



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$\Rightarrow db^2c : 3^{33} \cdot 7^{30}$$

$$bc : 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$db^2c : ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow db^2c : 3^{33} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow db^2c \geq 3^{33} \cdot 7^{42} \cdot \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow abc \geq \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b} \Rightarrow abc - \text{min при } d \text{ и } c \text{ min и } b - \text{max}$$

Тогда для минимизации abc берем b максимальным \Rightarrow

$$abc = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b}$$

$$ac = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{ac}$$

$$3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow 3^{10} = b^2 \Rightarrow b = 3^5$$

$$\Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

min значение.

$\Rightarrow dc - \text{min}$ при b max.

Ответ: $abc_{\text{min}} = 3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



из того, что дано следует:

~~Дано:~~ $\text{НОД}(a, b) = 1$; $\text{НОД}(a+b; a^2 - 9ab + b^2) = m$

Найти m .

Известно, что для любых чисел c и d верно:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) &= \text{НОД}(c, d) = \text{НОД}(c, \text{ост. от деления } d \text{ на } c) \\ &= \text{НОД}(a+b, 11b^2) \end{aligned}$$

Так как a и b взаимно-просты, то $a+b$ не делится ни на один простой множитель b и a

$$\begin{array}{r} d^2 + 9db + b^2 \quad | \quad a+b \\ \underline{d^2 + db} \quad \quad \quad | \quad a-10b \\ -10db + b^2 \\ \underline{-10db - 10b^2} \\ 11b^2 \text{ (ост.)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(a+b, b) = \\ &= \text{НОД}(a, b+d) \end{aligned}$$

\Rightarrow Число $(a+b)$ и b^2 - взаимно просты \Rightarrow

Ответ: $m = 11$.

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a+b, 11b^2) &\leq 11 \\ \text{(достигает 11 например при } a=b; b=5 \text{ тогда)} \\ \frac{6}{5} \text{-решок;} & \quad \frac{6+5}{36-270+25} = \\ &= \frac{11}{-209} \text{ (осток на 11)} = \\ &= \frac{1}{-19} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При помощи подстановки можно показать,
что $x = \frac{5}{6}$ будет ^{единственным} корнем уравнения:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - \frac{25}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = 5 - 5$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + 1 \frac{5}{6}} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + 1 \frac{5}{6}} = 0$$

$0=0$
верно.

~~$$\sqrt{(x - \frac{5}{6})(3x - \frac{5}{2}) + 3\frac{11}{12}} - \sqrt{\dots}$$~~

Ответ: $x = \frac{5}{6}$.

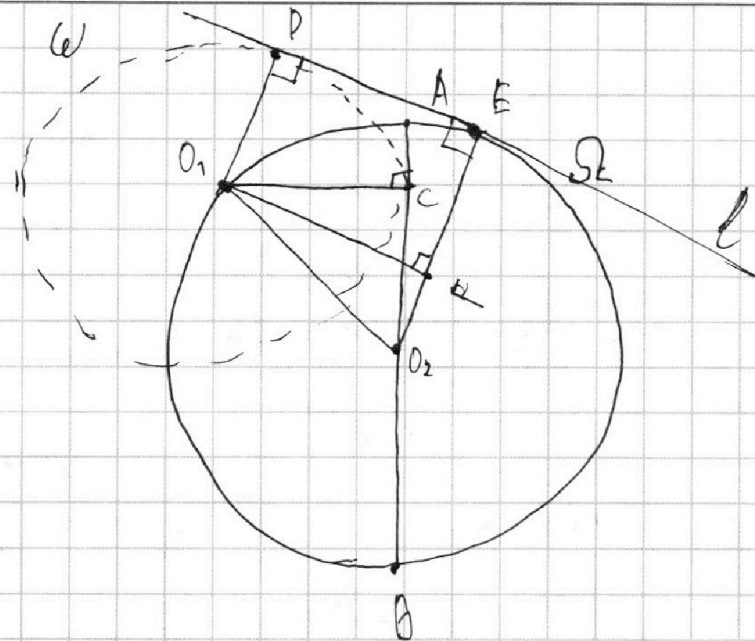
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть D и E - точки касания окружностей ω и Ω соотв. кр. l . Пусть O_1 и O_2 соотв. центры окр. ω и Ω .

Пусть радиус окр $\omega - R_1$ и радиус окр $\Omega - R_2$.
 П.к. AB диаметр, то $R_2 = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = 13$

$O_1 C \perp AB$ (как касат.)

$O_1 D \perp l'$ (как касат.)

$O_2 E \perp l$ (как касат.)

По м-му Пифагора:

$$O_1 C^2 = O_1 O_2^2 - O_2 C^2$$

$$O_1 C = \sqrt{(BC - R_2)^2 - R_2^2} =$$

$$= \sqrt{(BC - R_2)^2 - R_2^2} = \sqrt{144 - 169} =$$

$$= \sqrt{313}$$

$$O_1 C = \sqrt{R_2^2 - (BC - R_2)^2} =$$

$$= \sqrt{R_2^2 - (BC - R_2)^2} = \sqrt{169 - 144} =$$

$$= 5$$

ответ: $\sqrt{105}$.

$$R_1 = O_1 C = O_1 D = 5$$

Отсюда берем углы O_1 и $O_2 E$

$O_2 E \Rightarrow O_1 D E F$ - прямоуго.

$\Rightarrow O_1 D = F E \Rightarrow O_2 F = O E - F E =$

$$O_2 F = D E = R_2 - R_1 = 8$$

По м-му Пифагора:

$$D E = O_1 F = \sqrt{O_1 O_2^2 - O_2 F^2} = \sqrt{R_2^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть S - расстояние от А до В; V_m -
скорость ^{мотоцикла} велосипедиста; V_b - скорость
велосипедиста.

$$\begin{cases} \frac{S}{V_b} = \frac{S}{V_m} - 1 & (1) \\ \frac{V_m}{V_b} \cdot S - \frac{V_b S}{V_m} = 49 & (2) \\ \frac{S}{V_b+7} = \frac{S}{V_m+7} - \frac{36}{60} & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow (2) \text{ и } (4):$

$$\frac{V_m}{147 + (2S+21)V_m} \cdot S(2S-21)$$

$$1) S(V_b - V_m) = V_b \cdot V_m$$

$$3) 5V_m + 7S = 5V_b + 7S - \frac{3}{5}(V_b+7)(V_m+7)$$

$$S(V_b - V_m) = \frac{3}{5}(V_b+7)(V_m+7)$$

$$\Rightarrow 5V_b - V_m = 3V_b V_m + 21V_b + 21V_m + 147$$

$$2V_b V_m = \frac{21V_b + 21V_m + 147}{2}$$

$$\Rightarrow 2S(V_b - V_m) = 21V_b + 21V_m + 147$$

$$(2S-21)V_b - (2S+21)V_m = 147$$

$$V_b = \frac{147 + (2S+21)V_m}{2S-21} \quad (4)$$

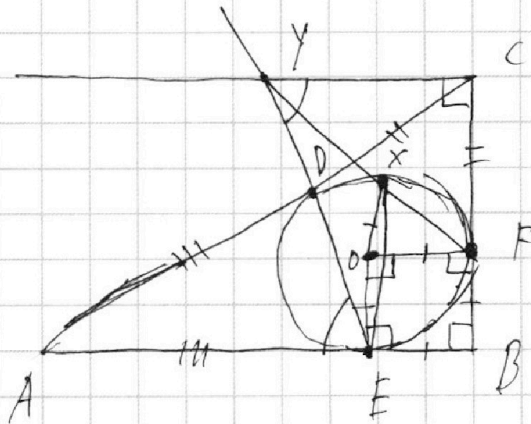
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Точка O - центр
окр ω ; r - ее радиус.

П.к. $\triangle ABC$ - прямоугольн.,
а ω внутр. окр., то

$$r = OD = OF = EB = BF; AE = AD; DC = CF.$$

$CY \parallel AB$, т.к. они перп. BC.

$\Rightarrow \angle DEA = \angle DYC$ - как накр.

$\triangle ADE$ - р.б $\Rightarrow \angle ADE = \angle AED$

$\Rightarrow \angle YDC = \angle AED = \angle ADE = \angle DYC$
как верш

$\Rightarrow \triangle YDC$ - р.б $\Rightarrow YC = DC = CF \Rightarrow$

$\triangle YCF$ - пр. с равными кат. $\Rightarrow YF$ - гипотенуза
 $\angle CYF = \angle CFY = 45^\circ$
 $= \sqrt{2} CF$; т.к. окр. внутр. в прямоугольн. \triangle

$\Rightarrow \angle EOF = \angle OFB = \angle FBE = \angle BEO \Rightarrow OF \parallel BE$

$\Rightarrow OF \parallel AB \parallel YC \Rightarrow \angle CYF = \angle XFO$ - как накр.
 $= 45^\circ$

$OX = OF = r \Rightarrow \triangle XOF$ - р.б $\Rightarrow \angle OFX = \angle XFO = 45^\circ$
 \Rightarrow следовательно $XF = \sqrt{2} r \Rightarrow YX = YF - XF = \sqrt{2} CF - \sqrt{2} r$

$\angle EOF = 90^\circ$ (центральный) $\Rightarrow \angle EXF = 45^\circ$ (как в. окр.). На той же дуге $\Rightarrow \angle EXF$ и $\angle OXF$ совп. $\Rightarrow EX$ - диаметр $\omega \Rightarrow EX = 2r$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(Трифурмение).

$$\text{По улу } EX = \sqrt{2} \times Y$$

$$\Rightarrow 2r = (\sqrt{2} (CF - \sqrt{2}h)) \cdot \sqrt{2}$$

$$2r = 2CF - 2h$$

$$2r = CF = CD$$

По м-ме Пифагора:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(AE + EB)^2 + (BF + CF)^2 = (AD + CD)^2$$

$$\stackrel{\approx AD}{(AE + r)^2} + (r + 2r)^2 = (AD + 2r)^2$$

$$AD^2 + 2ADr + r^2 + 9r^2 = AD^2 + 4ADr + 4r^2$$

$$2ADr = 6r^2$$

$$2AD = 6r$$

$$AD = 3r$$

$$\Rightarrow AD : DC = 3r : 2r = 3 : 2$$

Отвѣт: 3 : 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$$

$$25x^2 - z^2 - y^2 = 8z^2 + 6yz$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad (\text{возведем в } 6 \text{ квадратов})$$

$$\frac{xy}{8y+x} = \frac{2}{15} \quad 3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 25 - 60x + 36x^2$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} \quad | :2$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} \quad \text{избавимся}$$

П.к. функции стороны у нас корни, правая сторона, то она может принимать лишь квадратичные значения \Rightarrow левая тоже.

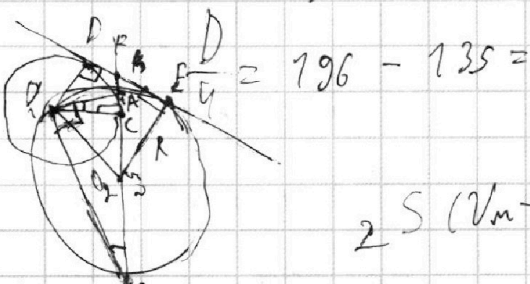
Рассмотрим функцию $f(x) = -15x^2 + 28x - 9$ (выражение слева)

$$-15x^2 + 28x - 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 6 \\ -3x^2 + 5x \\ \hline 6 - 2\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{r} x - \frac{5}{3} \\ 3x - 5 \\ \hline 6 - 2\frac{1}{2} \end{array}$$

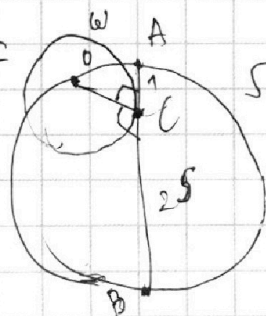
$$5S(V_M - V_B) = 3(V_B + 7)(V_M + 7)$$

$$2S(V_M - V_B) = 21V_M + 21V_B + 147$$



$$5S(V_M - V_B) = \left(\frac{3}{2} + 1\right)(21V_M + 21V_B + 147) \quad 5V_M V_B = 3V_B V_M + 21V_M + 21V_B + 147$$

$$2S(V_M - V_B) = \frac{21V_M + 21V_B + 147}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5}{\sqrt{b}} = \frac{5}{\sqrt{a}} - 1 \quad \frac{5}{\sqrt{b+7}} = \frac{5}{\sqrt{a+7}} - \frac{36}{\sqrt{60}}$$

$$3x^2 - 5x + 6 + \frac{5}{\sqrt{b}} - \frac{5}{\sqrt{a}} = 49 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)}$$

$$bc: 3^{19} \cdot 7^{17} \quad ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$abc \geq 3^{23} \cdot 7^{42}$$

Эти неравенства:

$$d^2 b^2 c^2 \geq 3^{32} \cdot 7^{72}$$

Мак как мы работаем с натуральными числами, то будем верно:

$$6x^2 - 4x + 7 - 25 - 60x - 36x^2 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = \sqrt{d^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} \quad x = \frac{32+y}{5}$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{d^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} \quad x = \frac{32+y}{5}$$

$$d - 9ab + b^2 = abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$$(32+y)(32-y) = 40y^2$$

$$\frac{d}{4} = \frac{196 - d + b}{270 < 0} = a - 10b + \frac{11b^2}{d+b}$$

$$d + b \equiv a^2 - 9ab + b^2 \pmod{m} + 11b^2$$

$$\text{НОД}(11b^2, a+b) = m \quad a+b + 9ab \equiv a^2 + b^2 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv (a+b)^2 - 11ab \pmod{m}$$

$$11ab \equiv (a+b)(a+b-1) \pmod{m}$$

$$\Rightarrow a+b \equiv \frac{(a+b)(a+b-1) - 11ab}{1} \pmod{m}$$

$$b = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots$$

$$a = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \dots$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$z = \frac{5x-y}{3} \quad \frac{8y+x}{xy} = \frac{75}{z}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45xy$$

$$15xy = \frac{8y^2 + 8x^2}{z} = \frac{2(8y^2 + 8x^2)}{z} = \frac{2(8y^2 + 8x^2)}{z}$$

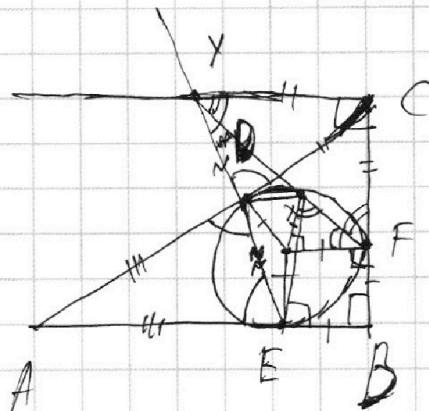
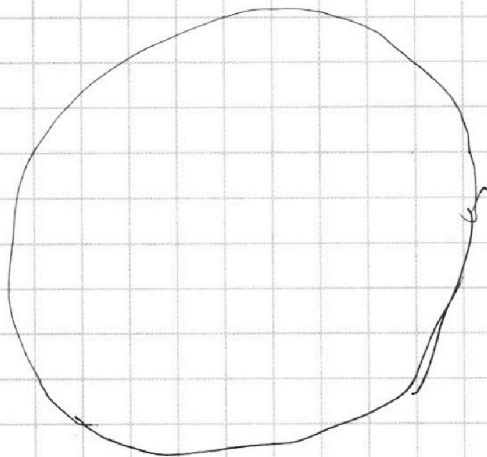
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

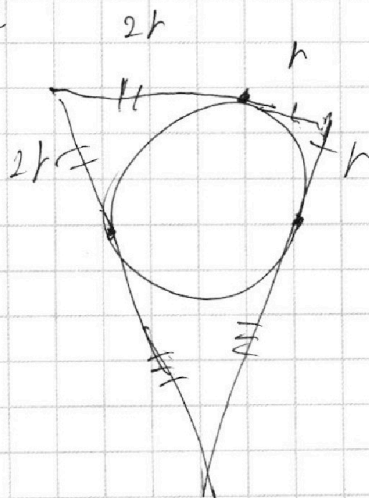
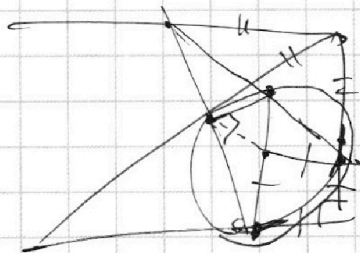


$$XF = \sqrt{2}r$$

$$YF = \sqrt{2}(BC-r)$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CF} = \frac{AB-r}{BC-r}$$

$$\frac{EX}{XY} = \frac{\sqrt{2}}{7} \quad EX = d = 2r$$



$$\sqrt{2}(YF - XF) = 2r$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}(BC-r) - \sqrt{2}r) = 2r$$

$$2(BC-r) - 2r = 2r$$

$$BC - r = 2r$$

$$BC = 3r$$

$$(3r)^2 + (r+x)^2 = (2r+x)^2$$

$$9r^2 + r^2 + 2rx + x^2 =$$

$$= 4r^2 + 4rx + x^2$$

$$2rx = 9r^2 + r^2 - 4r^2$$

$$2rx = 6r^2 \quad 2x = 6r \quad x = 3r$$