



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

за $v_p(a)$ обозначим наибольшее неотрицательное число k , такое, что $p^k | a$ ($x | y \Leftrightarrow y : x$), где p — простое, a — целое

т.к. $ab : 3^{11} \nmid$, то $ab : 3^{11} \Rightarrow v_3(ab) \geq 11$. заметим, что $v_3(a \cdot b) = v_3(a) + v_3(b) \Rightarrow v_3(a) + v_3(b) \geq 11$. также $ab : 7^{11} \Rightarrow v_7(a) + v_7(b) \geq 11$

аналогично, т.к. $bc : 3^{18} \nmid$, то $v_3(b) + v_3(c) \geq 18$; $v_7(b) + v_7(c) \geq 16$. т.к. $ac : 3^{21} \nmid$, то $v_3(a) + v_3(c) \geq 21$; $v_7(a) + v_7(c) \geq 38$.

имеем:

$$\begin{cases} v_3(a) + v_3(b) + v_3(b) + v_3(c) + v_3(a) + v_3(c) \geq 11 + 18 + 21 \\ v_7(a) + v_7(b) + v_7(b) + v_7(c) + v_7(a) + v_7(c) \geq 11 + 16 + 38 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} 2(v_3(a) + v_3(b) + v_3(c)) \geq 50 \\ 2(v_7(a) + v_7(b) + v_7(c)) \geq 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 25 \\ v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq \frac{65}{2} \end{cases}$$

т.к. $v_p(a) \in \mathbb{Z}$, то $v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq 33$

заметим, что $v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) = v_3(abc) \geq 25$

аналогично, $v_7(abc) \geq 33$

значит, $abc : 7^{33}$ и $abc : 3^{25} \Leftrightarrow abc : 3^{25} \cdot 7^{33} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{33}$

но кроме того, $v_7(a \cdot c) \geq 38 \Rightarrow v_7(a) + v_7(c) \geq 38 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq 38 \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

равенство может достигаться при $a = 3^7 \cdot 7^{11}$; $b = 3^4$; $c = 3^{14} \cdot 7^{27}$

Ответ: $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} - \text{несократима} \Rightarrow (a; b) = 1 \quad (a; b) = \text{НОД}(a; b)$$

$$m - \text{наибольшее число} : m \mid a+b \text{ и } m \mid a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow m = (a+b; a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a+b; a^2 - 2ab + b^2) = (a+b; (a+b)^2 - 4ab) = (a+b; -10ab)$$

$$m \mid a+b \text{ и } m \mid -10ab$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ a \equiv -b \pmod{m} \quad -10ab \equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ -10ab \equiv 10b^2 \pmod{m} \equiv 0 \quad \text{если } m \mid b, \text{ то } m \mid a \text{ - противореч. с } (a; b) = 1 \\ \Downarrow \\ 10 \equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

получается, m - делитель 10. Наибольший делитель

положительного числа - само число \Rightarrow наибольшее $m = 10$.

возьмем $a = 3; b = 7$:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2 + 4ab} = \frac{10}{-110} \Rightarrow m = 10$$

получается

Ответ: $m = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

н.к. $2x^2 - 3x + 4 > 0$ и $2x^2 + x + 3 > 0$ при любых $x \in \mathbb{R}$, но

РДЗ: ~~х~~ x -любые

положим $2x^2 - 3x + 4 = a$, $4x - 1 = b$, уравнение примет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$$

$$\sqrt{a} + b = \sqrt{a+b} \quad | \text{возведем обе части в квадрат}$$

$$a + 2b\sqrt{a} + b^2 = a + b$$

$$b^2 + 2b(2\sqrt{a} - 1) = 0$$

⇓

$$b = 0$$

1st case: $b = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$$b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

подставим для проверки: $\sqrt{\frac{2}{16} - \frac{12}{16} + \frac{64}{16}} - \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{4}{16} + \frac{48}{16}} \stackrel{?}{=} 0$
 $\stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{54}{16}} - \sqrt{\frac{54}{16}} \stackrel{?}{=} 0$ верно $\Rightarrow x = \frac{1}{4}$ - реш

2nd case: $b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$

$$2\sqrt{a} = 1 - b \quad | \text{возведем в квадрат}$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

н.к. $a = 2x^2 - 3x + 4$, $b = 4x - 1$, то

$$8x^2 - 12x + 16 = 1 - 8x + 2 + 16x^2 - 8x + 1$$

$$8x^2 - 4x - 12 = 0 \quad | :4$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{3}{2}$$

еще проверим предположение, что $x = -1$ и

$x = \frac{3}{2}$ - не оба реш.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$

Подставим $x = \frac{3}{2}$:

$$\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2}} \stackrel{?}{=} 1 - 6$$

$$\stackrel{?}{=} 1 - 6 \Leftrightarrow \sqrt{4} - \sqrt{9} = -5, \text{ что неверно}$$

Подставим $x = -1$:

$$\sqrt{2+3+4} - \sqrt{2-1+3} \stackrel{?}{=} 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9} - \sqrt{2} = 5, \text{ что неверно}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

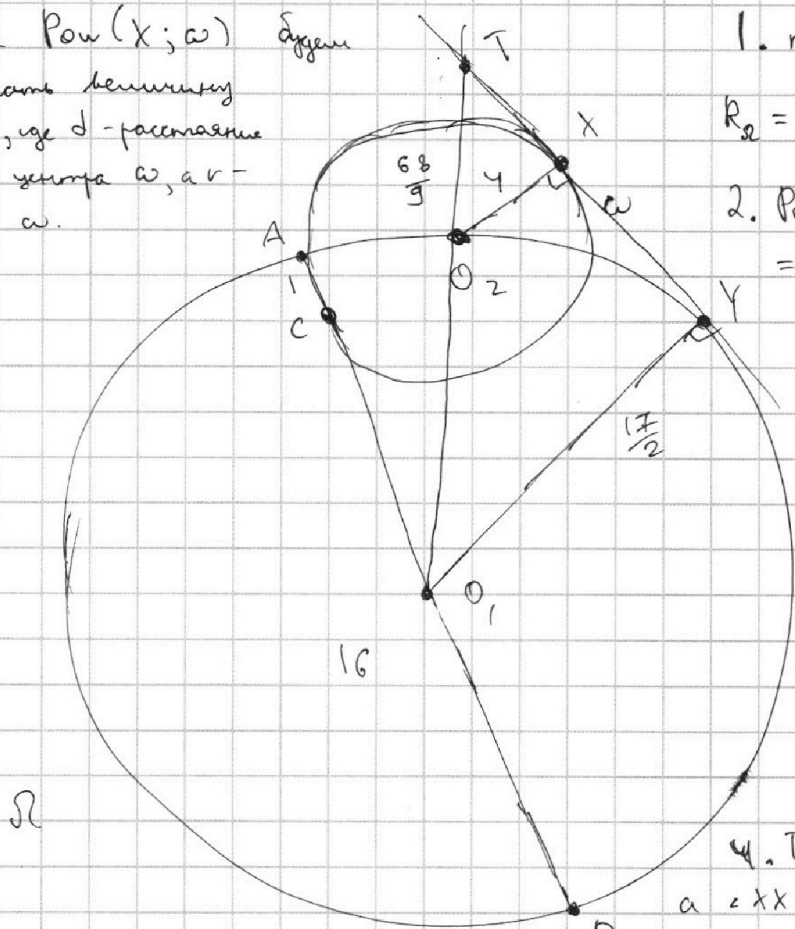
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



за $Pow(X; \omega)$ будем обозначать величину $d^2 + r^2$, где d - расстояние от X до центра ω , а r - радиус ω .



1. м.к. $AC=1$; $OC=16$, по

$$R_{\Omega} = (1+16) \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

2. $Pow(O_2; \omega) = O_2O_2^2 - R\omega^2 =$
 $= \frac{289}{4} - R\omega^2 = O_1C^2 = (\frac{15}{2})^2$

\Downarrow двойника степени точки
 $R\omega^2 = \frac{289}{4} - \frac{225}{4} = 16$

\Downarrow
 $P_{\omega} = 4$

3. линия XY - общая кас. к ω и Ω , $X \in \omega$; $Y \in \Omega$. проведем O_1O_2 до перес. с XY : $O_1O_2 \cap XY = T$

4. $\angle O_2X \sim \angle O_1Y$ ($\angle T$ - общий, а $\angle XXO_2 = \angle TYO_1 = \frac{17}{2}$ угла касания)

5. из подобия п. 4:

$$\frac{TO_2}{TO_2 + O_2O_1} = \frac{O_2X}{O_1Y} \Leftrightarrow \frac{TO_2}{TO_2 + \frac{17}{2}} = \frac{4}{17/2} \Leftrightarrow \frac{2TO_2}{2TO_2 + 17} = \frac{8}{17} \Rightarrow 34TO_2 = 16TO_2 + 136 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TO_2 = \frac{68}{9}$$

6. $Pow(T; \omega) = TO_2^2 - R\omega^2 = \frac{4624}{81} - 16 = \frac{3328}{81} = TX^2 \Rightarrow TX = \frac{8}{9} \sqrt{52} =$

$$= \frac{16}{9} \sqrt{13}$$

7. из подобия п. 4 $\Rightarrow \frac{TY}{TX} = \frac{4}{17/2} \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{13}}{9TY} = \frac{8}{17} \Rightarrow 34\sqrt{13} = 9TY \Rightarrow TY = \frac{34}{9} \sqrt{13}$

8. $XY = TY - TX = \frac{34}{9} \sqrt{13} - \frac{16}{9} \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

Ответ: $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = 2 \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \quad (x, y, z \neq 0) ; x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = ? = A$$

преобразуем второе равенство:

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow \frac{xy}{3y+x} = \frac{z}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$\text{знаем, } \frac{2xy}{3y+x} = 3x+2y \Rightarrow 2xy = (3x+2y)(3y+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy \Leftrightarrow x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+2y) = 0$$

$$\text{1st case: } x = -y \Rightarrow z = -y, \text{ тогда } A = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{2nd case: } x = -2y \Rightarrow z = -4y : A = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

~~Ответ: $\frac{2}{5}$ или 4.~~ Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

обозначим длину пути от А до В за S , скорости велосипедиста за v_b , мотоциклиста - за v_m по условию верна система:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_b} = \frac{S}{v_m} + 2 & (1) \\ v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96 = v_m - \frac{S}{v_b} & (2) \\ \frac{S}{v_b+6} = \frac{S}{v_m+6} + \frac{5}{4} & (3) \end{cases}$$

умножим (1) на v_b : $S = \frac{S \cdot v_b}{v_m} + 2v_b = v_m \cdot \frac{S}{v_b} + 2v_b$

$$\frac{v_m \cdot S}{v_b} = S + 2v_m = v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96, \text{ т.к. } \frac{S}{v_m} = \frac{S}{v_b} - 2, \text{ то}$$

$$S + 2v_m = v_b \cdot \left(\frac{S}{v_b} - 2\right) + 96 \Rightarrow S + 2v_m = S - 2v_b + 96 \Rightarrow \boxed{v_m + v_b = 48}$$

подставим в (1) и (3) вместо $v_b = 48 - v_m$:

$$\begin{cases} \frac{S}{48-v_m} = \frac{S+2v_m}{v_m} \Rightarrow S v_m = 24S + 48v_m - v_m^2 \\ \frac{S}{54-v_m} = \frac{S}{v_m+6} + \frac{5}{4} \Rightarrow S(v_m+6) = (54-v_m)(S+a v_m+6a) \end{cases}$$

$$S v_m + 6S = 54S$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v_m, v_b, t_m, t_b.$$

$$v_b \cdot t_b = ?$$
$$v_m \cdot t_m = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_m + 2 = t_b \\ v_b \cdot t_m + 96 = v_m \cdot t_b \\ \frac{v_b \cdot t_b}{v_b + 6} = \frac{v_m \cdot t_m}{v_m + 6} + a \end{array} \right.$$

$$a = \frac{5}{6}$$

$$-26 t_b = -36 t_m - 72$$

$$\frac{v_b \cdot t_b}{v_b + 6} = \frac{t_b}{6} - \frac{6 t_b}{v_b + 6} = t_m - \frac{6 t_m}{v_m + 6}$$

$$2 - \frac{6 t_b}{v_b + 6} = - \frac{6 t_m}{v_m + 6}$$

$$-6 v_m t_b = -6 v_b t_m - 96 \cdot 6$$

$$\frac{2 v_b + 12 - 6 t_b}{v_b + 6} = \frac{-6 t_m}{v_m + 6}$$

$$2 v_b \cdot v_m + 12 v_m - 6 t_b v_m + 12 v_b + 72 - 36 t_b = -6 t_m v_b - 36 t_m$$

$$2 v_b \cdot v_m + 12 v_m - 96 \cdot 6 + 12 v_b + 72 - 36 t_b = -36 t_m$$

$$2 v_b \cdot v_m + 12 v_m - 96 \cdot 6 + 12 v_b = 0$$

$$v_b \cdot v_m + 6 v_m - 96 \cdot 3 + 6 v_b = 0 \quad | \cdot t_b$$

$$t_b \cdot v_m + 6 v_m \cdot t_b - 96 \cdot 3 t_b + 65 = 0$$

$$5 \cdot v_m + 6(v_b t_m + 96) - 96 \cdot 3 t_b + 65 = 0 \quad t_b = t_m + 2$$

$$5 \cdot v_m + 6 v_b \cdot t_m + 96 \cdot 6 - 96 \cdot 3(t_m + 2) + 65 = 0$$

$$v_b \cdot t_b = v_m + 6 v_b \cdot t_m - 3 t_m + 65 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



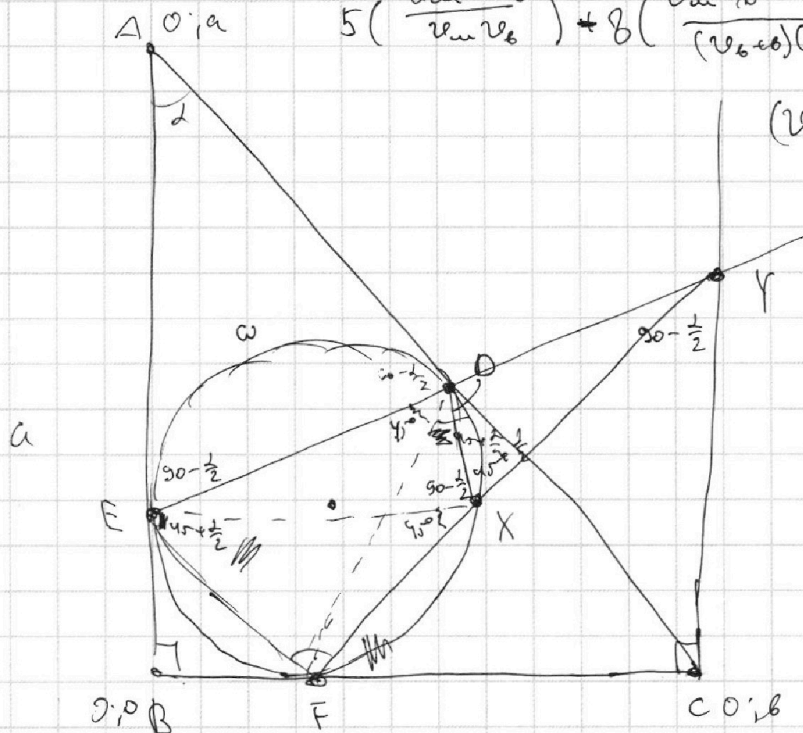
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5s}{v_b} - \frac{5s}{v_m} - \frac{6s}{v_b + 6} + \frac{8s}{v_m + 6} = 0$$

$$5 \left(\frac{v_m + v_b}{v_m v_b} \right) + 8 \left(\frac{v_m + 6 - v_b - 6}{(v_b + 6)(v_m + 6)} \right) = 0$$

$$(v_m - v_b) \left(\frac{5}{v_m - v_b} - \frac{8}{v_m + 6} \right) = 0$$



$$\frac{Ab}{bc} = ?$$

$$EX = 2\sqrt{2} \cdot XY$$

$$b \quad 45 + \frac{45}{2}$$

$$45 + \frac{45}{2}$$

$$90 +$$

$$\frac{s}{v_m} + 2 = \frac{s}{v_b}$$

$$\frac{s + 2v_m}{v_m} = \frac{s}{v_b}$$

$$sv_b + 2v_m v_b = sv_m$$

$$\frac{s}{v_m + 6} + \frac{s}{4} = \frac{s}{v_b + 6}$$

$$\frac{8}{v_m} - \frac{s}{v_b} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5s}{v_b} - \frac{5s}{v_m} = 2 \cdot 10 \\ \frac{8s}{v_b + 6} - \frac{8s}{v_m + 6} = 10 \end{array} \right.$$

$$\frac{4s + 5v_m + 30}{4(v_m + 6)} = \frac{4s}{4v_b + 24}$$

$$16sv_b + 20v_m v_b + 100v_b =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S}{46-v_m} = \frac{S+2v_m}{v_m} \quad 46-v_m$$

$$Sv_m = 46S - Sv_m + 96v_m - 2v_m^2$$

$$Sv_m = 24S + 46v_m - v_m^2$$

$$\frac{4S}{54-v_m} = \frac{4S+5v_m+30}{v_m+6}$$

$$4Sv_m + 24S = 216S + 270v_m + 34 \cdot 30 - 4Sv_m + 5v_m^2 + 30v_m$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5s}{v_b} = \frac{5s}{v_m} + 10$$

$$t_b = t_m + 2$$

$$\frac{6s}{v_b + 6} = \frac{6s}{v_m + 6} + 10$$

$$v_b \cdot t_m + 96 = v_m \cdot t_b$$

$$t_b + \frac{6t_b}{v_b + 6} = t_m - \frac{6t_m}{v_m + 6} + a$$

$$\frac{5s}{v_b} - \frac{6s}{v_b + 6} = \frac{5s}{v_m} - \frac{6s}{v_m + 6}$$

$$\frac{5v_b + 30 - 6v_b}{v_b(v_b + 6)} = \frac{5v_m + 30 - 6v_m}{v_m(v_m + 6)} \quad \frac{s}{v_b + 6}$$

$$\frac{30 - 3v_b}{v_b(v_b + 6)} = \frac{10 - 3v_m}{v_m(v_m + 6)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{s}{a} &= \frac{s}{a} + 2 \\ \frac{s}{b+6} &= \frac{s}{a+6} + \frac{5}{4} \end{aligned} \right.$$

$$b \cdot \frac{s}{a} + 96 = a + \frac{s}{b}$$

$$\frac{bs}{a} + 96 = \frac{as}{b}$$

$$\frac{s}{b} - \frac{s}{b+6} = \frac{s}{a} - \frac{s}{a+6} + \frac{3}{45}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{bs + 96a}{a} &= \frac{as}{b} \\ \frac{s + 2a}{a} &= \frac{s}{b} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{62}{b(b+6)} = \frac{62}{a(a+6)} + \frac{18}{45}$$

$$2 \left(\frac{1}{b(b+6)} + \frac{1}{a(a+6)} \right) = \frac{1}{25}$$

$$\frac{a^2 + 6a + b^2 + 6b}{a(a+6)(b+6)b} = \frac{1}{25}$$

$$bs = \frac{a(a+6)b(b+6)}{a^2 + 6a + 6b + b^2}$$

$$\frac{s}{v_m} = \frac{s}{v_b} - 2$$

$$\frac{bs + 96a}{s + 2a} = a$$

$$s + 2v_m = s - 2v_b + 96$$

$$\frac{bs + 96a}{a} = 2s + 42a$$

$$\frac{bs}{a} + 96 = s + 2a$$

$$a \left(\frac{s}{a} + 2 \right) = s + 2a$$

$$\frac{as}{b} = s + 2a$$

$$s + 2a = s + 2a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 3^4 7^4$ $bc: 3^{12} 7^{16}$ $ac: 3^{21} 7^{38}$

$v_3(a) + v_3(c) \geq 21$ $v_3(a) + v_3(b) \geq 11$ $v_3(b) + v_3(c) \geq 18$

$2(v_3(a) + v_3(b) + v_3(c)) \geq 50 \Rightarrow v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 25$

$v_7(a) + v_7(b) \geq 11$ $v_7(b) + v_7(c) \geq 16$ $v_7(a) + v_7(c) \geq 38$ $50 + 15 = 65$

$2(v_7(a) + v_7(b) + v_7(c)) \geq 65 \Rightarrow v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq 33$ 33

$(a, b) = 1$ $\frac{a+b}{a^2 - bab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab}$ $\frac{3b + 16 + 11}{2}$

$(a+b; a^2 - bab + b^2) = \frac{(a+b)^2 - 10ab}{a+b} = \frac{a+b}{a} - 10 \frac{ab}{a+b}$ $\frac{21}{16b}$

$a = 3^{21} 7^{38}$ $\frac{a^2 - bab + b^2}{a^2 + ab} \cdot \frac{a+b}{a-b}$ $\frac{a+b}{a} - 10 \frac{ab}{a+b} = \frac{7+3}{49 - (6b+9)}$

$c = 3^{12} 7^{16}$ $\frac{-9ab + b^2}{-9ab - 9b^2} = \frac{10ab}{10b^2}$ $10ab \equiv -10b^2 \Rightarrow 10 \equiv 0$

$c = 7 = \frac{10}{110} = 10$ $\sqrt{3} - \sqrt{6} = -3$ $b \equiv 0$

$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$ 7^{38} $c = 7$ $a = a = 7$

$2x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}\sqrt{2x^2 + x + 3} + 2x^2 + x + 3 = 1 - 8x + 16x^2$

$4x^2 - 2x + 6 - 2\sqrt{\dots} = -8x + 16x^2$ $2x^2 - 3x + 4 = a$ $4x - 1 = 6$

$4x^2 + 6x + 6 - 2\sqrt{\dots} = 16x^2$ $\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}$ $9 - 16b + 49 = 110$ $a+b = 11$ 25

$a + 16\sqrt{a+b}^2 = a+b$ $2\sqrt{a} = 1-b$ $b = 16$

$b^2 + b(2\sqrt{a}-1) = 0$ $4a = b^2 - 2b + 1$ $a+c = 21$

$b = 0$ $b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$ $\boxed{c = 14}$ $\boxed{a = 7}$ $b = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{z}{2}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{xy}{3y+x} = \frac{z}{2}$$

$$z = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$2xy = (3y+x)(3x+2y)$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy = 2xy$$

$$9xy + 3x^2 + 6y^2 = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x+y)$$

$$y^2 - 2y \quad \wedge \quad \begin{cases} x_1 = -y \\ x_2 = -2y \end{cases}$$

1. $x = -y \Rightarrow z = -y$

$$(x+y)(x+2y)$$

$$\frac{S}{v_b + 6} = \frac{S}{v_b + 6} = \frac{S + av_m + 6a}{v_m + 6}$$

$$Sv_m + 6S = Sv_b + av_mv_b + 6av_b + 6S + 6av_m + 36a$$

A $2v_mv_b = av_mv_b + 6a(v_b + v_m) + 36a$

$$\frac{Sv_b + 96v_m}{v_m} = \frac{Sv_m}{v_b} \quad \xrightarrow{B}$$

$$\frac{S}{v_b} = \frac{S}{v_m} + 2 \quad \left[Sv_b^2 + 96v_mv_b = \frac{Sv_m^2}{S} \right] \quad \frac{75}{60} = \frac{65}{\frac{5}{4}}$$

$$v_b \cdot \frac{S}{v_m} + 96 = v_m \cdot \frac{S}{v_b}$$

$$\frac{S}{v_b} = \frac{S + 2v_m}{v_m}$$

$$\frac{S}{v_b + 6} = \frac{S}{v_m + 6} + \frac{5}{4} = a$$

$$Sv_m = Sv_b + 2v_mv_b$$

$$\frac{S}{v_b + 6} = \frac{S + \frac{5}{4}(v_m + 6)}{v_m + 6}$$

$$Sv_m + 6S = Sv_b + 6S + \frac{5}{4}(v_m + 6) \cdot v_b + \frac{5 \cdot 3}{2}(v_m + 6)$$

$$Sv_b + 2v_mv_b = Sv_b + \frac{5}{4}v_mv_b + \frac{15}{2}v_b + \frac{15}{2}v_m + 45$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 3228 \quad | \quad 64 \\ -320 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} -\sqrt{2} \quad | \quad 17 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3228 \quad | \quad 256 \\ -256 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$2x^2 - 3x + 4 = a \quad \cancel{4x-1} \quad \cancel{4x-1} = b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+b} = -b$$

$$b = 5$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{a} - b = \sqrt{a-b} \\ a - 2b\sqrt{a} + b^2 = a - b \\ b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{a} + b = \sqrt{a+b} \\ a + 2b\sqrt{a} + b^2 = a + b \end{array}$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = -5$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a}-1) = 0 \quad x = \frac{1}{4}$$

$$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$$

$$b - 1 + 2\sqrt{a} = 0$$

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{a} = 1 - b \\ 4a = b^2 - 2b + 1 \end{array}$$

$$b = 4 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 5$$

$$2\sqrt{a} = -4$$

$$4(2x^2 - 3x + 4) = (4x-1)^2 - 2(4x+1) + 1$$

$$2\sqrt{6} =$$

$$8x^2 - 12x + 16 = 16x^2 - 8x + 1 - 8x + 2 + 1$$

$$6$$

$$8x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{12}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2}} =$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$= \sqrt{6+9} =$$

$$p = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$$

$$\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 2$$

$$2 - 3 =$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}; x_1 = -1; x_2 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = 9$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{2} =$$