



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Решение: 1. и.а. abc - келим, но a, b, c не содержат множителей 2, 3 и 6.

\Rightarrow пусть a_2 - степень 2 в числе a ,
 b_2 - в числе b , c_2 - в числе c . \Rightarrow

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 7 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \end{cases} \quad \text{для наименьшей келим суммы} \\ \text{приведем: } \begin{cases} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) = 34$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 17$$

Это возможно при $c_2 = 10, b_2 = 3, a_2 = 4$. $\Rightarrow abc$ содержит 2^{17} -келим, возмозней степень двойки. Возмозжны алгоритмы для степеней 3 и 5:

$$2 \begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 16 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) = 43$$

$$a_3 + b_3 + c_3 = 21,5 - \text{невозможное}$$

и.а. $a, b, c \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \text{келим, } N \geq 21,5 = 22.$$

$$\Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 = 22 - \text{возмозжно}$$

$$\text{при } a_3 = 6, b_3 = 5, c_3 = 11.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

\Rightarrow Сильнейшие 1-ама, ~~вторые~~ ~~третьи~~ ~~четвертые~~ ~~пятые~~ ~~шестые~~

Знач b $abc = 22$.

$$3. \begin{cases} a_5 + b_5 = 14 \\ b_5 + c_5 = 18 \\ a_5 + c_5 = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 78 \\ a_5 + b_5 + c_5 = 37,5 - \text{Странно} \\ \text{нужны } 2, \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 = 38 - \end{cases}$$

Невозможно т.к. $a_5 + c_5 = 43 > 38. \Rightarrow$

$a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$. $a_5 + b_5 + c_5 = 43$ - возможно т.к.

$a_5 = 20, c_5 = 23 \Rightarrow 43$ - наим. Сильней b в abc .

$\Rightarrow abc = \begin{matrix} & 12 & 22 & 43 \\ 2 & 3 & 5 & \end{matrix}$ - наим. возможное abc .

Ответ: $\begin{matrix} & 17 & 22 & 43 \\ 2 & 3 & 5 & \end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

ЛМОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Решение:

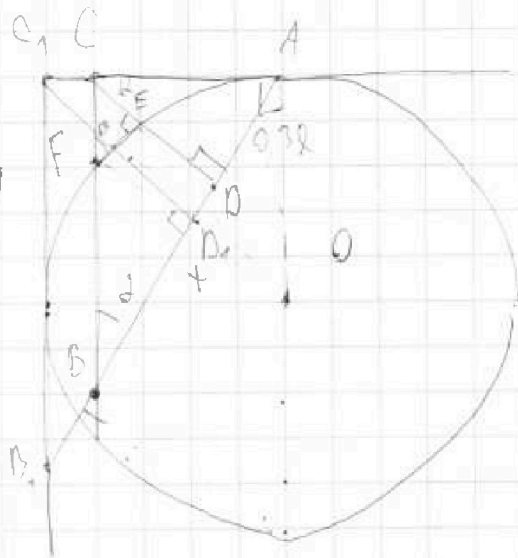
1. $\triangle BCD \sim \triangle CPA \sim \triangle FEC$

по 3-м углам $[90^\circ, d; 180^\circ - 90^\circ - d]$

2. $AD = CB \cdot \cos \alpha$

$AD = AC \cdot \sin \alpha$

$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CB} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$



3. $[AC], C_1 \in (CA), C_1B_1 \parallel BC, C_1B_1$ - диаметр

и т.д., $\Rightarrow C_1B_1$ - диаметр $\triangle B_1C_1A_1$, \Rightarrow диаметр

результат

и по теореме Фалеса: $B_1C_1 : CC_1 = B_1A_1 : C_1A$

в силу подобия $\triangle B_1C_1A_1 \sim \triangle BCA \Rightarrow B_1C_1 : BC = C_1B_1 : CA$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \cdot \sin \alpha \cos(\sin \beta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2$$

ОДЗ: $\alpha \in [0; \pi/2]$

$$\arccos(\sin \beta) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}$$

$$\arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | \cdot 5$$

$$\left[x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | \cdot 5 \right.$$

$$\left. \begin{aligned} 5x - \frac{5\pi}{2} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 + 10\pi k \\ 5x - \frac{6\pi}{2} &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + 10\pi k \end{aligned} \right\}$$

$$\left[\begin{aligned} 5x &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 10\pi k + \frac{5\pi}{2} \quad | : 5 \\ 5x &= \frac{2\sqrt{3}}{2} + 10\pi n \quad | : 5 \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} 4x &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 10\pi k \quad | : 4 \\ 6x &= \frac{2\sqrt{3}}{2} + 10\pi n \quad | : 6 \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} 4x &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 10\pi k \quad | : 4 \\ 6x &= \frac{2\sqrt{3}}{2} + 10\pi n \quad | : 6 \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2,5\pi k \quad | \cdot 11 \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{10\pi n}{6} \quad | \cdot 11 \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2,5\pi k \quad | \cdot 11 \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{10\pi n}{6} \quad | \cdot 11 \end{aligned} \right.$$

Из условия определяем \arccos : $\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2$
 $0 \leq \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} \leq \pi$

Анализ корней:

$$(1) \quad 0 \leq \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2}{\sqrt{3}} \leq \pi \quad | \cdot 5$$

$$0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 + 2,6\pi k \leq 6\pi \quad | \cdot 5$$

$$0 \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 + 2,6\pi k \leq 6\pi \quad | : 2,6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq 1 + k \leq 2 \quad | -1$$

$$-1 \leq k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k - 2,6k = -1,6k; \\ y = k \end{cases}$$

$$y = k$$

$$x = k + 2,6k = 3,6k$$

$$(21) \quad 0 \leq \frac{3k}{2} + k \leq 5k$$

$$0 \leq \frac{3k}{2} + \frac{k}{6} = \frac{10k}{6} \leq 6k \quad | :k$$

$$0 \leq 1,6 + \frac{1}{6} + \frac{10k}{6} \leq 6 \quad | \cdot 6$$

$$0 \leq 6 + 1 + 10k \leq 30$$

$$-7 \leq 10k \leq 23 \quad | :10$$

$$-0,7 \leq k \leq 2,3 \quad \Rightarrow \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{6} \\ y = \frac{k}{6} \end{cases}$$

$$x = \frac{k}{6} = \frac{10k}{6} = \frac{11k}{6}$$

$$x = \frac{k}{6} = \frac{20k}{6} = \frac{21k}{6} = \frac{7k}{2} = 3,5k$$

$$\Rightarrow \text{Answer: } \underline{-\frac{9k}{2}; \frac{k}{6}; k; \frac{11k}{6}; 3,6k}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N5 \quad \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 49)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

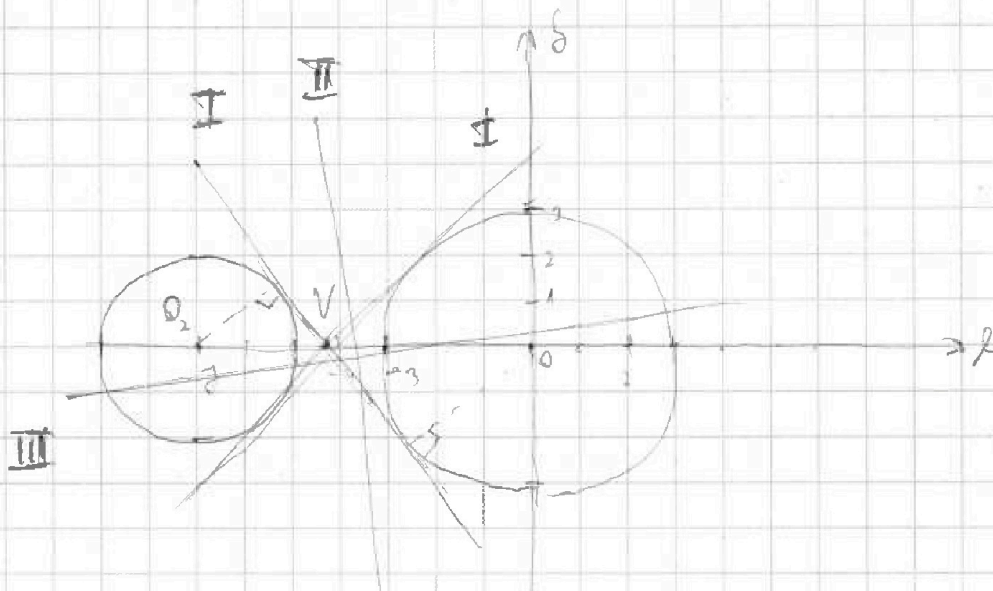
$$(1): \quad \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 49 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 7)^2 + y^2 = 2^2 & (II) - \text{уравнение окружности} \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (I) \end{cases}$$

$$(O_1: O(1; 0); r=2)$$

$$(O_2: O(0; 0); r=3)$$



2. $x + 3ay - 7b = 0$ - уравнение прямой. Пусть считаем
линии χ решения, следовательно, линии ~~каждой~~ прямой
пересекает каждую окружность дважды.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если $a = 0$. $x = 7b$ - вернемся к началу, т.е.)
или $a \neq 0$ или нечего в.

Для $a \neq 0$: Заменим начало тем: $30x = 7b - 2$

$$y = \frac{-2}{30} + \frac{7b}{30}$$

и.д. $b \in \mathbb{Z}$, Будем считать всевозможные значения

вдоль Ox и не забудем, вдоль Oy при условии

б. Значит, нужно с тем же условием рассмотреть

$k = \frac{-1}{30}$, что не забудем нечего в.

На рисунке I - касательное к острию окру-

жности. Минимальное же - в начале, которое можно

написать при $k = 2$. Для изменения условия

будет либо пересечение с окруж., либо начало, либо

в начале.

I - начало, ~~касательное~~ начало, начало

касательной - 2.

II - начало, касательное / касательное начало,

тем касательное начало. При этом число 4 нечетно.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Получим константы α : U_2 постоянна

$$Q_2 V_1 V_0 = V_2 : V_1 = 2 : 3.$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{3}{2} = \frac{21}{6}.$$

$$\Rightarrow V(\frac{21}{6}; 0).$$

Через g и b прямой: $g = kx + b$ - константы:

$$0 = \frac{21}{6}k + b$$

$$b = -\frac{21}{6}k.$$

$$\Rightarrow g = kx - \frac{21}{6}k, \text{ пусть нам известно } g = kx + \frac{21}{6}k = 0$$

т.к. $g = kx - \frac{21}{6}k$ - константы и заданы, то

ее постоянная g сов. с g и $g = 0$ равно ее

$$\text{прямая: } V_1 = \frac{-k \cdot 0 \pm 0 + \frac{21}{6}k}{\sqrt{\frac{21^2}{6^2} + k^2}} = \frac{21}{6}.$$

$$\frac{21}{6}k = 3 \cdot \sqrt{\frac{21^2}{6^2} + k^2} \sqrt{1 + k^2}$$

$$\frac{7}{6}k = \sqrt{1 + k^2} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{49}{26}k^2 = 1 + k^2$$

$$\frac{49 - 26}{26}k^2 = 1 \Rightarrow \frac{23}{26}k^2 = 1 : k^2 = \frac{26}{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{23}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



\Rightarrow В первом случае (II):

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} \leq k \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$0 \leq k < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} \leq \frac{-1}{3a} \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{или } -\frac{5}{2\sqrt{6}} < k \leq 0$$

$$\frac{15}{2\sqrt{6}} > \frac{1}{a} > \frac{-15}{2\sqrt{6}}$$

$$0 \leq \frac{-1}{3a} \leq \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad | \cdot -9$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{15} < a \leq \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} < \frac{-1}{3a} \leq 0 \quad | \cdot -3$$

$$\left[-\frac{15}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow -\frac{15}{2\sqrt{6}} < -\frac{15}{2\sqrt{6}} - \frac{2\sqrt{6}}{15} \right]$$

$$\left[0 \leq \frac{1}{a} < \frac{15}{2\sqrt{6}} \Rightarrow a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \right]$$

$$\Rightarrow 0 \in \left(-\infty; \frac{-\frac{15}{2\sqrt{6}}}{\frac{2\sqrt{6}}{15}} \right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{15}{2\sqrt{6}} \right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15} \right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15. Решение:

ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{30x^2} 343 - 4 & (1) \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y^2 \neq \frac{1}{36} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

(1): на ОДЗ:

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{4-3}{2} \log_{6x} 7 = -4$$

$$\log_7^4(6x) - 3,5 \log_{6x} 7 = -4 \quad | \cdot \log_{6x}^2(6x)$$

$$\log_7^5(6x) - 3,5 = -4 \log_7^2(6x)$$

$$\log_7^5(6x) + 4 \log_7^2(6x) = 3,5$$

(2): на ОДЗ:

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{12-5}{2} \log_y 7 = -4 \quad | \cdot \log_y^2 y$$

$$\log_7^5 y + 3,5 = -4 \log_7^2 y$$

$$\log_7^5 y + 4 \log_7^2 y = -3,5 \quad \text{Перенесем в левую часть}$$

$$\begin{cases} \log_7^5(6x) + 4 \log_7^2(6x) = 3,5 \\ \log_7^5 y + 4 \log_7^2 y = -3,5 \end{cases}$$

$$\log_7^5 y + \log_7^5(6x) + 4(\log_7^2(6x) + \log_7^2 y) \geq 0$$

$$\log_7^5(6x) + \log_7^5 y + 4(\log_7^2(6x) + \log_7^2 y) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$- \log_2 5 \cdot (\log_2^3 6x) + (\log_2^4 6x) + (\log_2^5 6xy) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2^4 6xy > 0, & (1) \\ \log_2^4 y - \log_2^3 5 \cdot \log_2^3 6x + \log_2^2 4 \cdot \log_2^2 6x - \log_2^4 5 \cdot (\log_2^3 6x) + \\ + \log_2^4 6x + 1 > 0, & (2) \end{cases}$$
$$(1): 6xy = 1$$

$$\boxed{xy = \frac{1}{6}}$$

$$(2) \quad \log_2^3 y (\log_2 y - \log_2 6x) + \log_2 4 \cdot \log_2^2 6x (\log_2 5 - \log_2 6x) +$$
$$+ \log_2^4 6x + 1 > 0$$
$$\log_2 = \frac{4}{6x} \cdot \log_2 y (\log_2^2 5 + \log_2^2 6x) + (\log_2^4 6x + 1) > 0 \quad | - 1 \quad \text{не } \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

16
Решение:

1. $OP \parallel PQ \parallel OQ$

2. $OP \parallel OQ$: xy и yz

четырехугольник : $xy + yz = 6$

$$\begin{cases} x = y + 6 \\ 6y - 12x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{x = 4}$$

3. $4y_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$4y_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$\Delta x + 6y = 40$, где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$

т.к. $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow \Delta x, \Delta y \in \mathbb{Z}$.

$4 \Delta x = 4 \Rightarrow \Delta x = 1$. \Rightarrow единственное решение

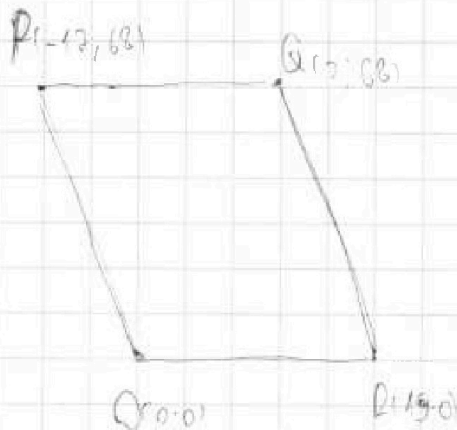
$\Delta x = 1$ $\Delta y = 4$

Δx | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

Δy | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79

10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19

20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

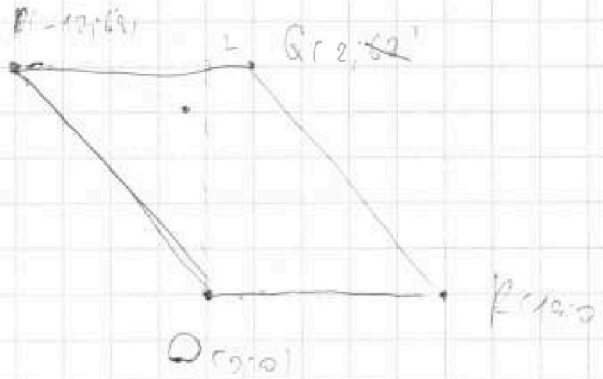
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание № 5:

$$O(0; 0) \quad P(2; 6) \quad Q(2; 8) \quad R(13; 0)$$



$4x_2 - 4x_1 + 6x_2 - 6x_1 = 40$
 $4(x_2 - x_1) + 6(x_2 - x_1) = 40$

$$4x_2 - 4x_1 + 6x_2 - 6x_1 = 40$$

$$4(x_2 - x_1) + 6(x_2 - x_1) = 40$$

$$\Delta x \leq 13 \Rightarrow 964 \in [4; 16]$$

$$65 \leq 63 \Rightarrow 56 \in [1; 63] \Rightarrow \Delta y = 4$$

$$\Delta x \in [0; 13] \Rightarrow \Delta y = [0.32; 28.24; 20; 16.11; 6; 4]$$

$$\Delta x: 66 \quad 1 \div 9-4 \quad 2 \div 8-3 \quad 3 \div 7-4$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ - 42 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$y = 12 + 6$$

$$\begin{cases} 63 = -12x + 6 \\ 0 = 0 + 6 \Rightarrow 6 = 0 \end{cases}$$

$$63 = -12x \Rightarrow x = -4$$

$$\Rightarrow y = -42 \Rightarrow \Delta x = 4 \Delta y$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение

$$2) \log_7^4 y + 6 \log_7^3 z = \log_7^2 (7^x) - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7^3 z = \frac{1}{2} (\log_7^2 z - 4)$$

$$\log_7^4 y + \frac{17+5}{2} \log_7^3 z - 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 7.5 \log_7^3 z - 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 3.5 \log_7^3 z - 4 = 0$$

$$\log_7^6 y + 3.5 - 4 \log_7^2 z = 0$$

$$\log_7^6 y + 3.5 - 4 \log_7^2 z = 0$$

$$(\log_7^6 y + \log_7^6 z) + 7 - 4(\log_7^2 yz + \log_7^2 z) = 0$$

$$(\log_7^6 y + \log_7^6 z) / \log_7^4 yz + (\log_7^6 z) / z - 4(\log_7^2 yz) = 0$$

$$(\log_7^3 yz) \cdot (\log_7^4 yz) + (\log_7^3 yz) \cdot \log_7^2 yz + (\log_7^3 z) \cdot \log_7^2 yz - 4 \log_7^2 yz = 0$$

$$(\log_7^3 yz + \log_7^3 z) + 7 - 4(\log_7^2 yz) = 0$$

$$\log_7^3 yz \cdot (\log_7^4 yz - \log_7^3 yz) + (\log_7^3 z) \cdot (\log_7^2 yz + \log_7^2 z) - 4 \log_7^2 yz = 0$$



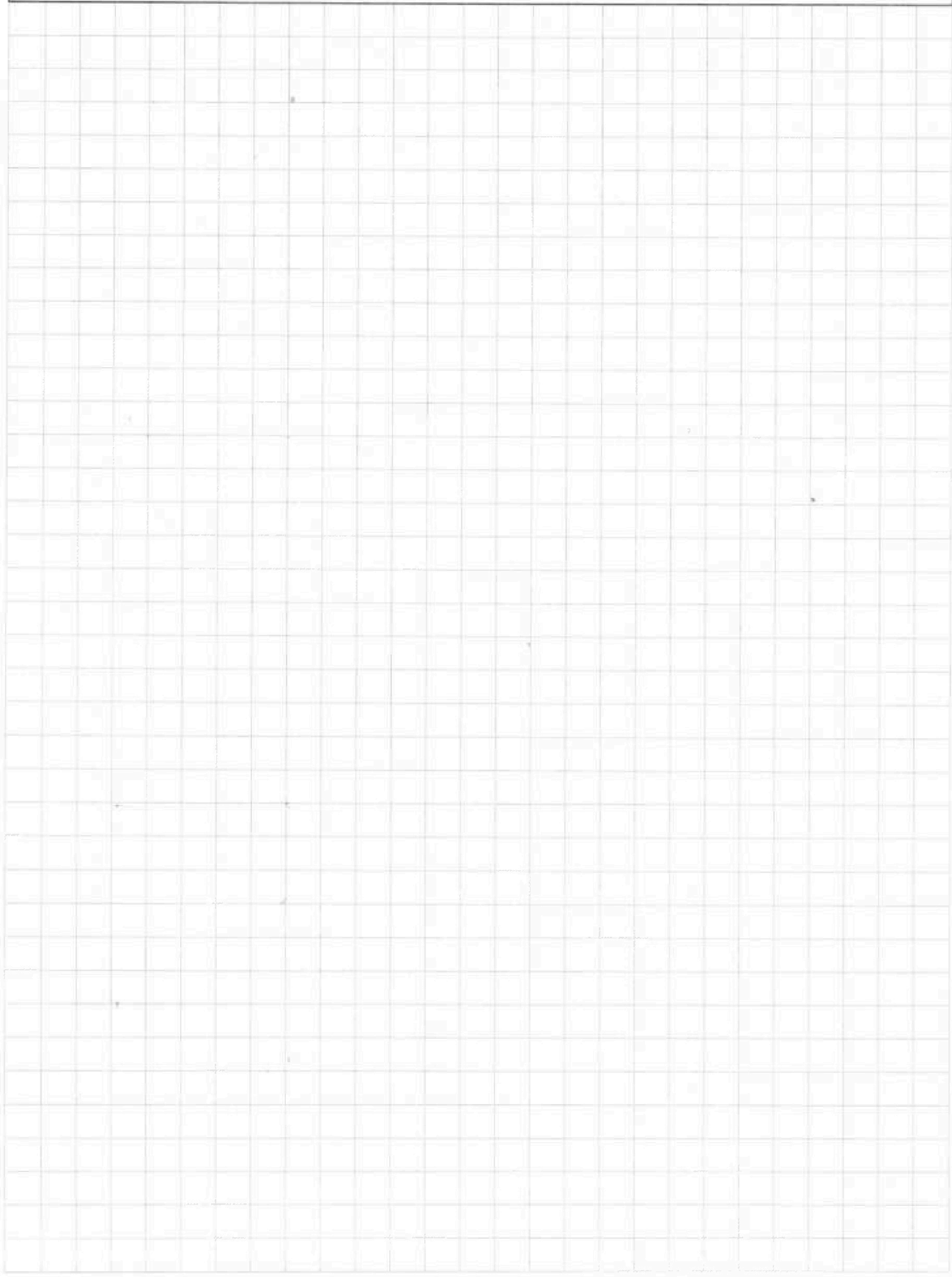
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_7^2 x = \log_7^2(3-4x) & (1) \\ \log_7^4 x + 6 \log_7^2 x = \log_7^2(7^x) - 4 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x > 0 \\ 6x < 0 \\ 6x \neq 1 \\ 6x^2 \neq 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x^2 \neq \frac{1}{6} \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(1): \log_7^4(6x) - 2 \frac{\log_7^2 x}{\log_7 6x} = 2 \log_7^2(3-4x) - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3 \log_7^2 x}{2 \log_7 7} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \log_7^2 x - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = -4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = -4 \cdot \log_7 6x$$

$$\log_7^5(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = -4 \log_7 6x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Крестик K^4

$$4x = 6y + 3z + d = 0$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 2b = 0 \\ (x^2 + 14y + y^2 + 4z) + (x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$b = 4x + 6 \quad c = 2 + 6y + 3z = 0$$

$A(0; 0; 0)$

$$\begin{cases} x + 3ay - 2b = 0 \\ x^2 + 14y + y^2 + 4z = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$



$$S = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$(1) \quad x^2 + 14y + y^2 + 4z = 0$$

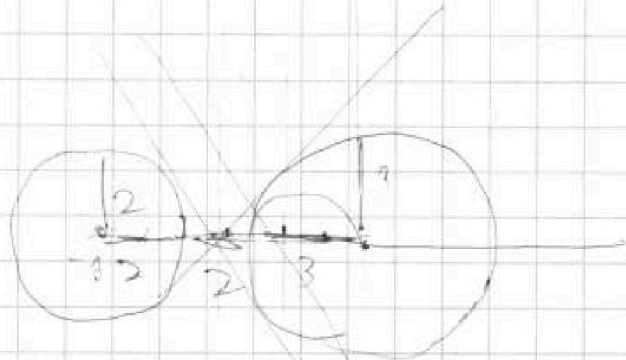
$$x^2 + 14y + 4y + y^2 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} (x + 7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$x + 3ay - 2b = 0$$

$$3ax = 2b - 4y$$

$$y = \frac{2b - 4y}{3a} = \frac{2}{3a}$$



$$S = \frac{|0 + 3a \cdot \frac{2}{3a} - 2b|}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 1$$

$$\frac{2b}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 3$$

$$S = \frac{|-2 + 3a \cdot \frac{2}{3a} - 2b|}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 2$$

$$\frac{2|b - 1|}{\sqrt{1 + 9a^2}} < 2$$

$$\begin{cases} 4a^2b^2 = 9 + 36a^2 & \text{--- } 2b \geq 2\sqrt{1 + 9a^2} \quad (1) \\ 4a^2b^2 = 48b + 48 - 4a^2 & \text{--- } 2b \leq 2\sqrt{1 + 9a^2} \quad (2) \end{cases}$$

$$4a^2b^2 = 48b + 48 - 4a^2 \quad \text{--- } 2b \leq 2\sqrt{1 + 9a^2} \quad (2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Справедливо

$$\cos \in \text{arccos} \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\text{arccos} \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) \in [-1; 1]$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

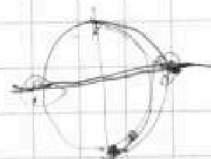
$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \in [-1; 1] \quad \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$



$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$



$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$

$$\cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \cos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Уравнения: $a_b: 2^7 3^{11} 5^{14}$ $b_c: 2^{13} 3^{15} 5^{13}$ $a_c: 2^{13} 3^{15} 5^{13}$

$a_b: 2^7$
 $b_c: 3^{11}$
 $a_c: 2^{13}$

$$\begin{cases} a + b \geq 12 \\ b + c = 13 \\ c + a = 13 \end{cases}$$

$24 + 26 + 2c = 32 \quad | :2$
 $14 + 13c = 16$
 $16 - 2 + 11c = 14$
 $14c = 2$
 $c = 0.25$

или $a+b+c = 17$

$c + a \geq 12$

$c \geq 10, \quad c = 10$

$b = 3, \quad a = 3$

$10 + 3 + 3 = 16 = \text{ответ}$

$a+b+c = 16,6 \Rightarrow c = 13$

$b+c = 16,6$

$c \geq 9,6$

$a+b = 13 = 16,6$

$b = 10,6$

$11 + c = 22$

$\frac{32}{11} = \frac{43}{43}$

$b \geq 2$

$a+b = 13$

$9,6 \geq c$

$9,6 + 6 = 15,6$

$b \geq 9,6$

$1 \Rightarrow c \geq 8,11$

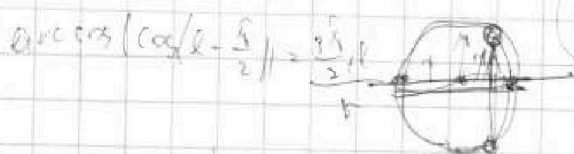
$a_1 = 6$

$b_1 = 6$



$\cos \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\cos \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$



$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\cos \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + R = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + R = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\cos \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + R = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + R = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + R = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + R = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + R = \frac{3\sqrt{3}}{2} + R$