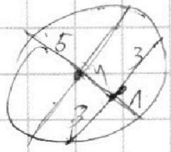
$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ $\quad a+b=mk$, $\cancel{a^2-2ab+b^2=nk}$ $\quad a+b=k$, $ab=n$ $\quad$ к.и.п. взаимн.

$\cancel{(a-b)^2+5ab=}$

$\frac{k}{k^2-9n}$

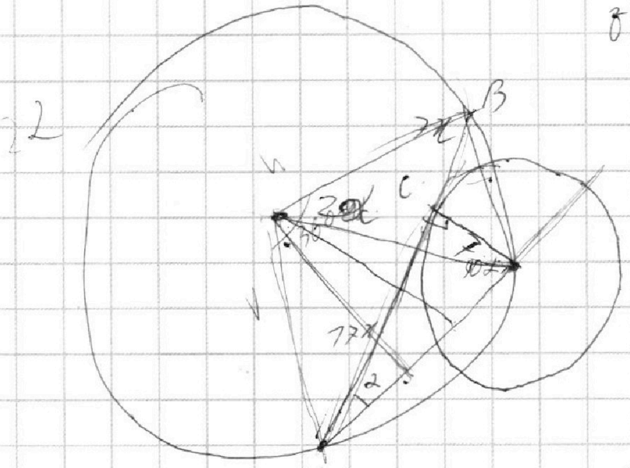
$k^2-9n=$ $\quad 9$ $\quad 9$ $\quad 6$ $\quad \frac{2}{7}$ $\quad 7\cdot 10$

$22-2B$ $\quad \frac{9}{87-9\cdot 14}=\frac{9}{\quad}$



y $\quad 1\cdot 9$ $\quad 9$

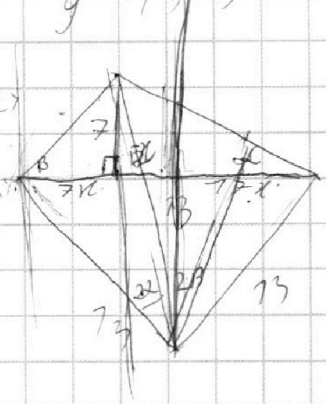
12



$180-2x$

130

$289/42$



$17\cdot x$ $\quad 7x$ $\quad 7x+5x$

$2\sqrt{x+1}=x+2$

12

$4x+4=x^2+4x+4$ $\quad x=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ №

$ab: 2^{15}\cdot 7^{11}$ $15+40$ $15+17+23$

$bc: 2^{17}\cdot 7^{18}$

$11+18+39$

$ac: 2^{23}\cdot 7^{39}$

$a^2b^2c^2: 2^{56}\cdot 7^{58}$

$abc: 2^{28}\cdot 7^{29}$

76 · 72 · 792 4761 − 792 = 4369

$6x$

№ 2

$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1$

$a+b=15$

$1-9x \geq 0$

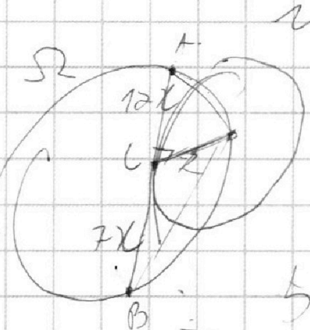
$\frac{a}{b}=$ $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$x-2\sqrt{3x^2-6x+2}=9x$

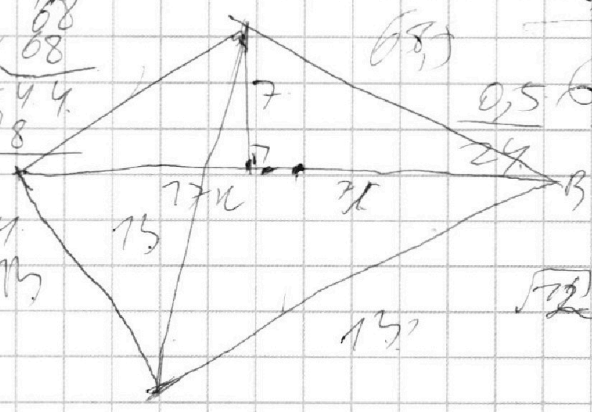
№ 3

$12x^2-24x$

4761 − 792



68 · 68 = 544 · 408 · 4624



$\angle 28$

$\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

№ 4

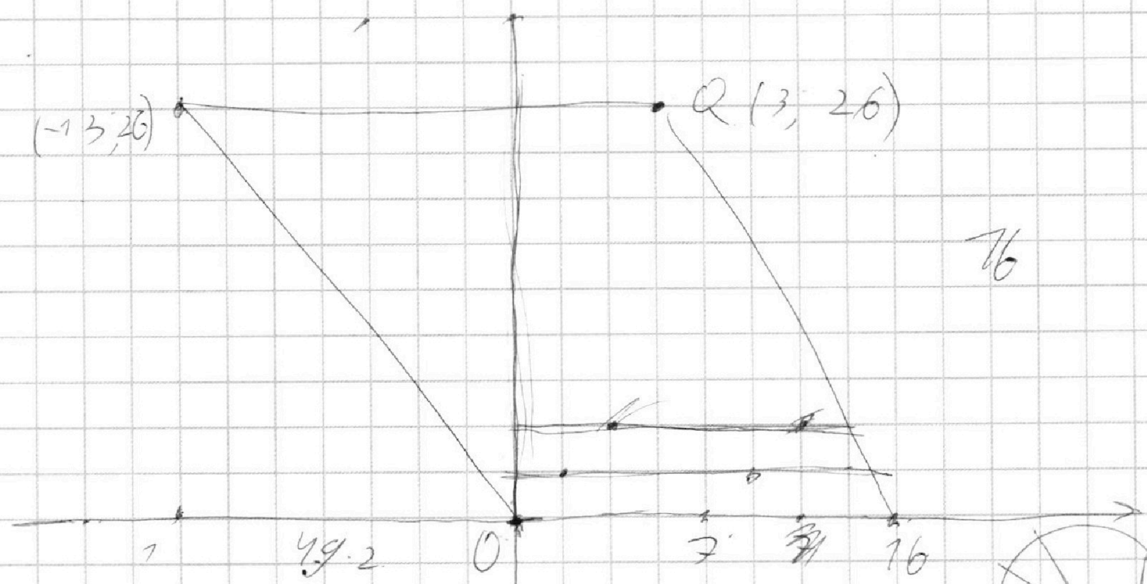
$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$\sqrt{(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2-1}-\sqrt{(\sqrt{3}x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

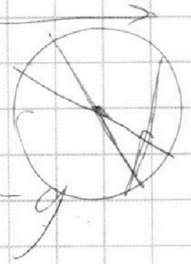
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



76

$y - 98 + 49$



$A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$

$16 - 9$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

10

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 - 3x - 1$

$-9x - 7$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$D = 36 - 24 = 12$

$\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$-3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$D = 9 - 12$ $(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) =$

$= 9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2 =$

$= 9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2$

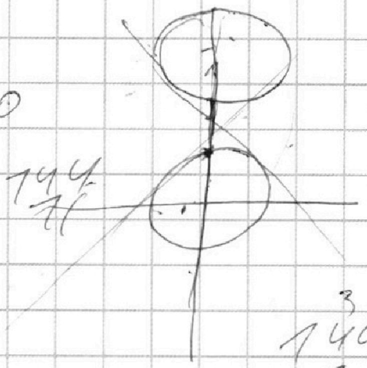
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0$



$12 \quad x^2+(y-1)^2=1$

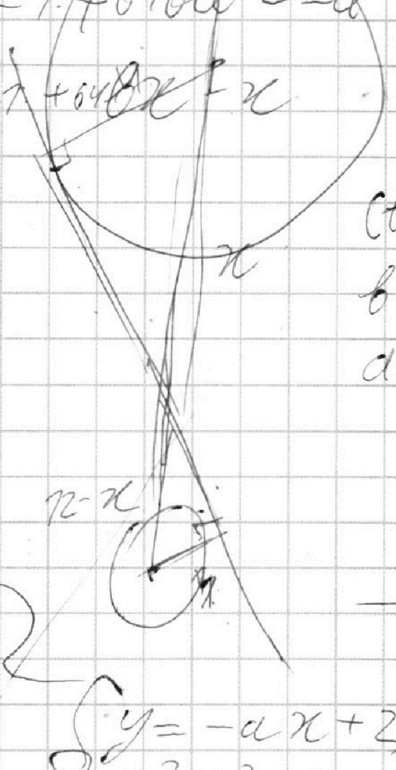
$ax+y-8b=0 \qquad ax-8b=y$

$y=-ax+8b$

$64a^2b^2=(1+a^2)(64b-1)$

$64a^2b^2=64b-1+64ba^2-a^2$

$64x\,b^2=64b-1+64bx-x$



$2{,}4\cdot 3\sqrt{b}$

$(b-1)(1+a)$

$b+ab-1-a$

$ab+b-a-1$

$-b+1$

$+(-b+1)$

$2{,}4=8b$

$b=0{,}3$

$18{,}2$

$$\begin{cases} y=-ax+2{,}4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

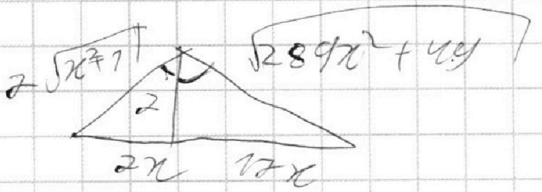
$476 \mid 4$

$2\sqrt{119}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$526x^2=49x^2+49+289x^2+49-2\sqrt{49x^2+49}\sqrt{289x^2+49}\cdot 2$

$234x^2=98-2$

$2\sqrt{x^2+7}$ $\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}=\frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}}$

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}\cdot\frac{7}{\sqrt{289x^2+49}}+\frac{4}{\sqrt{x^2+7}}\cdot\frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}}=$

$=\frac{24x}{\sqrt{x^2+7}\sqrt{289x^2+49}}$ $\quad \frac{24x}{\frac{24x}{\sqrt{x^2+7}\sqrt{289x^2+49}}}=2R$

$\sqrt{x^2+7}\sqrt{289x^2+49}=26$

$(x^2+7)(289x^2+49)=676$

$289x^4+49x^2+289x^2+49=676$

$289t^2+338t-627=0$

$1+x=-3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!