МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

а) Т.к. мы хотим сделать abc минимальным, то кроме 2 и 7 в разложениях a, b, c на прост. мн. никаких других множителей брать не будем.

Пусть $a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$; $b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$; $c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$

$ab \vdots 2^{14}7^{10} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 14 \\ \beta_1+\beta_2 \geq 10 \end{cases}$ & $bc \vdots 2^{17}7^{17} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2+\alpha_3 \geq 17 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 17 \end{cases}$.

$ac \vdots 2^{20}7^{37} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_3 \geq 20 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 37 \end{cases}$.

$\boxed{abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \longrightarrow min \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 \longrightarrow min. \end{array}$

(чтобы минимизировать abc).

$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 14 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 20 \end{cases} + \Rightarrow 2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 \geq 51$, а т.к. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$, то $\boxed{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 26}$. (оценка).

Возьмём $\alpha_1 = 8$; $\alpha_2 = 6$; $\alpha_3 = 12$ $\begin{cases} 14 \geq 14 \\ 18 \geq 17 \\ 20 \geq 20 \end{cases}$. Удовлетворяет (пример)

$\beta_1+\beta_3 \geq 37 \Rightarrow \boxed{\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 37}$. (оценка)

Пусть $\beta_1 = 14$; $\beta_2 = 0$; $\beta_3 = 23$.

$\beta_1+\beta_2 = 14 \geq 10$; $\beta_2+\beta_3 = 23 \geq 17$; $\beta_1+\beta_3 = 37 \geq 37$.

Удовлетворяет (пример).

$\Rightarrow abc_{min} = 2^{26}\cdot 7^{37} = \underset{a}{(2^8\cdot 7^{14})}\cdot\underset{b}{(2^6\cdot 7^0)}\cdot\underset{c}{(2^{12}\cdot 7^{23})}$

Ответ: $abc_{min} = 2^{26}\cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab};$$

$\boxed{(a,b) \text{ означает } НОД(a,b)}$.

Т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима, то $(a,b)=1$, но тогда и $(a+b;b)=1$, $(a+b;a)=1$. (~~согласно~~ по алгоритму Евклида).

Но тогда и $(a+b;ab)=1$, т.к. $a+b$ не имеет общих прост. множит. ни с b, ни с a.

~~Пусть~~

Если мы можем сократить $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ на m, то и числ., и знамен. $\vdots m$.

Пусть $a+b=mk$.

$\frac{mk}{m^2k^2-8ab}$ $(mk) \vdots m$, $(m^2k^2-8ab) \vdots m$. (если можем сократить)

$\Rightarrow 8ab \vdots m$, т.к. $m^2k^2 \vdots m$.

$8ab \vdots m$, $(a+b) \vdots m$, но $(ab; a+b)=1 \Rightarrow 8 \vdots m$.

$m=1,2,4$ или $8 \Rightarrow m_{max}=8$ (оценка).

~~Пусть $a=4$; $b=4$. $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{16-96+16} = \frac{8}{8(2-12+2)} = \frac{8}{8\cdot(-8)}$ ← можно сократить.~~

Пусть $a=1$; $b=7$. $(1;7)=1$ - подходит.

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{1+7}{(1+7)^2-8\cdot1\cdot7} = \frac{8}{8^2-8\cdot7} = \frac{8}{8(8-7)} = \frac{8}{8}$$ ← можно сократить на 8 (пример).

Ответ: при $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

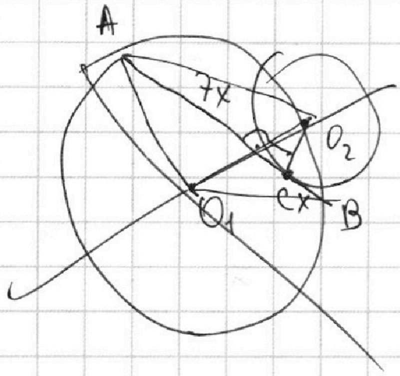
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

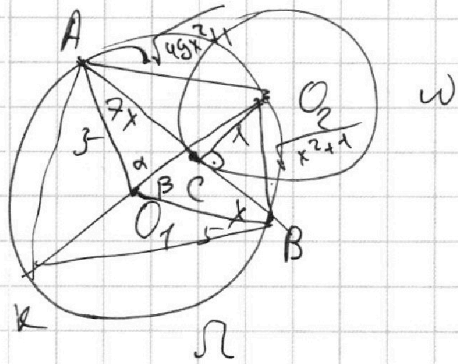
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

Найти: AB





Решение:

1) Д.п.: отрезки O_1A, O_1B, O_2C, AO_2, O_2B.

2) O_2C – радиус к точке касания $\Rightarrow$ $O_2C \perp AB$.

3) по th Пифагора: ~~O_2~~ $\underline{\Delta AO_2C}$: $O_2A = \sqrt{49x^2+1}$

$\underline{\Delta BO_2C}$: $O_2B = \sqrt{x^2+1}$.

4) Пусть $\angle O_2O_1A = \alpha$.
$\angle O_2O_1B = \beta$.

5) ~~По th sin для~~ Δ. Д.п.: $O_2O_1 \cap \Omega = K$.

По обобщ. th sin для ΔAKO_2: $\frac{AO_2}{\sin\angle AKO_2} = 2R = \cancel{8}.10$.

$\sin\angle AKO_2 = \frac{AO_2}{10} = \sqrt{\frac{49x^2+1}{100}}$

Аналогично для ΔO_2KB: $\sin\angle O_2KB = \frac{O_2B}{10} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{100}}$

6)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

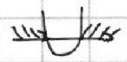
$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases}$

$2x^2-5x+3 \geq 0$.

$D = 25-24 = 1$

$x_1 = 2;\ x_2 = 1{,}5$.



$x \in (-\infty; 1{,}5] \cup [2; +\infty)$

$2x^2+2x+1 \geq 0$

$D = 4-8 = -4 \Rightarrow x \in R$.

$\begin{cases} x \in (-\infty; 1{,}5] \cup [2; +\infty) \\ x \in R \end{cases}$

ОДЗ: $x \in (-\infty; 1{,}5] \cup [2; +\infty)$

Пусть $\sqrt{2x^2-5x+3} = a \geq 0$

$\sqrt{2x^2+2x+1} = b \geq 0$ $\Rightarrow$ левая ~~пра~~ часть ур-ния: $a-b$.

Тогда $a^2 = 2x^2-5x+3$

$b^2 = 2x^2+2x+1$.

$a^2-b^2 = \cancel{2x^2}-5x+3-\cancel{2x^2}-2x-1 =$

$= 2-7x$.

$\Rightarrow a-b = a^2-b^2$

$a-b = (a-b)(a+b)$.

$(a-b)-(a-b)(a+b) = 0$.

$(a-b)(1-a-b) = 0$.

$(a-b)(a+b-1) = 0$.

$\left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} \\ \sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = 1. \end{array}\right.$

1) $\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$

на ОДЗ: $\cancel{2x^2}-5x+3 = \cancel{2x^2}+2x+1$.

$2-7x=0$

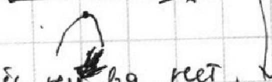
$7x = 2$; $\boxed{x = \frac{2}{7}} \in$ ОДЗ, т.к. $\frac{2}{7} < 1{,}5$.

2) $\underbrace{\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3}}_{\geq 0} = \underset{\geq 0}{1}$. $\mid\ b^2$

$2x^2+2x+1 + 2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)} + 2x^2-5x+3 = 1$.

$2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)} = 1-4x^2+3x-3-1$.

$2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)} = -4x^2+3x-3$



$\begin{cases} -4x^2+3x-3 \geq 0;\ D = 9-48 = -39 < 0 \Rightarrow \text{Корней нет} \\ 4(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3) = (-4x^2+3x-3)^2 \end{cases}$

Решений нер-ва нет. $x \in \varnothing$. $\Rightarrow$ корней у $a+b=1$ нет.

Ответ

Ответ: $\boxed{x = \frac{2}{7}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

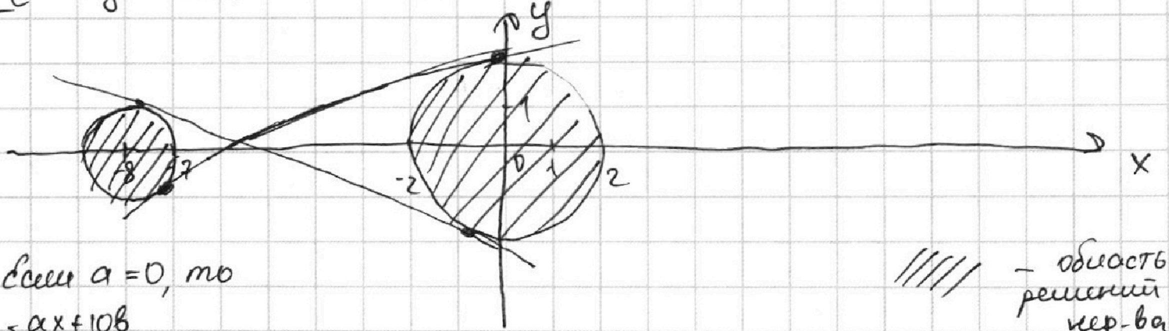
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} ax-y+10b=0. \Rightarrow y=ax+10b. \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0. \end{cases}$$

$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4\le 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+y^2-4\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+y^2-4\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2\le 1 \leftarrow \text{внутри окр.} \\ x^2+y^2\ge 4 \leftarrow \text{за окружн} \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2\ge 1 \leftarrow \text{за окр.} \\ x^2+y^2\le 4. \leftarrow \text{внутри окр.} \end{cases} \end{array}\right.$$



//// – область решений нер-ва.

Если $a=0$, то
$y=ax+10b$
$y=10b$ – горизонт. прямая,
~~имеет с о~~ имеет с ~~окр.~~ кругом или 0, или 1, или бескон. много общих точек (в случае касания)
Если нам нужно 2 решения, то она должна касаться обеих окр., что невозможно

Если $a\ne 0$, то $y=ax+10b$ – наклонная прямая. Аналогично имеет ~~2~~ 0, или 1 (в случае касания) или ~~2 общ~~ бескон. много общ. точек с кругом.
Нужно 2 общие точки $\Rightarrow 2=1+1$ – должна касаться обеих окр.

Если прямая касается окр. то подставив $y=ax+10b$ в ур-ние окр., должны получить один корень (т.е. $D=0$)

~~$\{ y=a$~~

$\Rightarrow$ Нам нужно найти такие a, что найдётся к нему такое b, что оба дискриминанта будут равны 0.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

I $\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$(x+8)^2 + (ax+10b)^2 = 1.$

$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1.$

$(a^2+1)x^2 + x(20ab+16) + 100b^2 + 63 = 0$

$D = 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 4(a^2+1)(100b^2+63) = 0 \;|:4$

$100a^2b^2 + 160ab + 64 - (a^2+1)(100b^2+63) = 0.$

$\cancel{100a^2b^2} + 160ab + 64 - \cancel{100a^2b^2} - 63a^2 - 100b^2 - 63 = 0$

$-100b^2 + 160ab - 63a^2 + 1 = 0.$

$D = (160a)^2 - 4\cdot(-100)\cdot(-63a^2+1) \geq 0$ ~~(необходимо)~~

чтобы существовали корни b

$25600a^2 - 4\cdot(-100)\cdot(-63a^2+1) \geq 0 \quad |:16$

$1600a^2 - 25\cdot(63a^2+1) \geq 0$

$1600a^2 - 1575a^2 - 25 \geq 0$

$25a^2 \geq 25$

$a^2 \geq 1$

~~$a \in [-1;1]$, но $a \neq 0$~~

~~$\Rightarrow a \in [-1;0) \cup (0;1]$~~

$a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

II $\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

$x^2 + (ax+10b)^2 = 4.$

$(a^2+1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$

$D = 400a^2b^2 - 4(100b^2-4)(a^2+1) = 0 \;|:16$

~~$50a^2b^2 - (25b^2-1)(a^2+1) = 0$~~

$25a^2b^2 - (25b^2-1)(a^2+1) = 0.$

$-25b^2 + a^2 - 1 = 0.$

$25b^2 = a^2 - 1.$

$b^2 = \frac{a^2-1}{25}.$

$\Rightarrow$ Найдется b, удовлетворяющее условию, только если

$a^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow$ ~~$a \in [\,]$~~

~~Но т.к. $a \neq 0$, то $a \in [-1;0) \cup (0;1]$~~

$a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

~~$\begin{cases} a \in [-1;0) \cup (0;1] \\ a \in [-1;0) \cup (0;1] \end{cases}$~~ $\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases}$

~~$a \in [-1;0) \cup (0;1]$~~. $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Осталось понять, при каких a искомые b для первого и второго уравнений совпадают.

Для этого подставим $b^2 = \frac{a^2-1}{25}$; $b = \pm\sqrt{\frac{a^2-1}{25}} = \pm\frac{\sqrt{a^2-1}}{5}$ в I ур-ие.

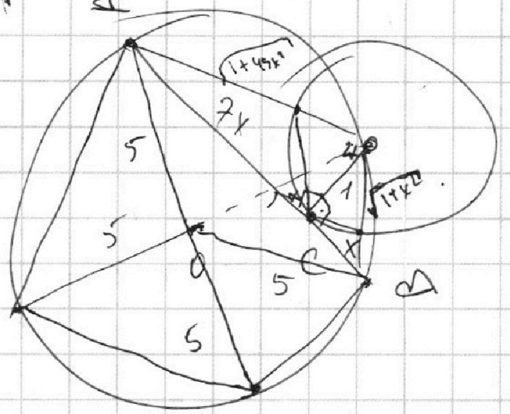
(если b из II-ого ур-ния подходит и для 1-ого ур-ния, то I-ое ур-ние обратится в ноль.

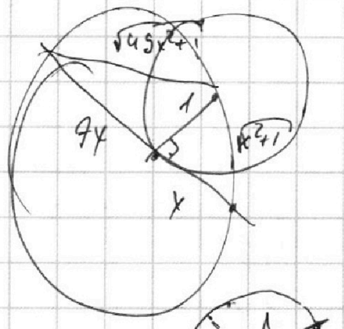
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

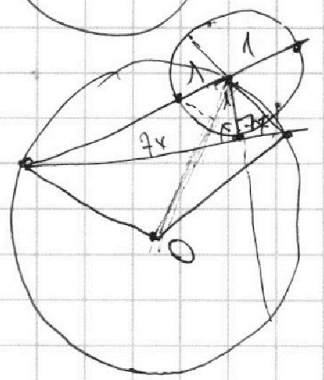
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



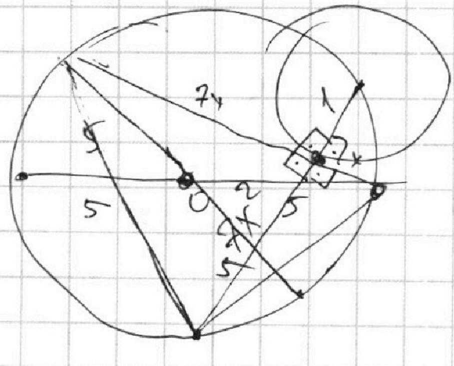


$2+50x^2-$



$\sqrt{49x^2+1}-1$

$7x^2 = 1\cdot 7x^2$



$49x^4 + 49x^2$ $\qquad$ $49x^4 + x^2$

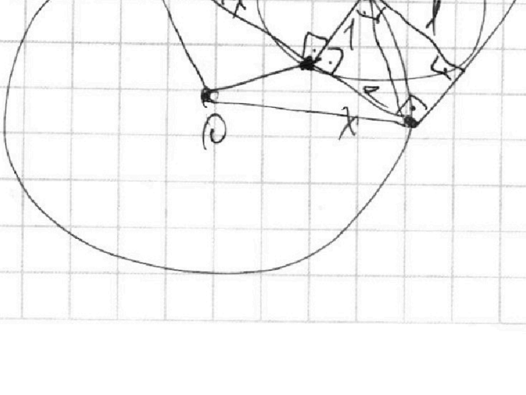
$50 - 14x^2\cos$

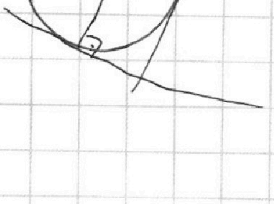
$7x\cdot\sqrt{(x^2+1)}$

$49x^4+49x^2+49x^4+x^2-2\cancel{\sqrt{7x(x^2+1)}}\cdot x\sqrt{49x^2+1}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cancel{\cos^2\alpha} - 2\cos^2\alpha - 1.$

$\cos^2\alpha =$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y = 8x + 10b$

$x^2 + 4x^2 + 40bx + 100b^2 - 4 = 0$

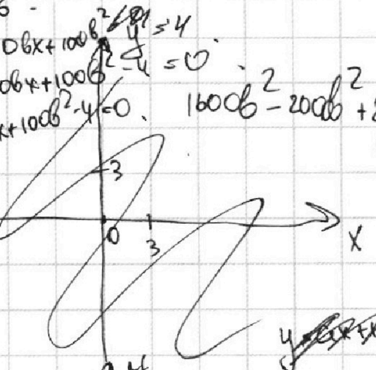
$x^2 + 4x^2 + 40bx + 100b^2 - 4 = 0$

$5x^2 + 40bx + 100b^2 - 4 = 0$

$1600b^2 - 2000b^2 + 80 = a^2 - 25b^2 + 1 = 0$

$\cancel{16a^2 - 400b^2 + 16 = 0}$

!Проверить на квадр. ур



$a^2 = 25b^2 - 1$

$25b^2 = a^2 - 1$

$b^2 = \frac{a^2-1}{25}$ $a^2 \geq 1$

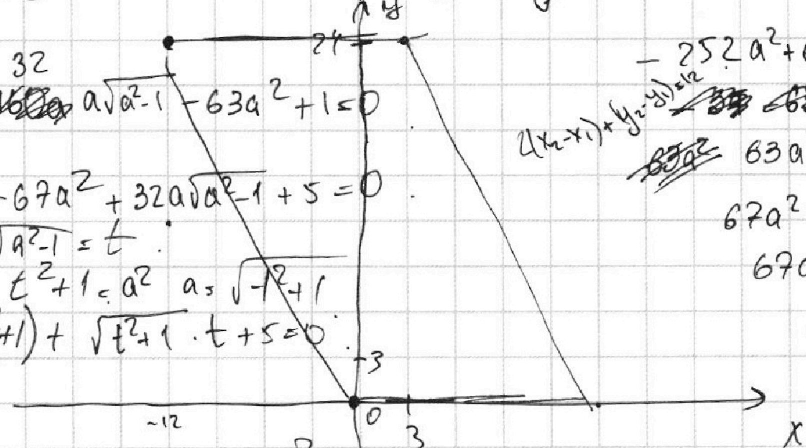
$-4(a^2-1) + 32 a\sqrt{a^2-1} - 63a^2 + 1 = 0$

$-67a^2 + 32a\sqrt{a^2-1} + 5 = 0$

$\sqrt{a^2-1} = t$

$t^2 + 1 = a^2$ $a = \sqrt{t^2+1}$

$-67(t^2+1) + \sqrt{t^2+1} \cdot t + 5 = 0$



$-252a^2 + 640ab + 4 - 400b^2 = 0$

$63a^2 - 160ab - 1 + 100b^2 = 0$

$63a^2 - 160a\sqrt{\frac{a^2-1}{25}} - 1 + 4a^2 - 4 = 0$

$67a^2 - 32a\sqrt{a^2-1} - 5 = 0$

$67a^2 = 32a\sqrt{a^2-1} + 5$

$32a\sqrt{a^2-1} + 5 \geq 0$

$32a\sqrt{a^2-1} \geq -5$ $|:32$

$a\sqrt{a^2-1} \geq -\frac{5}{32}$

$63 \cdot 25 = 315 + 126 = 1575$

$32a\sqrt{a^2-1} = 67a^2 - 5$

$32^2 \cdot a^2 \cdot (a^2-1) = 67^2a^4 - 670a^2 + 25$

$32^2a^4 - 32^2a^2 = 3465a^4 + 354a^2 + 25$

$4489 - 1024 = 3465$

$670 + 1024 = 354$

$67 \cdot 67 = 469 + 402 = 4489$

$32 \cdot 32 = 64 + 96 = 1024$

$D_1 = 177^2$

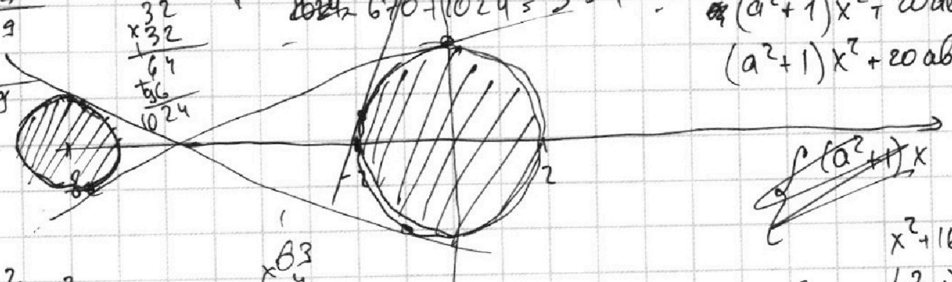
$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 + (ax + 10b)^2 = 4$

$(a^2+1)x^2 + 20abx + 100b^2 = 4$

$(a^2+1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$

$D = 0$



$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0$

$(a^2+1)x^2 + (20ab + 16)x + 100b^2 + 63 = 0$

$63 \cdot 4 = 252$

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$

$(x+8)^2 +$

$y = ax + 10b$

$D_1 = 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2 - 4)$

$D_2 = 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 4(a^2+1)(100b^2 + 63)$

$D_1 = \cancel{400a^2b^2} - 4(\cancel{100a^2b^2} - 4a^2 + 100b^2 - 4) = 16a^2 - 400b^2 + 16$

$D_2 = 640ab + 256 - 252a^2 - 400b^2 - 252 = -252a^2 + 640ab + 4 - 400b^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{\cancel{(a-b)^2-4ab}} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$.

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$

$= \left(\frac{49}{50} - \frac{49}{50}x^2\right)\left(\frac{49}{50} - \frac{1}{50}x^2\right) =$

$= \frac{1}{50^2}(49-49x^2)(49-x^2)$

$(a;b) = 1$.

$(a+b; ab) \neq k$

$a+b = mk$.

$\cancel{(a+b-ab; ab\ a+b)} =$

$\frac{mk}{m^2k^2-8ab}$.

$a(1-b) + b(1-a) + a$.

$8ab \vdots m$.

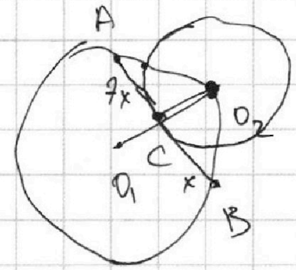
$ab \not\vdots m$

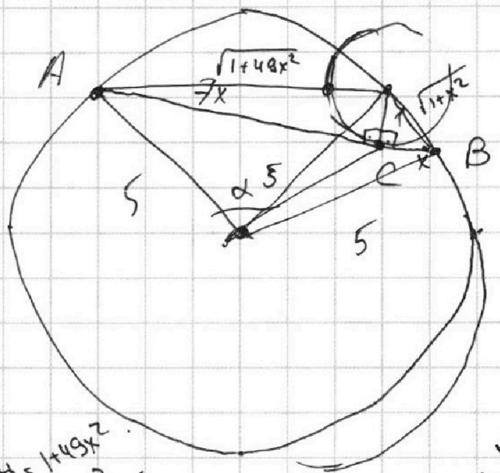
$8 \vdots m$.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(135^\circ) = \cos(90^\circ+45^\circ) = \sqrt{3}$.

$=$





Ω

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3 =$

$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$.

$4x$

$5^2 + 5^2 - 2\cdot 25\cdot\cos\alpha = 1 + 49x^2$.

$50 - 50\cos\alpha = 1 + 49x^2$.

$49x^2 - 49 = -50\cos\alpha$

$50\cos\alpha = 49 - 49x^2$.

$\cos\alpha = \frac{49}{50} - \frac{49}{50}x^2 \Rightarrow \sin\alpha = 1 - \frac{49^2}{50^2} + 2\frac{49^2}{50^2}x^2 - \frac{49^2}{50^2}x^4 =$

$= 1 - \left(\frac{49}{50}\right)^2\cdot(1 - 2x^2 + x^4) =$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{49}{50}\right)^2\cdot(x^2-1)^2}$

$50 - 50\cos\beta = \cancel{\sqrt{1+x^2}}\ 1 + x^2$.

-4

$50\cos\beta = 49 - x^2$.

$\cos\beta = \frac{49}{50} - \frac{x^2}{50} = \frac{49}{50} - \frac{1}{50}x^2$.

$\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{49^2}{50^2} + 2\cdot\frac{49}{50^2}x^2 - \frac{1}{50^2}x^4} =$

$= \cancel{\sqrt{1 - \frac{49}{50}\left(\frac{49}{50}\right)}}\ \sqrt{1 - \left(\frac{49}{50} - \frac{1}{50}x^2\right)^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

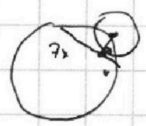
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^{14}\,7^{10}$
$bc: 2^{17}\,7^{17}$
$ac: 2^{20}\,7^{37}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$
$b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$
$c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$



$ac = 2^{20}7^{37}K$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 \geq 14\\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 17\\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 20\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2 \geq 10\\ \beta_2+\beta_3 \geq 17\\ \beta_1+\beta_3 \geq 37.\end{cases}$$

$2\beta_1+2\beta_2+2\beta_3 \geq 64.$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 32$

$2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 \geq 51$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 26.$

$$\begin{cases}\beta_3-\beta_1 \geq 7\\ \beta_1+\beta_3 \geq 37.\end{cases}$$

$2\beta_3 \geq 44$

$\beta_3 \geq 22.$

$abc_{min} = 2^{26}7^{32}$

$\beta_1-\beta_2 \geq 20.$

$a = 2^{10}$
$b = 2^{6}$
$c = 2^{10}$

$a = 2^{0}$
$b = 2^{17}$
$c = 2^{4}$

$a = 2$

2^{26}

$c = 2^{12}$
$a = 2^{8}$ $b = 2^{6}.$

№4.

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x.$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b.$

$\cancel{a-2\sqrt{ab}+b = a^2-2ab+b^2}$

$a-b = a^2-b^2.$

$(a-b)(a+b) = (a-b)$

$(\sqrt{49x^2+1}-1)(\sqrt{49x^2+1}+1)$