



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \quad (abc)^2 = (2^{23+32} \cdot 7^{29+39}) = (2^{55} \cdot 7^{68})$$

Поскольку, это степени возведения  
каждого простого числа  $p$  в произведе-  
ние  $(abc)^2$  — четные. Тогда степень  
возведения двоек  $v_2(abc)$  не менее 56. Тогда  
 $(abc) \geq (2^{28} \cdot 7^{34})^2 \Rightarrow (abc) \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ . Пример

где  $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$ . При этом сумма  
 $a \geq 2^9 \cdot 7^{11}$  нечетность  $b$  возведение 7 в числе a  
 $b = 2^{\cancel{17}} \cdot 7^{\cancel{18}}$  и c не менее 39. Значит,  
 $c = 2^{\cancel{23}} \cdot 7^{\cancel{39}}$   $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

$$\begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{11} \\ b = 2^5 \cdot 7^0 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{28} \end{cases}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $\frac{a}{b}$  несократима, то  $(a, b) = 1$ .

$$(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = (a+b, (a+b)^2 - 9ab) = \\ = (a+b, 9ab) = 1.$$

$ab$  состоит только из делителей  $a$  и  $b$ , но  $(a+b, a) = (a+b, b) = (a, b)$ . Тогда  $(a+b, ab) = (a, b) = 1$ .

Тогда  $(a+b, 9ab) \leq 9$ . Тогда если  $(a+b, 9ab) = 9$ , то  $(a+b) \mid 9$ . Рассмотрим  $a+b=9$ , тогда  $a=1, b=8$ . Тогда  $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{1+8}{1+8} = \frac{9}{9} = 1$ .

Ответ: 9

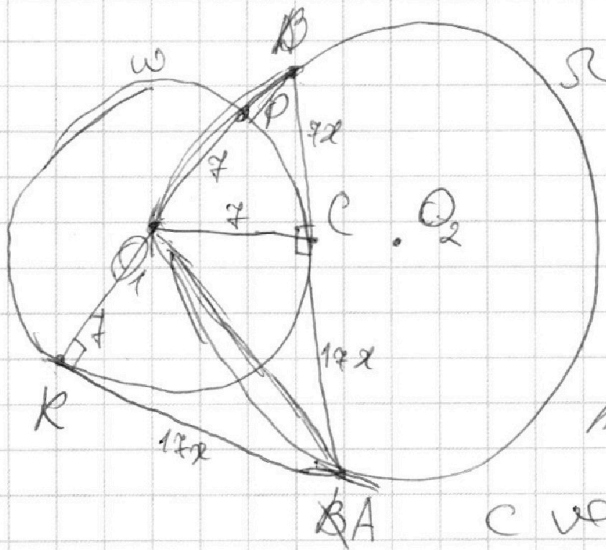
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $O_1$  - центр  
маленького  $O_2$  - центр  $\Omega$ .

Тогда пусть  $D =$   
 $= BO_1 \cap \omega$ ,  $K$  - вторая  
точка пересечения  $BO_1$   
с  $\omega$ . Тогда по св-ву ка-

сательной  $AB$ :  ~~$(BC)^2 = (BA) \cdot (BD)$~~   $OC \perp AB$ .

Также  $(BD + 14)BD = BC^2 = 49x^2$  где  $x > 0$

(из условия, тогда  $A C = 7x \Rightarrow BD + 14 BD =$   
 $= BC^2 = 49x^2, 49x^2 + 49 = (7 + BD)^2$

~~$KA$~~   $KA$  - касательная к  $\omega$ , дей-  
ствительно, кас-я  $K\omega$  в  $K$  и  $AB$   
пересекаются в той же точке, что

$AC = KA \cdot x$ . Отсюда  $x = A \Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{7 + BD}{24} =$   
 $= \frac{7}{17x}$   ~~$7 + 17x \cdot BD$~~  (по подобию

$\triangle O_1BC$  и  $ABK$  по 2 углам)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Пусть } 1-9x=y, 3x^2+3x+1=a,$$

$$\text{Тогда } \sqrt{a+y}-\sqrt{a}=y.$$

Домножим на  $(\sqrt{a+y}+\sqrt{a})$ .

$$a+y-a=y(\sqrt{a+y}+\sqrt{a})$$

$$y=y(\sqrt{a+y}+\sqrt{a})$$

$$\left[ \begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{9} \text{ — не подходит: } \sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0 \\ \sqrt{a+y} + \sqrt{a} = 1 \end{array} \right.$$

$$2a+y+\sqrt{a^2+ay}=1$$

$$2\sqrt{a^2+ay}=(1-2a-y)^2 \Rightarrow 2a^2+4ay=1+4a^2+y^2-4a-2y+y^2+4ay$$

$$1-4a-2y+y^2=(y-1)^2-4a=0$$

$$(y-1)^2=4a$$

$$9x^2=4(3x^2+3x+1)$$

$$8x^2=12x^2+12x+4$$

$$69x^2+12x+4=0$$

$$D=12^2-4 \cdot (-4) \cdot 69=144+1104=1248$$

$$x=\frac{-12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{-4 \pm \sqrt{288}}{23}$$

Ответ:  $\left\{ \frac{1}{9}; -\frac{4}{23} + \sqrt{288}; -\frac{4}{23} - \sqrt{288} \right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сперва заметим, что во второй <sup>кравействе</sup> ~~уравнении~~ <sup>дан</sup> 2 уравнения окружностей с центрами в  $(0; 0)$  и радиуса  $1$  и с центром в  $(0; 12)$  и радиуса  $10$ .

Тогда, чтобы при ~~проведении~~ <sup>проведении</sup> скабок было отрицательно, ~~тогда~~ <sup>тогда</sup> из них дана на быть пол-ки, а другая окруж-ка, так же возможно, что какая-то равна 0.

Тогда решим систему  $(x, y)$ -точка с координатами  $(x, y)$ , лежащая внутри одной или на границе одной окруж-ки.

Тогда они не имеют общих точек.

Тогда, если прямая  $ax + y - 8b$  пересекает хотя бы одну такую окруж-ность, то найдется какой-то отрезок, все точки к-го удовлетворяют решению. Тогда ~~точка~~  $ax + y - 8b = 0$  имеет не более 1 точки с касанием к окруж-ке.

Тогда  $ax + y - 8b = 0$  - касательная к крив.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит,

$$\begin{cases} ax+y=8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет 1 решение.

$$y=8b-ax$$

$$64b^2 - 16abx + a^2x^2 + x^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(a^2+1)(64b^2-1) = 256a^2b^2 - 256b^2 - 4a^2b^2 + 4$$

$$-a^2b^2 - 256b^2 + 4a^2 + 4 = -256b^2 + 4a^2 + 4 = 0$$

$$256b^2 = 4a^2 + 4 \Rightarrow a^2 + 1 = 64b^2$$

По аналогии

$$\begin{cases} ax+y=8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет 1 решение

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$(a^2+1)x^2 - 192b + 24ax - 8abx = 0$$

$$64a^2(3-b)^2 = 192 \cdot b - 4(a^2+1)$$

$$\text{Получаем } (64b^2-1)(3-b)^2 = 64 \cdot 48b^3$$

Решая уравнение, легко найти требуемое  $a$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

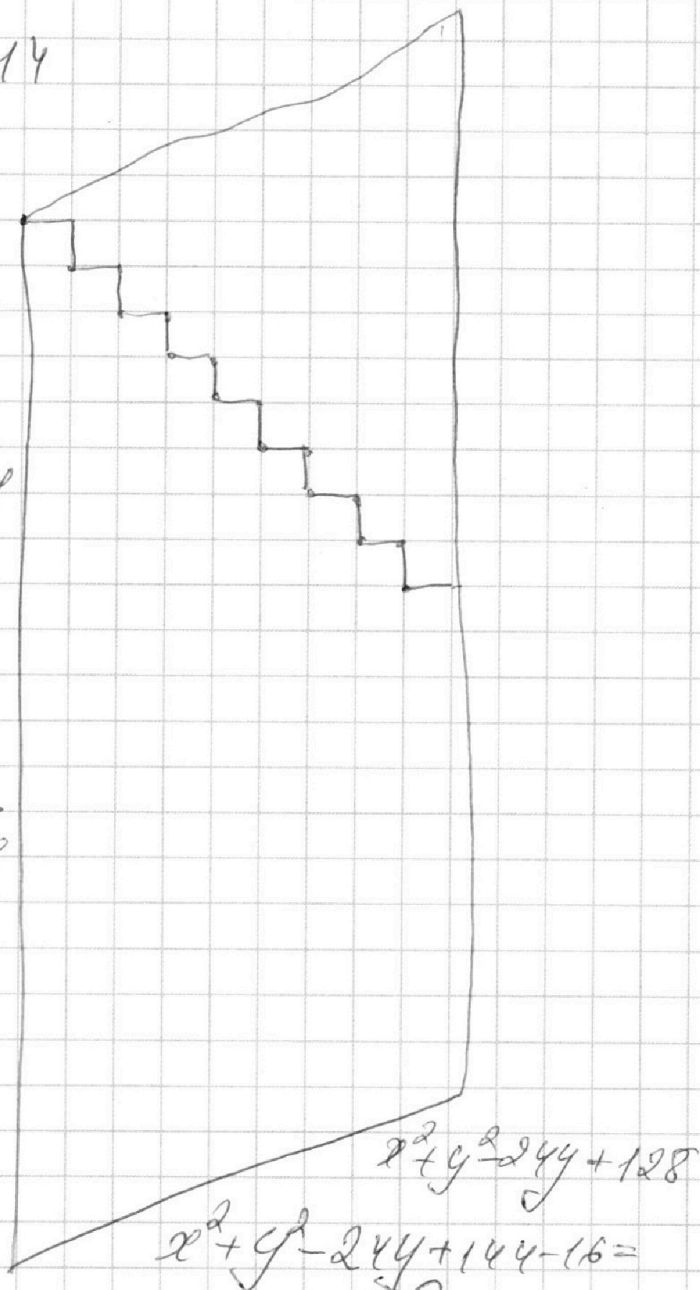
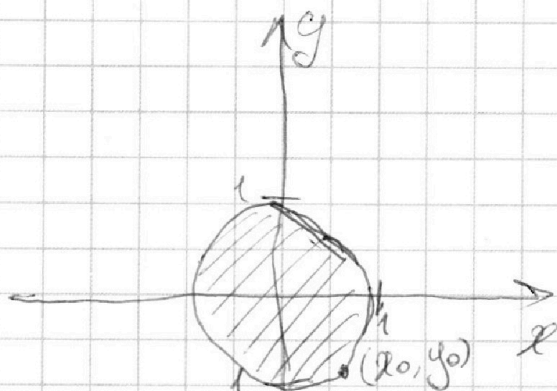


$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_0 = 8b - ax_0$$

$$y = 8b - ax$$

$$64b^2 - 16abx + a^2x^2 + x^2 - 1$$



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$ax + y = 8b$  — касательная

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(9x)^2 = 2(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 6x^2 + 6x + 2$$

$$75x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 75 \cdot (-2) = 36 + 300 = 336$$

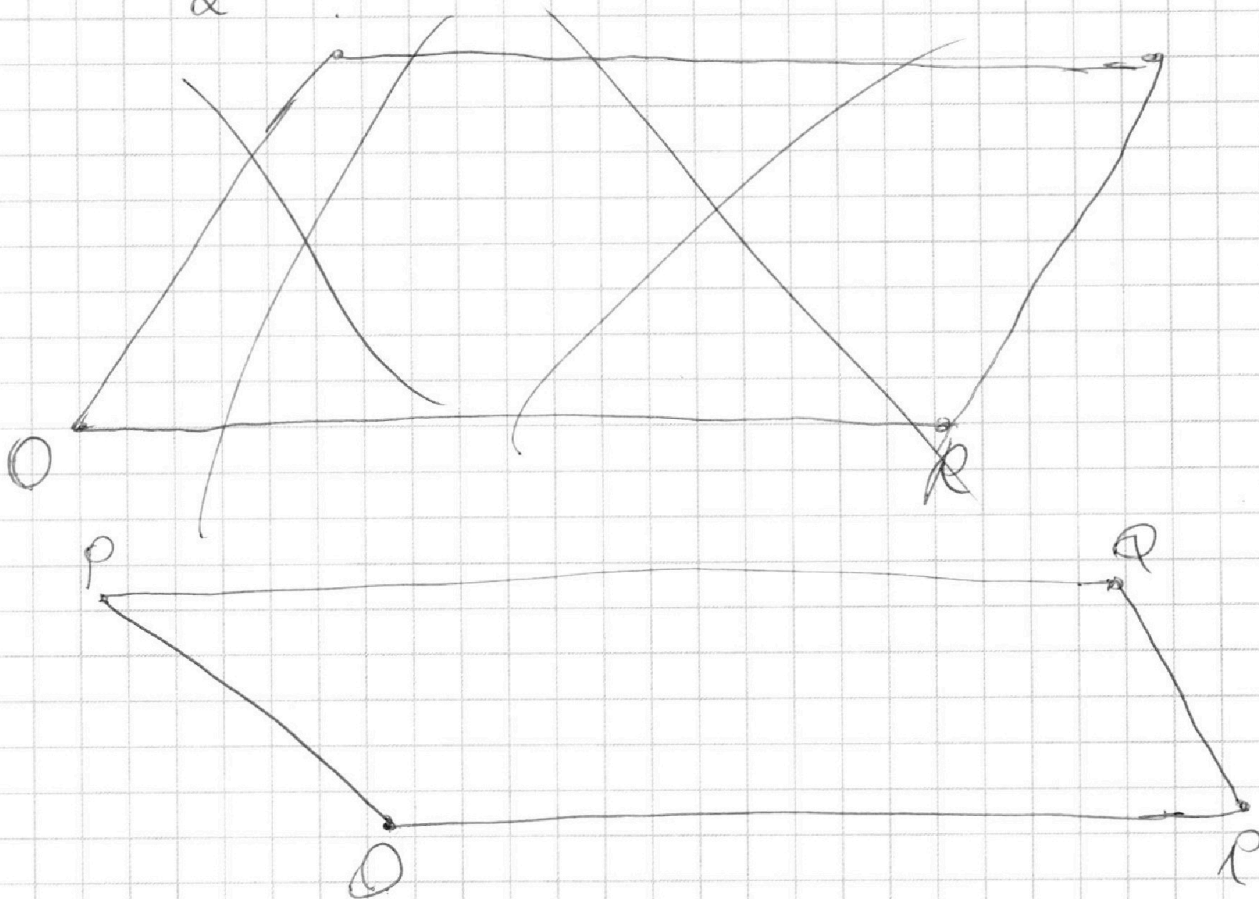
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{336}}{2 \cdot 75}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{84}}{2} = -3 \pm \sqrt{21}$$

$$(1 - (4 - 9x)) = 9x$$

$$\begin{array}{r} 1 - 4 + 9x = 9x \\ \times 16 \quad \times 4 \quad + 9 \\ \hline 16 \quad 36 \quad 81 \\ \hline 414 \quad 288 \quad 287 \end{array}$$

$$\frac{12}{69} = \frac{4}{23}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\
 & (3x^2 + 3x + 1) \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1-2a-y)^2 &= (1-2a-y)(1-2a-y) = \\
 &= (1-2a^2-y-2a+4a^2+2ay-y-2a+4a^2+2ay-y+2ay+y^2) = 0
 \end{aligned}$$

$$D_1 = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$D_2 = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$$

$$y = 1 - 2a$$

$$(1-y)^2 = 2a \quad y \geq 0; \quad y \geq -a$$

$$\sqrt{a+y} - \sqrt{a} = y$$

$$(a+y+a-2\sqrt{a^2+ay}) = y^2$$

$$(2a+y) - 2\sqrt{a^2+ay} = y^2$$

$$y^2 - 2a - y = -2\sqrt{a^2+ay}$$

$$a+y-a = y(\sqrt{a+y} + \sqrt{a})$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{a+y} + \sqrt{a} \\
 & 6x^2 + 6x + 2 + 2(3x^2 + 3x + 1) \cdot (1-2a) + (1-2a)
 \end{aligned}$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - \frac{6}{9} + 2} &= \sqrt{\frac{241}{27} - \frac{2}{3} + 2} = \\
 &= \sqrt{\frac{-17}{27} + 2} = \sqrt{\frac{37}{27}}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{a+y} + \sqrt{a} = 1$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + \frac{3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$$2a+y+2\sqrt{a^2+ay} = 1$$

$$2 \cdot 2ay = 4ay$$

$$(1-2a-y)^2 = 4(a^2+ay)$$

$$1 + 2a^2 + y^2 - 4a - 4y + 4ay = 4a^2 + 4ay$$

$$1 + y^2 - 4a - 4y - 2ay = 0$$

$$(y^2 - 2y + 1) + 2(a + 2ay + y) = 0$$

$$(y-1)^2 + 2(a+y) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$64a^2(3-b)^2 = 192b \cdot 4 \cdot (a^2+1)$$

$$16a^2(3-b)^2 = 48b(a^2+1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2+1 = 64b^2 \end{array} \right.$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$(64b^2 - 1)(3-b)^2 = \cancel{192} 64 \cdot 48 b^{\cancel{2}}^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$-24y + 144 = 16$$

$$24(6 - y) = 15$$

$$6 - y = \frac{15}{24} \Rightarrow y = 6 - \frac{15}{24} = 5\frac{9}{24} = 5\frac{3}{8}$$

$$x(14 + 10D) = x^2 + 49x^2$$

$$296 + 28BD + BD^2 =$$

$$= 49 + 49x^2$$

$$248 + 28BD + BD^2 = 49x^2$$

$$\begin{cases} ax + y = 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(ax + y)^2 = 64b^2$$

$$a^2x^2 + 2axy + y^2 = 64b^2$$

$$(a^2 - 1)x^2 + 2axy + y^2 = 64b^2 - x^2 \Rightarrow x^2(a^2 + 1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 + 4a^2 + 4 = 4a^2 + 4 \neq 0$$

$$4a^2 + 4 = 256b^2 \Rightarrow a^2 + 1 = 64b^2$$

$$4a^2 + 4 = 256b^2$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$\begin{cases} ax + y = 8b \\ x^2 + y^2 - 24y + 128 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 128 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$24b + 3ax - ab = 0$$

$$ab = 24b + 3ax =$$

$$64(a^2 - 1)b^2 =$$

$$192b \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 192 \quad | \quad 66 \\ 26 \quad | \quad 12 \\ \hline 32 \end{array}$$

