



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



⊕ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

⊕ 3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

⊕

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

⊕ 5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть  $a_2; a_3; a_5$  — числа двоих, трех и пятёрок в разложении на множители числа  $a$ ; аналогично введем

$b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad ab : 2^9 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 9 \\ \quad bc : 2^{14} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 14 \\ \quad ac : 2^{19} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 19 \end{array} \right\} +$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \quad ab : 3^{10} \Rightarrow a_3 + b_3 \geq 10 \\ \quad bc : 3^{13} \Rightarrow b_3 + c_3 \geq 13 \\ \quad ac : 3^{18} \Rightarrow a_3 + c_3 \geq 18 \end{array} \right\} +$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) \quad ab : 5^{10} \Rightarrow a_5 + b_5 \geq 10 \\ \quad bc : 5^{13} \Rightarrow b_5 + c_5 \geq 13 \\ \quad ac : 5^{20} \Rightarrow a_5 + c_5 \geq 20 \end{array} \right\} +$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Итак, две числа  $abc$  имеем

$$abc \geq 2^4 \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\text{Но } ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Пример на } abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Пусть } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$ab = (2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}) : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = (2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15}) : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = (2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{30}) : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall t \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin t \leq \frac{5\pi}{2}$$
$$\forall t \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\underline{-3\pi \leq x \leq 2\pi}$$

1) Если  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \underline{I}$  или  $\underline{IV}$  четверти, то найдется число  $k \in \mathbb{Z}$ , что

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}$$

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \leq 2\pi$$

$$-9 \leq 1 + 5k \leq 6$$

$$-10 \leq 5k \leq 5$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

• Если  $k = -2$   $x = \frac{\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}$

$$x = -3\pi$$

• Если  $k = -1$   $x = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2} \in$  области определения арксинуса. Проверка:  $5 \arcsin \cos \frac{7\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$

верно

• Если  $k = -1$   $x = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \in \text{IV сегм.}$$

Проверка:  $5 \arcsin \cos -\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1} = -\frac{5\pi}{6}$$

верно

• Если  $k = 0$   $x = \frac{\pi}{3}$  (В целях экономии времени не проверяю, видно что  $\frac{\pi}{2} - x \in \text{I или IV сегм.}$ )

$$5 \arcsin \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

верно

• Если  $k = 1$   $x = 2\pi$

$$5 \arcsin (\cos 2\pi) = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin (1) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

верно

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

2) если  $(\frac{\pi}{2} - x) \in \pi$  или  $\pi$  кет верги, то  
найдётся число  $n \in \mathbb{Z}$  но

$$5 \cdot \left( - \left( \pi + \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right) \right)^{+2\pi n} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \left( - \left( \frac{3\pi}{2} - x \right) \right)^{+2\pi n} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{15\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi + 2\pi n$$

$$x = 2\pi + \frac{\pi n}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-4 \leq 4 + n \leq 5$$

$$-8 \leq n \leq 1$$

•  $n = -9$       $x = 2\pi - \frac{9\pi}{2}$

$$x = -\frac{5\pi}{2}$$

$$5 \cos \left( \cos \left( -\frac{5\pi}{2} \right) \right) = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cos \pi = -2\pi$$

$$0 = -2\pi$$

неверно

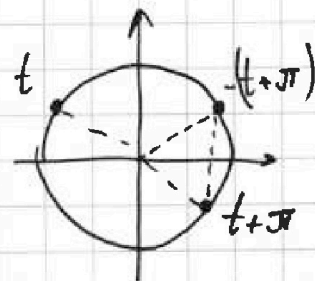
•  $n = 8$       $x = 2\pi - 4\pi$

$$x = -2\pi$$

$$5 \cos \cos (-2\pi) = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cos 1 = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{— неверно}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

•  $n = -7$      $\alpha = 2\pi - \frac{7\pi}{2}$ ;     $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$

$$5 \arcsin \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot 0 = -\pi$$

неверно

•  $n = -6$      $\alpha = 2\pi - 3\pi$ ;     $\alpha = -\pi$

$$5 \arcsin \cos(-\pi) = -\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

неверно

•  $n = -5$      $\alpha = 2\pi - \frac{5\pi}{2}$ ;     $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin 0 = 0$$

$$0 = 0$$

верно

•  $n = -4$      $\alpha = 2\pi - 2\pi$ ;     $\alpha = 0$

$$5 \arcsin \cos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

неверно

•  $n = -3$      $\alpha = 2\pi - \frac{3\pi}{2}$ ;     $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$0 = \pi$$

неверно

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

•  $n = -2$      $\varphi = 2\pi - \pi$ ;     $\varphi = \pi$

$5 \arccos \cos \pi = \pi + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

неверно

•  $n = -1$      $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{2}$ ;     $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

$5 \arccos \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$0 = 2\pi$

неверно

•  $n = 0$      $\varphi = 2\pi$

$5 \arccos \cos 2\pi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

верно

•  $n = 1$      $\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ ;     $\varphi = \frac{5\pi}{2}$

$5 \arccos \cos \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$0 = 3\pi$

неверно

~~Ответ:  $\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$~~

Ответ:  $\left\{ -3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4

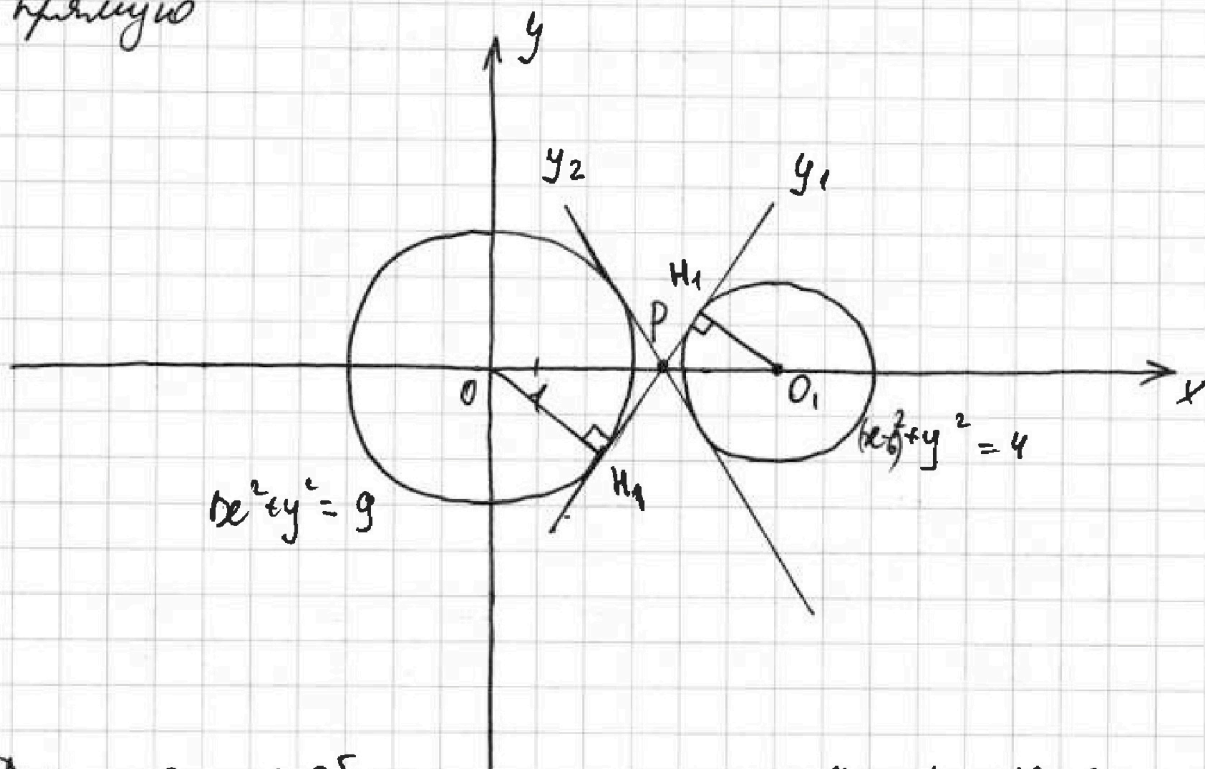
$$\begin{cases} ax + by - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

В плоскости  $Oxy$  уравнения 2 и 3 задают окружности; 1 - касательную прямую



Для того чтобы система имела 4 решения  
прямая должна пересекать обе окружности.  
Заметим, что всякая прямая коэффициента

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

на прямой  $l$  и прямой  $l_1$  и  $l_2$  или  
параллельности прямой  $l$  и  $l_2$  или  
большую  $k_1$  имеет не более две точки  
пересечения с окружностью.

Для остальных же прямых можно  
выбрать  $k_1$  свободной или, что  
будет и тогда.

Найдём  $k_1$  и  $k_2$ . Проведём радиус  
 $OH \perp l_1$ ;  $OH_1 \perp l_1$ ; пусть  $l_1 \cap O\omega = P$

$$\triangle OPH \sim \triangle O_1PH_1 \Rightarrow \frac{OP}{O_1P} = \frac{OH}{O_1H_1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Но } OO_1 = 6 \Rightarrow OP = \frac{3}{5} \cdot 6; \quad O_1P = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

$$H_1P = \sqrt{O_1P^2 - O_1H_1^2} = \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 2^2} =$$
$$= \frac{1}{5} \sqrt{12^2 - 10^2} = \frac{1}{5} \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{11}}{5}$$

$$k_1 = \frac{O_1H_1}{H_1P} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{11}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

аналогично  $k_2 = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

Получим условия знаков  $k_1$  и  $k_2$  прямые,  
такие что

$$-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$-\frac{10\sqrt{11}}{11} < -a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right) \quad \text{Ответ: } \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

### Задача 5

$$\bullet \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$$

$$\text{ODЗ: } x > 0; x \neq 1$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3^5 x^2} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\frac{2}{5} \log_3 x} - 8$$

$$\log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8 \quad | \cdot 2t \neq 0$$

$$\text{Итого } 2t^5 + 12 = 5 - 16t$$

$$2t^5 + 16t = -7$$

$$\bullet \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}^2(3^4) - 8$$

$$\text{ODЗ: } y > 0; y \neq \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{1}{\frac{2}{11} \log_3(5y)} - 8$$

$$\log_3(5y) = z$$

$$z^4 + \frac{2}{z} = \frac{11}{2z} - 8 \quad | \cdot 2z \neq 0$$

$$2z^5 + 16z = 11$$

$$\bullet \text{Итого } 2t^5 + 16t + 2z^5 + 16z = 0$$

$$t^5 + z^5 + 8(t+z) = 0$$

$$(t+z) P\left(\frac{t+z}{2}\right) + 8(t+z) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

где  $p(t, z)$  - некоторый многочлен  
4-й степени  $> 0$  где  $\forall t, z$

Можно +.к.  $p(t, z) + 8 > 0$  и

$t + z = 0$  - единств. решение

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поиск QR-кода недоступен!

Задача 1

$$ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}; \quad bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13},$$
$$ac = p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}, \quad \text{где } k, m, p \in \mathbb{N}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}{p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}$$

$$b^2 = \frac{km}{p} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{-7}$$

~~$$b = \frac{\sqrt{km}}{\sqrt{p}} \cdot 2^2 \cdot 3^{2.5} \cdot 5^{-3.5}$$~~

$$\frac{bc \cdot ac}{ab} = \frac{m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}}$$

$$c^2 = \frac{mp}{k} \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}$$

$$a^2 = \frac{kp}{m} \cdot 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{kp}{m} \cdot 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{27} \cdot \frac{km}{p} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{-7} \cdot \frac{mp}{k} \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$a^2 b^2 c^2 = mpk \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow (mpk)_{\text{делим}} = 3 \cdot 5 \quad \text{и тогда}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, так же, что степени  
каждого множителя не могут быть  
меньше чем в  $ab$ ,  $bc$ ,  $ac$

Пусть  $(abc)_{\max} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

Приведем пример:

пусть  $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$

$b = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{15}$

Пусть  $abc = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$ab = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^{15}$

Также заметим, что



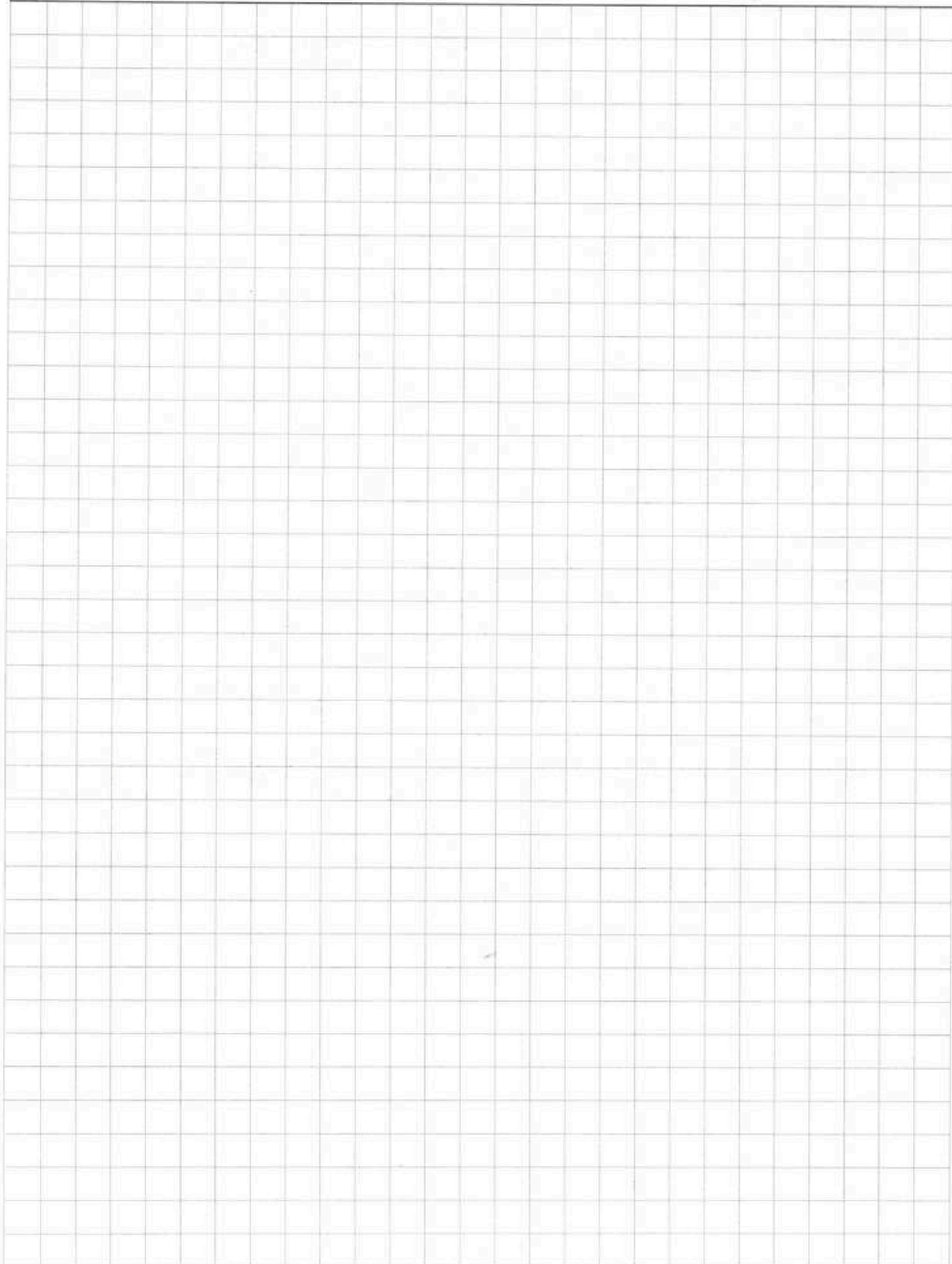
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$(y_2 - y_1) = 3$$

$$y_2 - y_1 = 3$$

$$x_2 - x_1 = 10$$

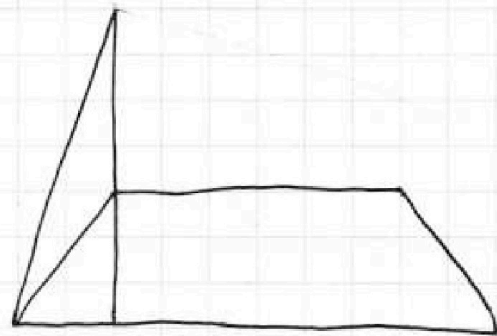
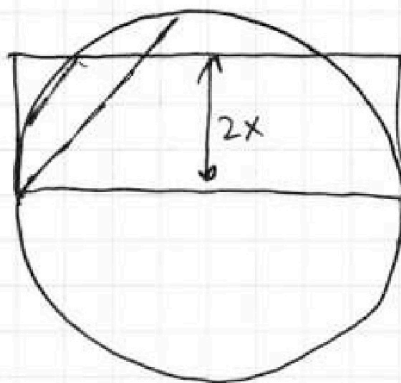
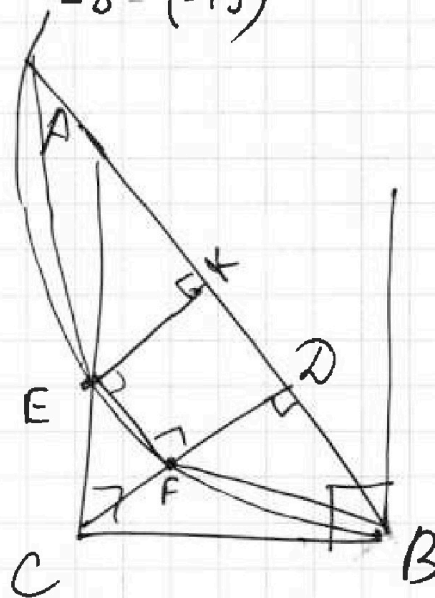
$$y_2 - y_1 = 6$$

$$x_2 - x_1 = 9$$

$$y_2 - y_1 = 9$$

$$x_2 - x_1 =$$

$$\begin{matrix} -19 & -8 \\ -8 - (-19) \end{matrix}$$





На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

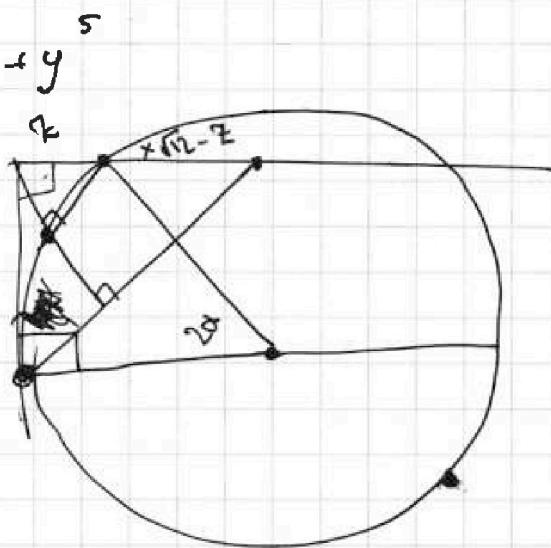
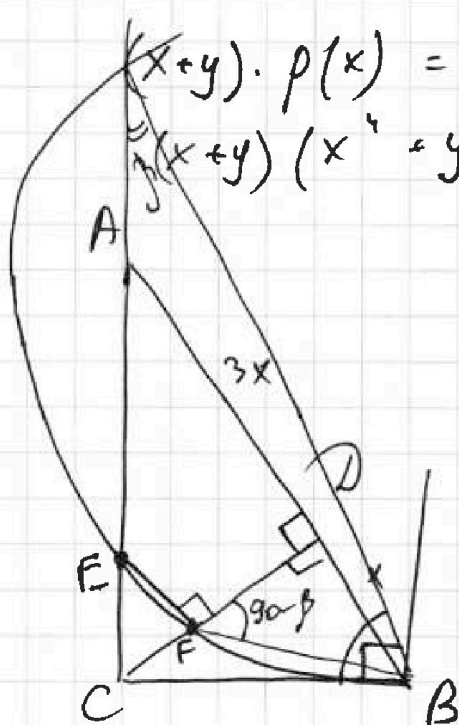


Черт.

$$x^5 + y^5 + 8(xy) = 0$$

или

$$x^5 + y^5 = 0$$



$$CD = x\sqrt{3}$$

$$BE = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$$

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = x\sqrt{12}$$

$$21 \begin{cases} \nearrow 10 = 10 + 0 \\ \rightarrow 13 = 0 + 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} = 9 + 1 & = 8 + 2 \\ = 1 + 12 & = 2 + 10 \end{matrix}$$

$$\searrow 18 = 10 + 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2^{19} 3^{18} 5^{30} = abc$$

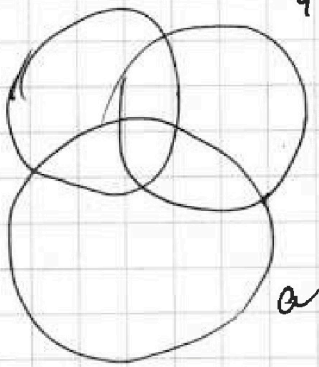
$$2(a_1 + b_1 + c_1) = 9 + 14 + 19$$

$$a = \frac{10}{4}, b = \frac{13}{4}, c = \frac{18}{4}$$

$$b = a^6 b^5$$

$$a = \frac{28}{4}, b = \frac{14}{2}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{k}$$



	a	b	c
2	9		10
3			
5			

$$k = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{g+5}$$

$$25 - 19 = 6$$

$$10 + 13 - 18 = 5$$

$$10 + 13 - 30 = -7$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}{2^{19} 3^{18} 5^{30}} =$$

$$\frac{5k}{3} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 + 10k = -3$$

$$b^2 = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{4 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}} = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{36}$$

$$b^2 = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{36}$$

$$b = (2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{18})$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

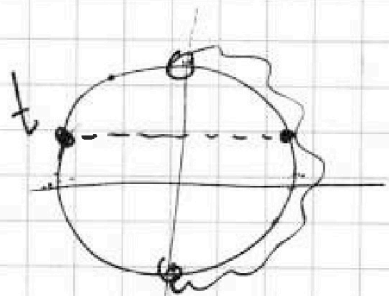
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \arcsin t \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$k \in \mathbb{Z}$ , если  $\frac{\pi}{2} - x \in \text{I или IV четверти, то}$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$10\pi k + 2\pi = 6x$$

$$x = \frac{5\pi k}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$-3\pi \leq$$

$\frac{\pi}{2}$

если  $\frac{\pi}{2} - x \in \text{II или III четверти, то}$

$k \in \mathbb{Z}$ , то  $\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

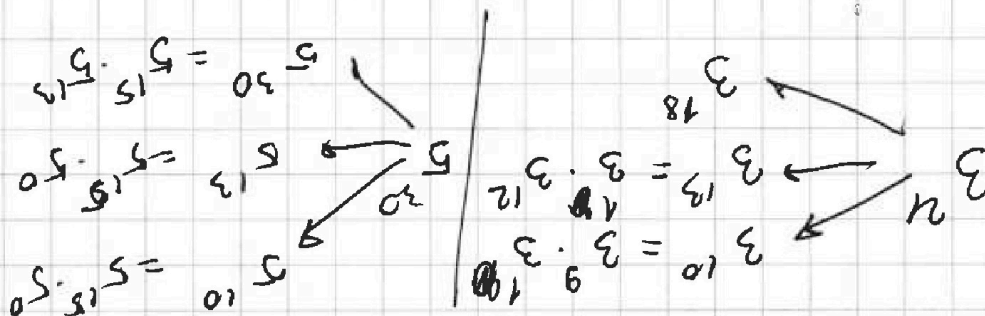
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода непустыми!



$$8(z^2 + 1) + 2(z^5 + z^5) = 16(z^2 + 1) + 2(z^5 + z^5) = 0$$

$$2z^5 + 16z = -2z^5 - 16z$$

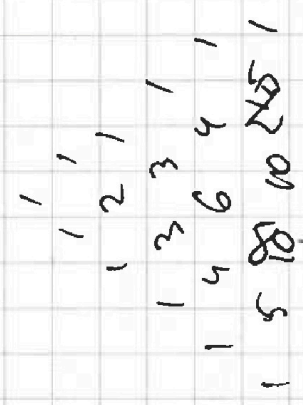
$$z + 1 = \log_3 5xy$$

Варианты a, B, C

$$2z^5 + 16z = z^2$$

$$2z^5 + 4 = 11 - 16z$$

$$z^2 = \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{11}$$



$$z^5 + z^5 = z^5(z^2)$$

$$z = \log_3 \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \right) = \log_3 \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \right)$$

$$\log_3 \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \right) = \frac{2 \log_3 xy}{11} = \frac{2 \log_3 xy}{11} - 8$$

$$\log_3 \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \right) = \frac{2 \log_3 xy}{11} = \frac{2 \log_3 xy}{11} - 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

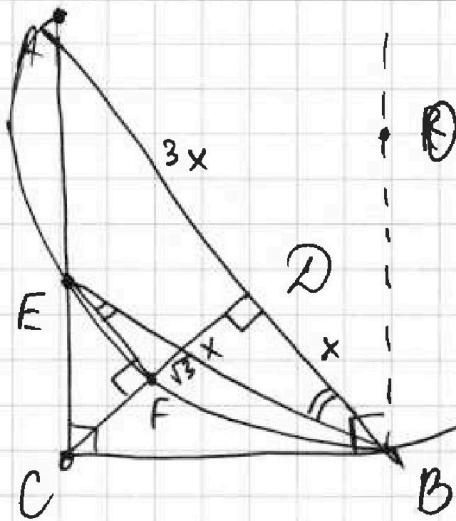
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 a &= 2^7 \cdot 3^9 \cdot 5^0 \\
 b &= 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\
 c &= 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{15}
 \end{aligned}$$

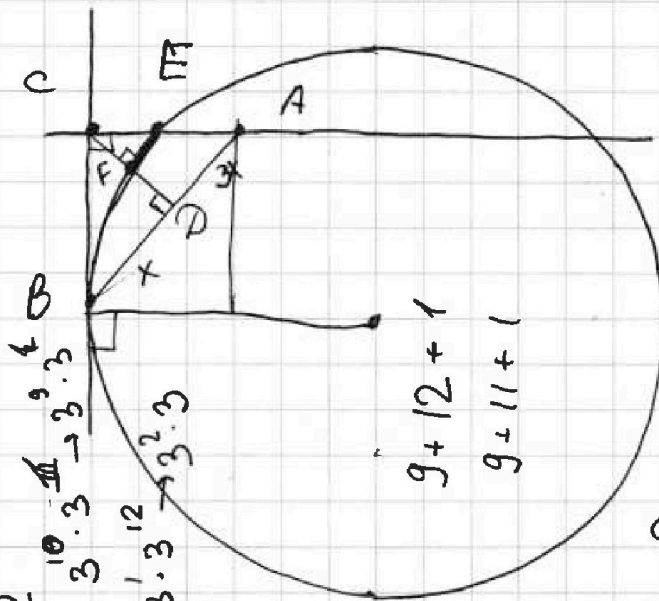


$$\begin{aligned}
 3^2 &\rightarrow 3^{10} = 3^8 \cdot 3^2 \\
 &\rightarrow 3^{13} = 3^8 \cdot 3^5 \\
 &\rightarrow 3^{18} = 3^8 \cdot 3^{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &:: 2^7 \cdot 3^9 \cdot 5^0 \\
 a^2 &:: 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^0 \\
 b &:: 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\
 bc &:: 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{15} \\
 \frac{bc \cdot ac}{ab} &= \frac{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{15} \cdot 2^{14} \cdot 3^{18}}{2^2 \cdot 3^0} = 2^{26} \cdot 3^{30} \cdot 5^{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b^2 &:: 2^4 \cdot 3^0 \\
 h &:: 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^9 &= 2^8 \cdot 2^1 = 2^7 \cdot 2^2 \\
 2^{14} &= 2^1 \cdot 2^{13} = 2^2 \cdot 2^{12}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 9+12+1 \\
 9+11+1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{ab \cdot bc}{ac} &= \frac{2^4 \cdot 3^0 \cdot 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{15}}{2^{26} \cdot 3^{30} \cdot 5^{15}} = \frac{2^{16} \cdot 3^{12}}{2^{26} \cdot 3^{30}} = \frac{3^{12}}{2^{10} \cdot 3^{18}} = \frac{1}{2^{10} \cdot 3^6} \\
 ac &= 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \\
 bc &= 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\
 ab &= 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\log_a b} &= \log_b a \\
 \log_a b \cdot \log_b a &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$