МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам
$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$
Найдите наименьшее возможное значение выражения $\dfrac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. .
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 3^{14}\cdot 7^{13}$ $\Rightarrow$ $ab^2c \vdots 3^{33}\cdot 7^{30}$

$bc \vdots 3^{19}\cdot 7^{17}$ $\quad ab^2c \vdots ac \vdots 3^{23}\cdot 7^{42}$

$ac \vdots 3^{23}\cdot 7^{42}$

$\Rightarrow ab^2c \vdots 3^{33}\cdot 7^{42}$

$\Rightarrow ab^2c \geqslant 3^{33}\cdot 7^{42} \;\Big|\cdot \frac{1}{b}$

$b \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow abc \geqslant \frac{3^{33}\cdot 7^{42}}{b}$ ~~$\Rightarrow abc$ - min при a, c min и b - max.~~

Пусть все знач. минимальны $\Rightarrow$

~~Пусть~~ $abc = \frac{3^{33}\cdot 7^{42}}{b}$

$ac = \frac{3^{33}\cdot 7^{42}}{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{3^{33}\cdot 7^{42}}{ac}$

$ac = 3^{23}\cdot 7^{42}$

если ac возрастает в x раз, то b ~~возрастает~~ уменьшится в $\sqrt{x}$ раз $\Rightarrow ac$ - min. должно быть.

$\Rightarrow 3^{10} = b^2 \Rightarrow b = 3^5$

$\Rightarrow abc = 3^{28}\cdot 7^{42}$ - min значение.

Ответ: $abc_{min} = 3^{28}\cdot 7^{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Из того, что Дано следует:

~~Дано:~~ НОД $(a, b) = 1$; НОД $(a+b; a^2-9ab+b^2) \overset{..}{=} m$

Найти m.

$m \parallel$

$\Rightarrow$ НОД $(a+b, a^2-9ab+b^2) =$ НОД $(a+b, 11b^2)$

Известно, что для ~~на~~ целых чисел c и d верно: НОД $(c, d) =$ НОД $(c$, ост. от дел. d на $c)$

$$\begin{array}{r|l} a^2-9ab+b^2 & a+b \\ \underline{a^2+ab} & a-10b \\ -10ab+b^2 & \\ \underline{-10ab-10b^2} & \\ 11b^2 \text{ (ост.)} & \end{array}$$

Так как a и b взаимно-просты, то $a+b$ не делится ни на один простой множитель b или a ($1 =$ НОД $(a, b) =$ НОД $(a+b, b) =$ НОД $(a, b+a)$)

$\Rightarrow$ Число $(a+b)$ и b^2 - взаимно просты $\Rightarrow$ НОД $(a+b, 11b^2) \leq 11$

(достигает 11 например при $a=6$; $b=5$; тогда $\frac{6}{5}$ - несокр. $\frac{6+5}{36-270+25} = \frac{11}{-209}$ (сокр. на 11) $= \frac{1}{-19}$.)

Ответ: $m = 11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При помощи подстановки можно понять, что $x = \frac{5}{6}$ будет одним из корней уравнения:

$$\sqrt{3\cdot\frac{25}{36} - \frac{25}{6} + 6} - \sqrt{3\cdot\frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = 5 - 5$$

$$\sqrt{3\cdot\frac{25}{36} + 1\frac{5}{6}} - \sqrt{3\cdot\frac{25}{36} + 1\frac{5}{6}} = 0$$

$0 = 0$

верно.

$$\cancel{\sqrt{\left(x - \frac{5}{6}\right)\left(3x - \frac{5}{2}\right) + 3\frac{11}{12}} - \sqrt{}}$$

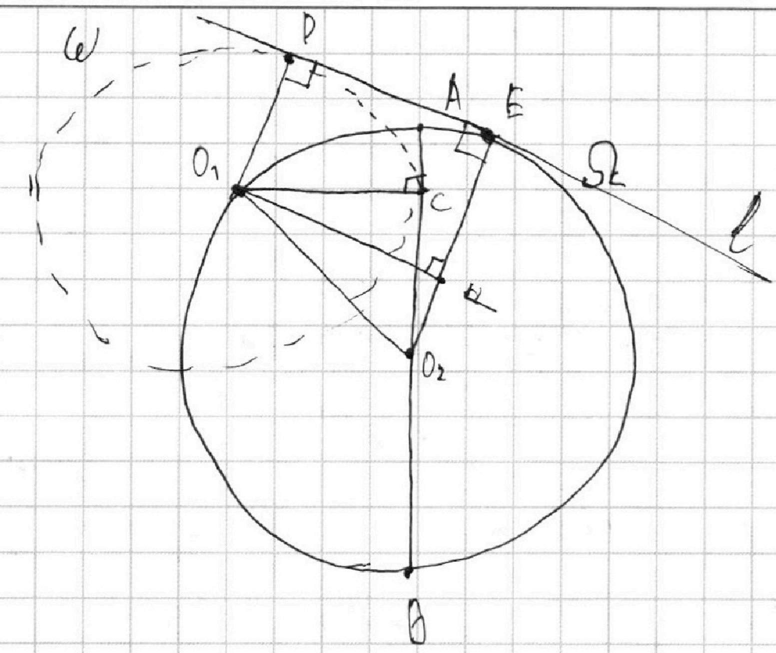
Ответ: $x = \frac{5}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть D и E – точки касания окружностей ω и Ω соотв. их общей касательной l. Пусть O_1 и O_2 соотв. центры окр. ω и Ω.

$\Rightarrow DE$ – искомое расстояние.

Пусть радиус окр $\omega - R_1$ и радиус. окр $\Omega - R_2$

Т.к. AB диам. окр. Ω, то $R_2 = \frac{AB}{2} = \frac{AC+CB}{2} = 13$

$O_1C \perp AB$ (как касат.)

$O_1D \perp l$ (как касат.)

$O_2E \perp l$ (как касат).

По т-ме Пифагора:

$O_1C^2 = O_1O_2^2 - O_2C^2$

~~$O_1C = \sqrt{(BC-BO_2)^2 + R_2^2} = \sqrt{(BC-R_2)^2 + R_2^2} = \sqrt{144+169} = \sqrt{313}$~~

$O_1C = \sqrt{R_2^2 - (BC-BO_2)^2} = \sqrt{R_2^2 - (BC-R_2)^2} = \sqrt{169-144} = 5$

$R_1 = O_1C = O_1D = 5$

Опустим перпенд. из O_1 на $O_2E \Rightarrow O_1DEF$ – прямоуг.

$\Rightarrow O_1D = FE \Rightarrow O_2F = OE - FE = R_2 - R_1 = 8$

$O_1F = DE$

По т-ме Пифагора:

$DE = O_1F = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{R_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{169-64} = \sqrt{105}$

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть S - расстояние от A до B; $V_м$ - скорость ~~велосипедиста~~ мотоциклиста; $V_в$ - скорость велосипедиста.

$$\begin{cases} \dfrac{S}{V_в} = \dfrac{S}{V_м} - 1 & (1) \\ \dfrac{V_м}{V_в} \cdot S - \dfrac{V_в}{V_м} S = 49 & (2) \\ \dfrac{S}{V_в+7} = \dfrac{S}{V_м+7} - \dfrac{36}{60} & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (2) и (4):

$$\frac{V_м}{147+(2S+21)V_м} \cdot S(2S-21) -$$

1) $S(V_в - V_м) = V_в \cdot V_м$

3) $S V_м + 7S = S V_в + 7S - \frac{3}{5}(V_в+7)(V_м+7)$

$$S(V_в - V_м) = \frac{3}{5}(V_в+7)(V_м+7)$$

$$\Rightarrow 5 V_в \cdot V_м = 3 V_в V_м + 21 V_в + 21 V_м + 147$$

$$\cancel{2} V_в V_м = \frac{21 V_в + 21 V_м + 147}{2}$$

$$\Rightarrow 2S(V_в - V_м) = 21 V_в + 21 V_м + 147$$

$$(2S-21)V_в - (2S+21)V_м = 147$$

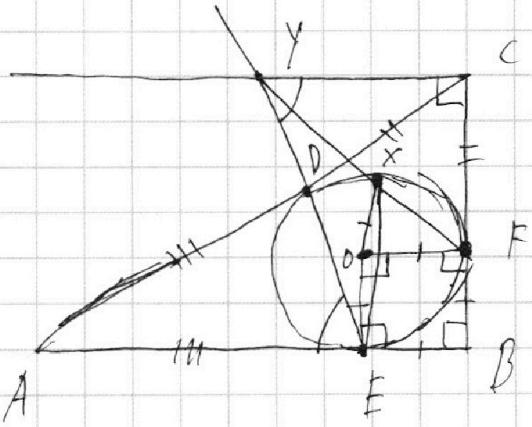
$$V_в = \frac{147 + (2S+21)V_м}{2S-21} \quad (4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть O – центр окр ω; r – её радиус.

Т.к. $\triangle ABC$ – прямоуг, а ω впис. окр., то

$r = O = OF = EB = BF$; $AE = AD$; $DC = CF$.

$CY \parallel AB$, т.к. они перп. BC.

$\Rightarrow \angle DEA = \angle DYC$ – как накр.

$\triangle ADE$ – р/б $\Rightarrow \angle ADE = \angle AED$

$\Rightarrow \angle YDC = \angle AED = \angle \cancel{ADE}\, ED = \angle DYC$

как верт

$\Rightarrow \triangle YDC$ – р/б $\Rightarrow YC = DC = CF \Rightarrow$

$\triangle YCF$ – пр. с равными кат. $\Rightarrow YF =$ как гип

$\angle CYF = \angle CFY = 45°$ ~~(углы по~~

$= \sqrt{2}\, CF$; т.к. окр. ω впис. в прямоуг $\triangle$

$\Rightarrow \angle EOF = \angle OFB = \angle FBE = \angle BEO \Rightarrow OF \parallel BE$

$\Rightarrow OF \parallel AB$ и $YC \Rightarrow \angle CYF = \angle XFO$ – как накр. $= 45°$

$XO = OF = r \Rightarrow \triangle XOF$ – р/б $\Rightarrow \angle OXF = \angle XFO = 45°$

$\Rightarrow$ аналогично $XF = \sqrt{2} r \Rightarrow YX = YF - XF = \sqrt{2} CF - \sqrt{2} r$

$\angle EOF = 90°$ (центральный) $\Rightarrow \angle EXF = 45°$ (как вп. опир. на ту же дугу) $\Rightarrow \angle EXF$ и $\angle OXF$ совп $\Rightarrow EX$ – диаметр $\omega \Leftrightarrow EX = 2r$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(Продолжение).

По усл $EX = \sqrt{2}\, XY$

$$\Rightarrow 2r = (\sqrt{2}\, CF - \sqrt{2} r) \cdot \sqrt{2}$$

$$2r = 2CF - 2r$$

$$2r = CF = CD$$

По т-ме Пифагора:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(AE + EB)^2 + (BF + CF)^2 = (AD + CD)^2$$

$$(\overset{=AD}{AE} + r)^2 + (r + 2r)^2 = (AD + 2r)^2$$

$$AD^2 + 2ADr + r^2 + 9r^2 = AD^2 + 4ADr + 4r^2$$

$$2ADr = 6r^2$$

$$2AD = 6r$$

$$AD = 3r$$

$$\Rightarrow AD : DC = 3r : 2r = 3 : 2$$

Ответ: 3 : 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$ $\quad 25x^2 - z^2 - y^2 = 8z^2 + 6yz$

$8z^2 \quad 2(4z^2 + 3yz)$

$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$ (возведём всё в квадрат)

$\frac{xy}{8y + x} = \frac{2}{15}$

$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 25 - 60x + 36x^2$

$-30x^2 + 56x - 18 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} \quad | :2$

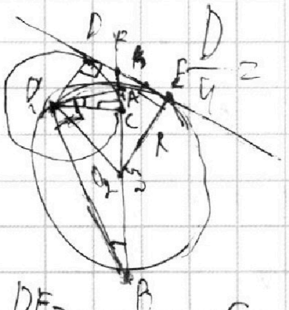
$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}$

Т.к. ~~справа~~ в правой стороны у нас извлекается корень, то ~~он~~ правая сторона может принимать лишь неотрицательные значения => левая тоже.

Рассмотрим функцию $f(x) = -15x^2 + 28x - 9$ (выражение ~~справа~~ слева)

$-15x^2 + 28x - 9 = 0$

$\frac{D}{4} = 196 - 135 =$



$3x^2 - 5x + 6 \,|\, x - \frac{5}{6}$

$3x^2 - \frac{5}{2}x \,|\, 3x - 2{,}5$

$-2{,}5x + 6$

$-2{,}5x + \frac{25}{12}$

$6 - 2\frac{1}{12}$

$3\frac{11}{12}$

$S(V_m - V_b) = V_m V_b$

$5S(V_m - V_b) = 3(V_b + 7)(V_m + 7)$

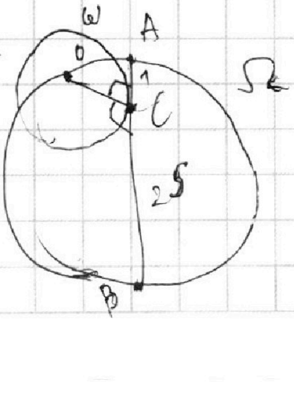
$2S(V_m - V_b) = 21 V_m + 21 V_b + 147$

DF = FK

$5S(V_m - V_b) = \left(\frac{3}{2} + 1\right)(21V_m + 21V_b + 147)$

$5 V_m V_b = 3 V_b V_m + 21 V_m + 21 V_b + 147$

$2S(V_m - V_b) =$



$2 V_m V_b = 21 V_m + 21 V_b + 147$

$\frac{21 V_m + 21 V_b + 147}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 3^{14} \; 7$

$bc : 3^{19} \; 7^{17}$

$ac : 3^{23} \; 7^{42}$

$\Rightarrow ab \geq 3^{14} \; 7^{13}$

$bc \geq 3^{19} \; 7^{17}$

$ac \geq 3^{23} \; 7^{42}$

Перемножим эти неравенства:

$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$

Так как мы работаем с натуральными числами то будет верно:

$\sqrt{a^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}}$

$abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$

$a+b = a^2 - 9ab + b^2 \pmod m$

НОД $(11b^2, a+b) = m$

$a+b \equiv (a+b)^2 - 11ab$

$11ab \equiv (a+b)(a+b-1)$

$(a+b)(a+b-1) - 11ab$

$a \; \vdots b, \; b \; \vdots b \Rightarrow a+b \; \vdots b$

$\Rightarrow a+b \; \vdots b^2$

$b = p_1^{a_1} \cdot p_1^{a_2} \cdot \ldots$

$a = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \ldots$ НОД $(a, b) = 1$

НОД $(a+b, a^2 - 9ab + b^2) = m$

$z = \frac{5x-y}{3}$

$\frac{8y+x}{xy} = \frac{15}{z}$

$(5x-y)(8y+x) = 45xy$

$15xy = 8yz + xz$

$z = \frac{15xy}{8y+x}$

$40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy = 45xy$

$5x^2 - 8y^2 = 6xy$

$x(5x-6y) = 8y^2$

$x = \frac{3z+y}{5}$

$(3z+y)(3z-5y) = 40y^2$

$\frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2+3z^2} = \frac{2(15x+3y-z)}{y^2+3z^2} = \frac{2(9z+3y+3y-z)}{y^2+3z^2}$

$a = \frac{9 \pm \sqrt{5b^2}}{2}$

$\frac{D}{4} = 196 - 270 < 0$

$= a - 10b + \frac{11b^2}{a+b}$

$6x^2 - 4x + 7 - 25 + 60x - 36x^2 = 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+2x+1)}$

$-30x^2 + 56x - 18 =$

$-15x^2 + 28x - 9 =$

$\frac{5}{v_b} = \frac{5}{v_n} - 1$

$\frac{5}{v_b+7} = \frac{5}{v_n+7} - \frac{36}{60}$

$55(v_n+7) = 55(v_b+7) - 3(v_b+7)(v_n+7)$

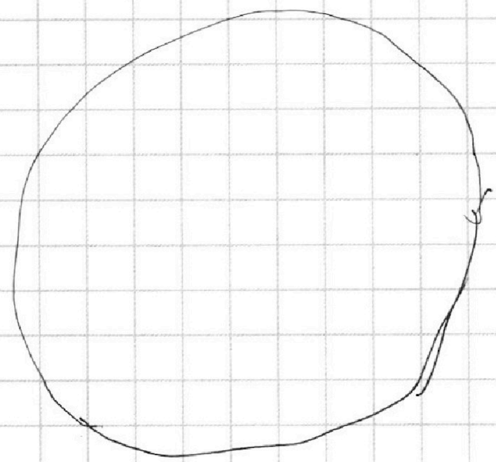
$ab^2c : 3^{33} \cdot 7^{30}$

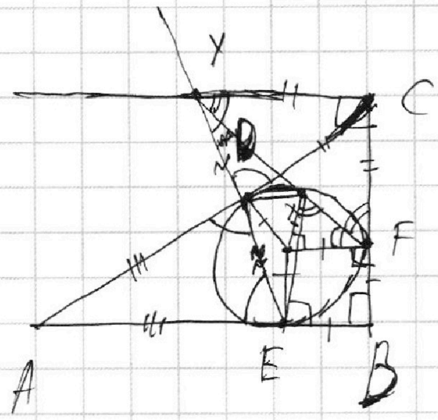
$a = 3^{14} \cdot 7^{29}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



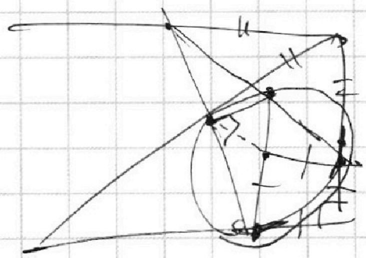


$XF = \sqrt{2}r$

$YF = \sqrt{2}(BC - r)$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CF} = \frac{AB - r}{BC - r}$$

$$\frac{EX}{XY} = \frac{\sqrt{2}}{1} \qquad EX = d = 2r$$



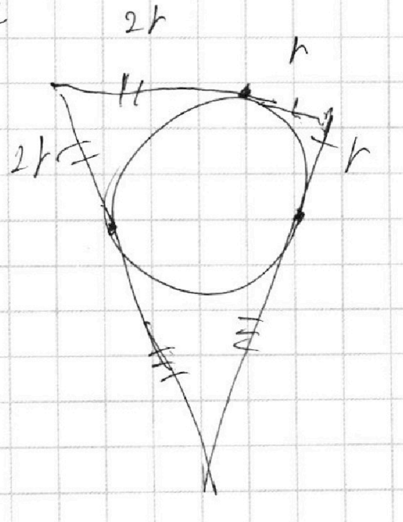
$\sqrt{2}(YF - XF) = 2r$

$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}(BC - r) - \sqrt{2}r\right) = 2r$

$2(BC - r) - 2r = 2r$

$BC - r = 2r$

$BC = 3r$



$(3r)^2 + (r + x)^2 = (2r + x)^2$

$9r^2 + r^2 + 2rx + x^2 =$

$= 4r^2 + 4rx + x^2$

$2rx = 9r^2 + r^2 - 4r^2$

$2rx = 6r^2 \qquad 2x = 6r^2$

$x = 3r$