



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Давайте посмотрим на степени входящие чисел 2, 3, 5 в разложении на простые чисел a, b, c .

a_2, b_2, c_2 - степени входящие двойки в разложении на простые в чисел a, b, c соответственно

a_3, b_3, c_3
 a_5, b_5, c_5 } - определяются аналогично

Помимо, что степени входящие двойки в $ab \neq a_2 + b_2$
и если $ab: 2^6 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 6$

Аналогичным образом составим уравнения:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 16 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 + b_3 \geq 13 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \end{cases} \quad \begin{cases} a_5 + b_5 \geq 11 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

Сложим 3 кр-ва:

$$\begin{aligned} 2(a_2 + b_2 + c_2) &\geq 36 & 2(a_3 + b_3 + c_3) &\geq 59 & \cancel{2(a_5 + b_5 + c_5)} &\geq 52 \\ a_2 + b_2 + c_2 &\geq 18 & a_3 + b_3 + c_3 &\geq 30 & a_5 + b_5 + c_5 &\geq 26 \\ & & \text{(т.к. все числа четные)} & & a_5 + c_5 &\geq 28 \\ & & & & a_5 + c_5 + b_5 &\geq 28 \\ & & & & \text{(т.к. } b_5 \geq 0) & \end{aligned}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\Downarrow$$

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

При этом равенство достигается, если:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$Omb: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

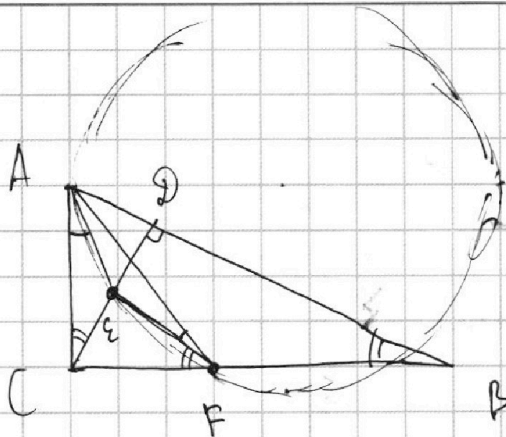
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

I) $\angle AFE = \angle CAE$ (угол между кас. и хордой)

II) $\angle EFC = \angle ABC$ ($EF \parallel AB$)
 $\angle ABC = \angle ACD$ (высота в пр. \triangle дополняет $\angle DCB$ до 90°)

$$\angle EFC = \angle ACE$$

III) Рассмотрим $\triangle AFC$. Рассмотрим окружности AFE и CFE . Заметим, что AC - общая касательная к этим двум окружностям ($\angle CFE = \angle ACE$; $\angle AFE = \angle CAE$), а EF - радиус этих двух окружностей.

Тогда EF проходит через середину AC (т.к. только у середины AC стелень откоситься к обоим окружностям будет одинаково)

EF проходит через середину AC и $\parallel AB \Rightarrow EF$ - средняя линия $\triangle ABC$.

IV) EF - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow EF$ - средняя линия $\triangle CDB$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4}$$

$$V) \frac{S_{CDB}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{AB - BD} \text{ (по усл. } AB = 1,4 BD) = \frac{BD}{0,4 BD} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$S_{CDB} = 2,5 S_{ACD}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$VI) \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{S_{CEF}}{2,5 S_{ACD}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\boxed{\text{Омб: } 1,6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{D) } \arccos(\sin x) = 3\pi - 2x$$

$$0 \leq \frac{3}{10}\pi - \frac{2}{10}x \leq \pi$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x$$

$$-\frac{9}{10}\pi \leq -\frac{2}{10}x \leq \frac{1}{10}\pi$$

$$\cos\left(\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x\right) = \sin x$$

$$\frac{9}{10}\pi \geq \frac{2}{10}x \geq -\frac{1}{10}\pi$$

$$\frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$3\pi \geq 2x \geq -\pi$$

$$\frac{8}{10}x = \left(\frac{5}{10} - \frac{9}{10}\right)\pi + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\frac{9}{2}\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{2}}$$

$$8x = -4\pi + 2\pi n$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

$$\text{Omb: } -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

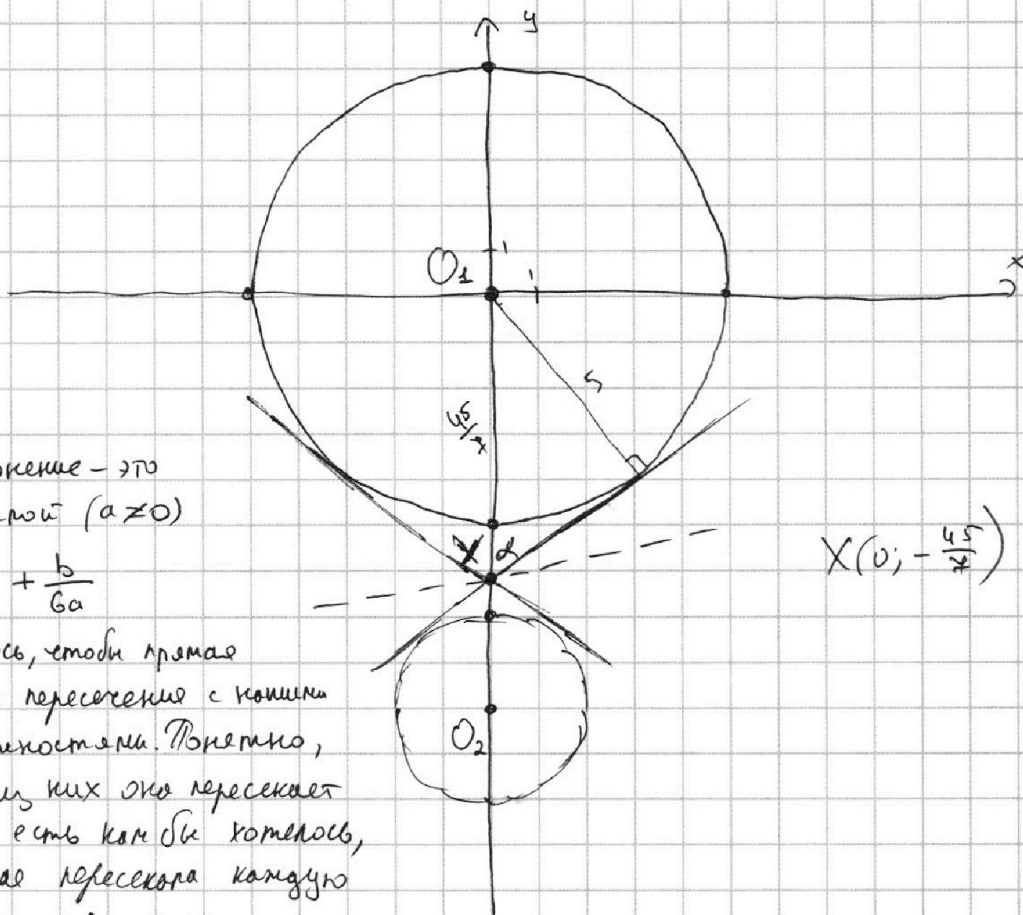
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что, если $a \neq 0$, то решение $1 \Rightarrow a \neq 0$

Теперь попробуем понять как выглядят решения второго уравнения на графике:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Это уравнения окружностей. Нарисуем их



А первое уравнение — это уравнение прямой ($a \neq 0$)

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Нам бы хотелось, чтобы прямая имела 4 точки пересечения с концами окружностей. Поскольку, что каждую из них она пересекает ≤ 2 раз, то есть как бы хотелось, чтобы прямая пересекала каждую окружность по два раза.

Выберем b так, чтобы (я рассматриваю случай произвольного $a \neq 0$ и смотрю подойдет или нет)

$$\frac{b}{6a} = -\frac{45}{7}$$

Тогда наша прямая пройдет через точку X на рисунке

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

Разберем два случая:

I) Наша прямая прошла между двумя касательными (как пунктирная прямая на рисунке). (или совпала с касательными) (рис. 5а)

Тогда поймем, что, меняя b , я могу только сдвинуть прямую вверх или вниз, не меняя угла наклона. Но тогда, сдвигая вверх, я точно не получу точек пересечения с нижней окружностью. Аналогично, сдвигая вниз

⇓

Такая прямая нам не подойдет.

II) Иначе, наша прямая пересекает и верхнюю, и нижнюю окружностью (именно пересекает, а не касается). То есть такие прямые нам подойдут.

PS: две общие внутренние касательные проходят через X , т.к.

$$\frac{O_1 X}{O_2 X} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\cancel{45}}{\cancel{45} - 5} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\cancel{45}}{63 - \cancel{45}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\cancel{45}}{18} = \frac{5}{2}$$

То есть существует гомотетия в т. X , переводящая одну окружность в другую \Rightarrow внутр. касательные проходят через X .

Осталось понять, какие прямые проходят там, где мне надо.

Тангенс угла наклона касательных равен:

$$\cancel{\frac{45}{7}} = \cancel{\frac{45}{7}} \quad \text{tg } \alpha \text{ (см. рис.)} = \frac{5}{\sqrt{\frac{45^2}{49} - 25}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{81 - 49}{49} \cdot 25}} = \frac{5 \cdot 7}{\sqrt{32} \cdot 5} =$$

$$\text{tg } (90 - \alpha) = \text{ctg } \alpha = \frac{\sqrt{32}}{7} \quad (\text{другой кас. соответствует } -\frac{\sqrt{32}}{7}) = \frac{7}{\sqrt{32}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мне нужно, чтобы угол наклона моей прямой удовлетворял пер.ву:

Ⓘ $-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$ $\left(-\frac{5}{6a} > 0\right)$ $-\frac{5}{6a} \neq 0$ экв.

ⓓ $-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$ $\left(-\frac{5}{6a} \leq 0\right)$

Ⓣ $-\frac{5}{6a} > 0$ $6a < 0$ $a < 0$

$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$

~~$\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$~~

~~$\frac{1}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{35}$~~

~~$\frac{1}{a} < -\frac{6\sqrt{32}}{35}$~~ $a < 0$

~~$1 < -\frac{6\sqrt{32}a}{35}$~~

~~$35 < -6\sqrt{32}a$~~

~~$\frac{35}{-6} < \sqrt{32}a$~~

~~$a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$~~

Ⓜ $-\frac{5}{6a} < 0$ $a > 0$

$-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$

$\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$

$\frac{5}{6} > \frac{\sqrt{32}a}{7}$ $a > 0$

$\frac{35}{6} > \sqrt{32}a$

$\frac{35}{6\sqrt{32}} > a$

Обл: $\left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

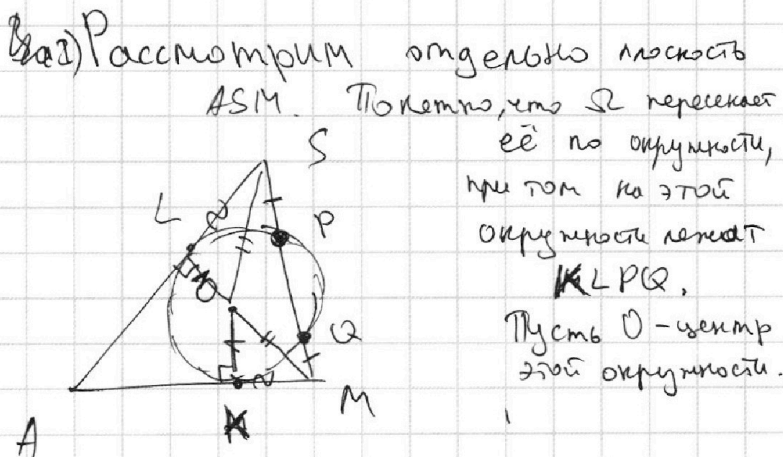
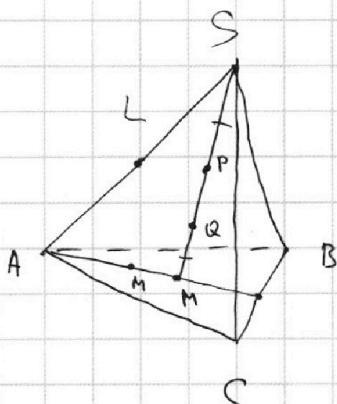
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н 4



Рассмотрим отрезок плоскость ASM . По условию, что Ω пересекает её по окружности, при том на этой окружности лежат L, P, Q , Пусть O - центр этой окружности.

I) $\Delta OKM \cong \Delta OLS$ $\Rightarrow O$ середина PQ
 $SP = MQ$

\Downarrow
 O на SM
 $OS = OM$

II) L и K точки касания Ω с AM и AS

\Downarrow
 $OL \perp AS; OL = OK$
 $OK \perp AM$
 $\Rightarrow \Delta OKM = \Delta OLS$ (по гипотенузе и катету)

$SL = MK$

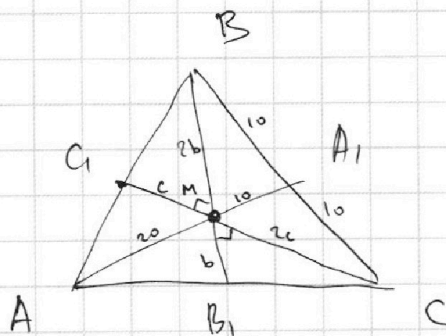
III) $AL = AK$ отрезки касательной

\Downarrow
 $2O = AS = AM$

Рассмотрим плоскость ABC

$AM = 20 \Rightarrow MA_1 = \frac{20}{2} = 10$ (т.к. медиана τ делится $2:1$)

\Downarrow
 $BA_1 = CA_1 = MA_1 = 10$
 $\Rightarrow BC = 20$



$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$ медиана равна половине гипотенузы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17 (продолжение)

$$S_{ABC} = S_{AB_1C_1} + S_{C_1MB_1} + S_{B_1MC_1} + S_{C_1MB_1} + S_{B_1MC_1}$$

пусть $BB_1 = 3b$
 $CC_1 = 3c$

$$S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC} + \frac{bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{4bc}{2}$$

(площадь прямоугольного Δ)

$$\frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{9bc}{2}$$

$$\frac{3}{2} S_{ABC} = 9bc$$

$$\frac{3}{2} \cdot 180 = 9bc$$

$$30 = bc$$

a) нас интересует значение выражения:

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 3b \cdot 3c = 270bc = 270 \cdot 30 = 8100$$

$$\boxed{0 \text{ мб : } 8100}$$

8)

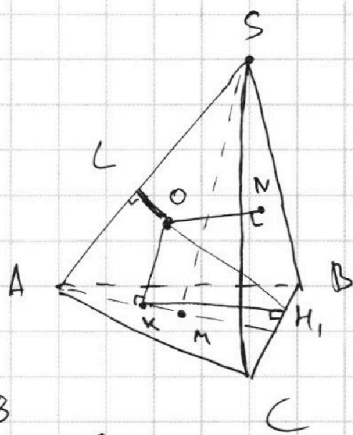
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$R=8$
 $BC=20=AS$
 $SM=6$

реш

Сразу заметим, что O (центр Σ)
лежит на биссекторной плоскости
двуугольного угла при ребре BC
(т.к. Σ касается BC и ABC)

$$I) SO^2 = ON^2 + SN^2 \text{ (т. Пифагора в } \triangle SON)$$

$$SO^2 = 8^2 + 6^2$$

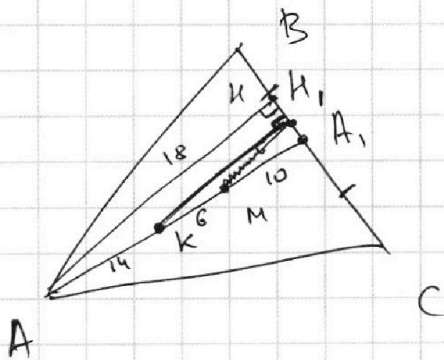
$$SO = 10$$

$$SL^2 = SO^2 - OL^2 \text{ (т. Пифагора в } \triangle SLO)$$

$$SL^2 = 10^2 - 8^2$$

$$SL = 6$$

Как мы уже доказали в пункте а; $SL = KM$ и $\triangle AMC$ -равнобедренный



AH - высота $\triangle ABC$

$$\frac{AH \cdot BC}{2} = S_{ABC}$$

$$\frac{AH \cdot 20}{2} = 180$$

$$AH = 18$$

KH_1 - перпендикуляр из K на BC

$\triangle KH_1A_1 \sim \triangle AKA_1$ ($KH_1 \perp BC$ и $AH \perp BC$)

$$\frac{KH_1}{AH} = \frac{KA_1}{AA_1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{по пункту а) } AA_1 = 30 \\ A_1M = 10 \\ AM = 20 \end{array} \right)$$

$$KH_1 = 18 \cdot \frac{16}{30} = \frac{48}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.ф. (продолжение)

K - перпендикуляр из O на ABC

KH_1 - перпендикуляр из K на BC

\Downarrow

OH_1 - перпендикуляр из O на BC (по ТТП)

$OH_1^2 = OK^2 + KH_1^2$ (т. Пифагора $\triangle OKH_1$)

$$OH_1^2 = 64 + \frac{48^2}{25} = \frac{64 \cdot 25 + 2^8 \cdot 3^2}{5^2} = \frac{2^6 \cdot 5^2 + 2^8 \cdot 3^2}{5^2} = \frac{2^6(25 + 36)}{5^2} =$$
$$= \frac{2^6 \cdot 61}{5^2}$$

$$OH_1 = \frac{8}{5} \sqrt{61}$$

$$\sin \angle OH_1K = \frac{OK}{OH_1} = \frac{8}{\frac{8}{5} \sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\angle OH_1K = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

Двуугольный угол, который мы ищем в два раза больше,
т.к. O лежит на биссектрисе плоскости ABC и SBC

$$\text{Отв: } 2 \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

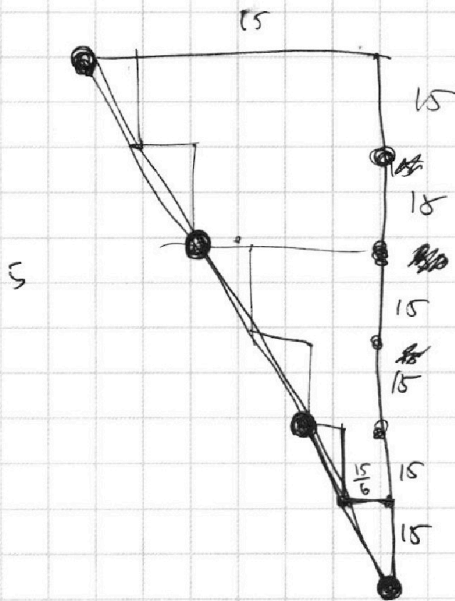
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

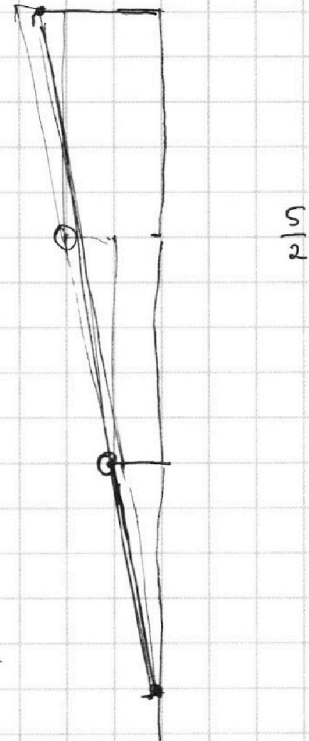
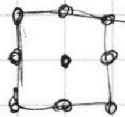
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



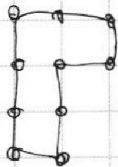
Человек



$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ \hline 9 \ 1 \end{array}$$

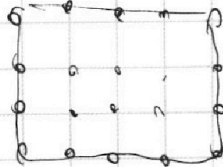
$$1 + \frac{8}{2} - 1$$

$$3 + \frac{1}{2} - 2$$



$$0 + \frac{10}{2} - 1$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 17 \\ 90 \\ \hline 1530 \end{array}$$



$$6 + \frac{14}{2} - 1 = 12$$

$$\frac{3 \cdot 18 + 2 + 2 + B - 1}{2} = 17 \cdot 90$$

$$20 + B - 1 = 1530$$

$$B - 1 = 1510$$

$$B = 1511$$



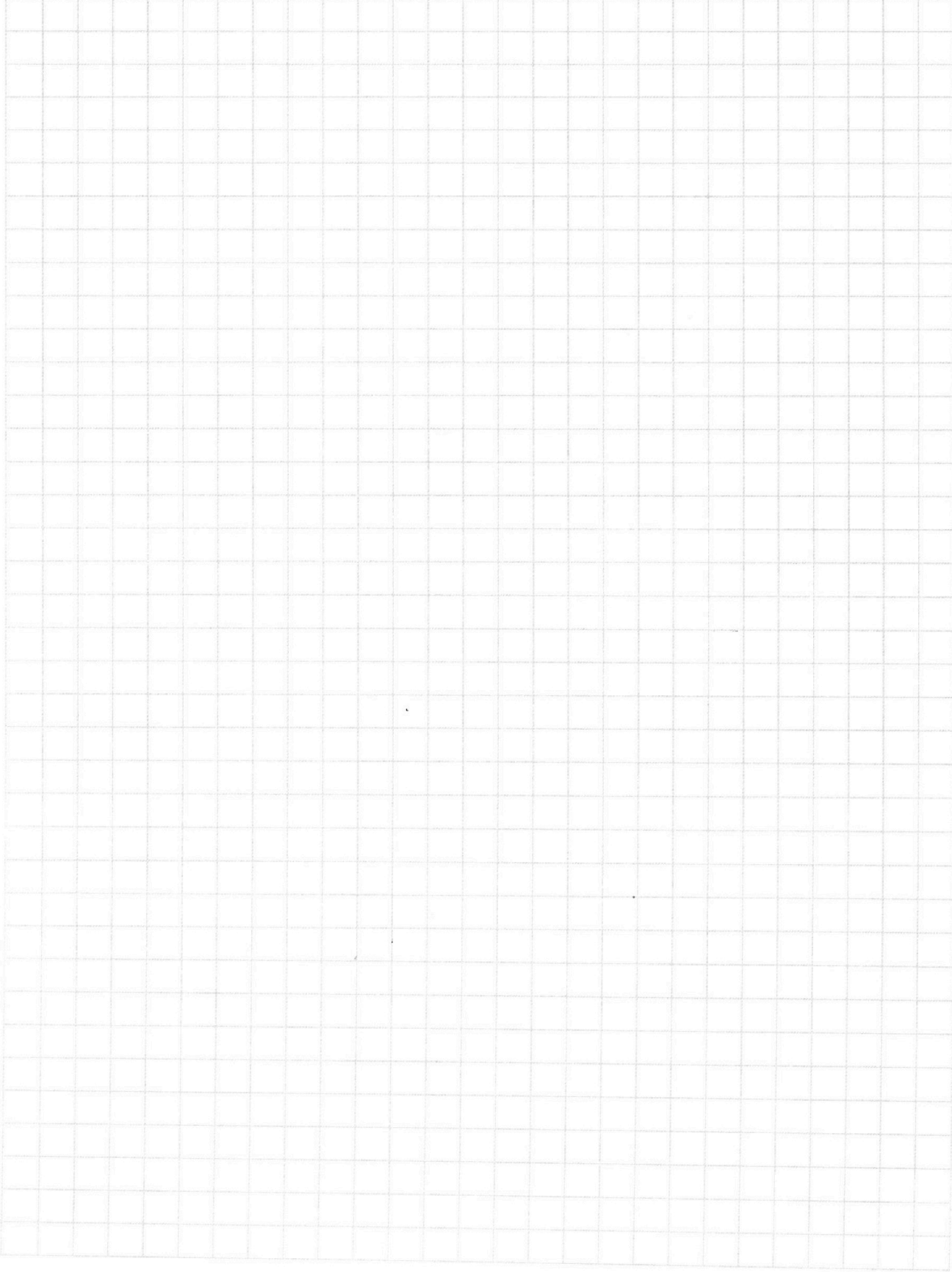
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



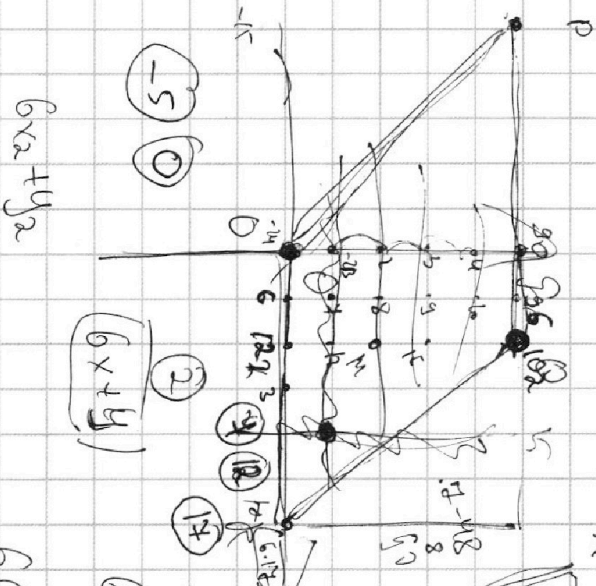
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

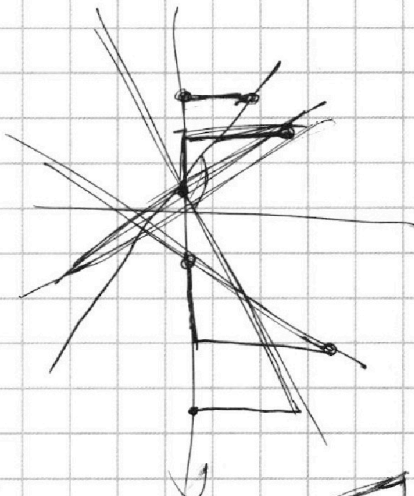
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\rightarrow 0$
 $\rightarrow 90$
 $\rightarrow 180$
 $\rightarrow 270$



$6x_2 + 4y_2$

$(6x + 4y)$

$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 4x_2$

$6x_2 -$

$5y_2 = 6 \cdot 12$

$\frac{1}{t^4} - 6t = -\frac{2}{3}t - 5$
 $-6t + 5 = -\frac{2}{3}t - 5$
 $16t - 5t + 4 - 8 = 0$

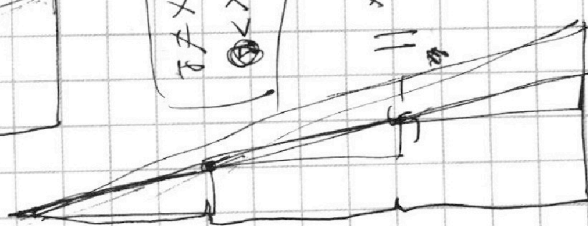
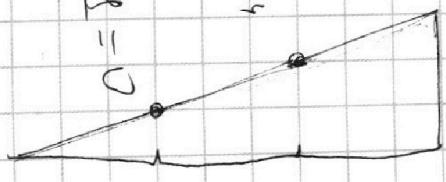
$(6 - \frac{2}{3})t^5 - 5t^4 - 8 = 0$
 $\frac{16}{3}t^5 - 5t^4 - 8 = 0$

$x > 0$
 $x \neq 1$

$\frac{1}{\log_x 11} - 6 \log_x 11 = \frac{2}{3} \log_x 11$
 $\log_x 11 = X$
 $11^X = X$

$\log_x 11 = X$
 $\frac{1}{\log_x 11} = \frac{1}{X}$

$\log_x 11 = X - 6 \log_x 11 = \log_x 11^{\frac{1}{21} - 5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Зб, что

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 44) = 0 \end{cases}$$

$$6ay = b - 5x$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$a=0$$

4реш.

$$5x - b = 0$$

$$x = \frac{b}{5}$$

пересекает

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot 9y + 9^2$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$\frac{35}{49}$$

$$\frac{44}{35} - \frac{45}{49}$$

кас.

$$x^2 + y^2 - 25$$

$$\sqrt{\frac{45^2}{49} - 25} =$$

$$= \sqrt{\frac{81 \cdot 25 - 25 \cdot 49}{49}} = \sqrt{\frac{25(81-49)}{49}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 32}}{7} = \frac{5}{7} \sqrt{32}$$

$$\frac{a}{9-a} = \frac{5}{2}$$

$$2a = 45 - 5a$$

$$7a = 45$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{2} \quad a = \frac{5}{2}b$$

$$a+b =$$

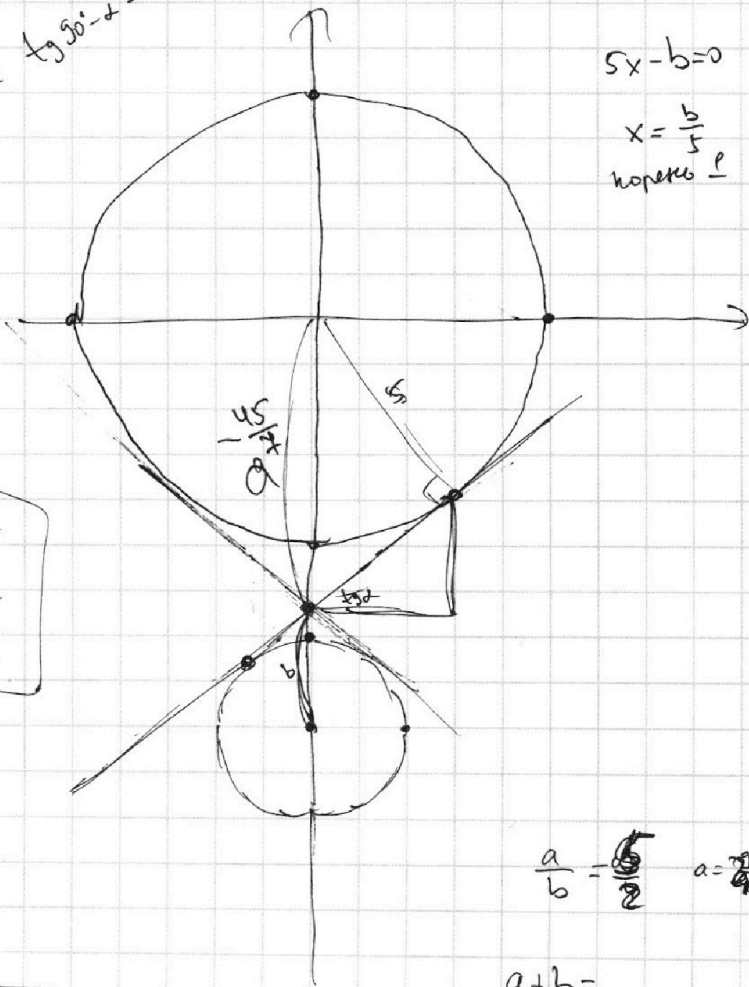
$$\frac{5}{2}b + b = \frac{7}{2}b =$$

$$3,5b = 9$$

$$b = \frac{18}{7}$$

$$a = \frac{5}{2} \cdot \frac{18}{7} = \frac{45}{7}$$

$\tan \alpha = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

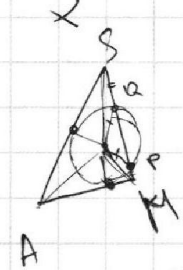


$$h = \frac{\sqrt{10} - k + l}{\sqrt{15}}$$

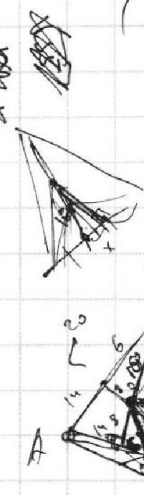
$$x = \frac{\sqrt{15}k}{\sqrt{10} - k + k}$$

$$x = \frac{\sqrt{35}k}{\sqrt{10} - k + k} = \sqrt{\frac{7}{2}} k$$

$$h = \frac{\sqrt{15}k}{\sqrt{10} - k}$$



$$a + b = \sqrt{15}x$$



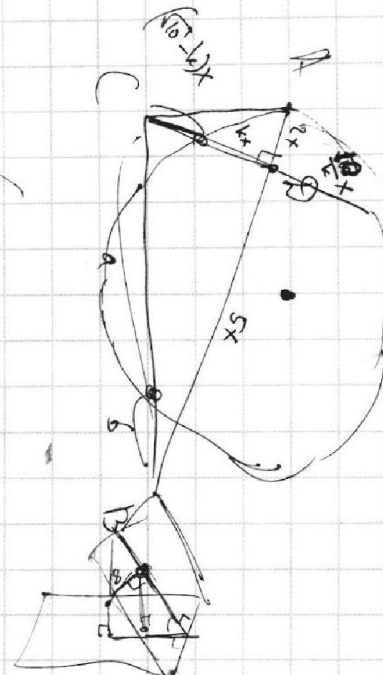
$$ab =$$

$$\left(\frac{\sqrt{10} - k}{k}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{2}} k\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{2}} k\right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{10} - k}{k}$$

$$BC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$$

$$CD = \sqrt{10}x$$



$$\frac{5bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{180}{4} = 180$$
$$\frac{5bc}{2} = \frac{3}{4} \cdot 180$$
$$bc = \frac{60}{2}$$

$$\frac{5x}{x} = \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{7}{2}} k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x \leq \pi$$

$$-\frac{9}{10}\pi < -\frac{2}{10}x < \frac{1}{10}\pi$$

$$\frac{9}{10}\pi > \frac{2}{10}x > -\frac{1}{10}\pi$$

$$9\pi > 2x > -\pi$$

$$\frac{9}{2}\pi > x > -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi = 1.5\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\pi}{10} \cdot \frac{9}{10}\pi - \frac{2}{10}x = \sqrt{\frac{\pi}{10}}$$

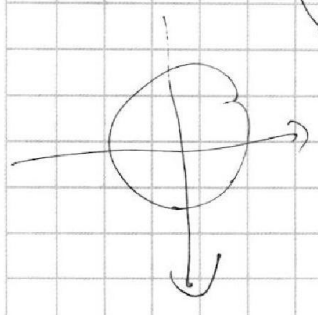
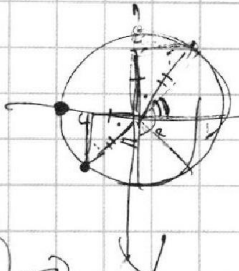
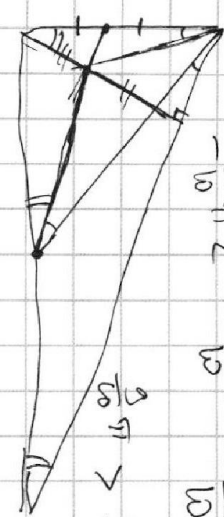
$$\# x = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{8}{10}x = \frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\pi$$

$$\frac{8}{10}x = \pi \left(\frac{5}{10} - \frac{9}{10} \right)$$

$$8x = \pi(-4)$$

$$2x = -\pi$$



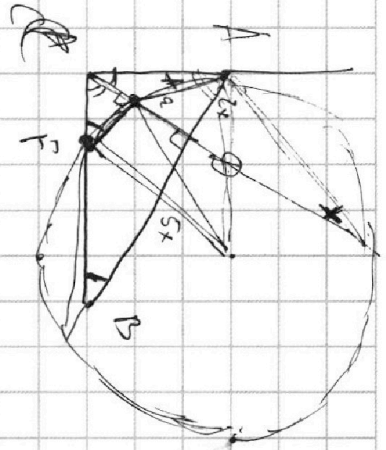
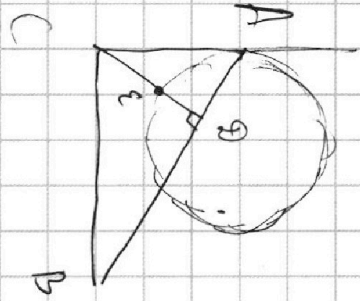
10π = 10π

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = \sqrt{2}BD$$

$$AD + BD = \sqrt{2}BD$$

$$AD = 0,4BD \quad \left(\sqrt{10}b - \sqrt{10} \left(\frac{x}{\sqrt{k}} \right)^2 \right)$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\sqrt{10}b}{\sqrt{k}} - \sqrt{k\sqrt{10}} \right) x^2$$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{10}b - \sqrt{k}) \cdot b k x = \\ & = \sqrt{2} \sqrt{k\sqrt{10}} - \sqrt{2} k^2 \\ & \sqrt{2} (\sqrt{k\sqrt{10}} - \sqrt{2} k^2) \end{aligned}$$

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$

$$CD^2 = BC^2 - BD^2$$

$$2CD^2 = AC^2 + BC^2 - AD^2 - BD^2$$

$$4CD^2 = AB^2 - AD^2 - BD^2$$

$$2CD^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot AD - AD^2 - BD^2$$

$$2CD^2 = 2BD \cdot AD$$

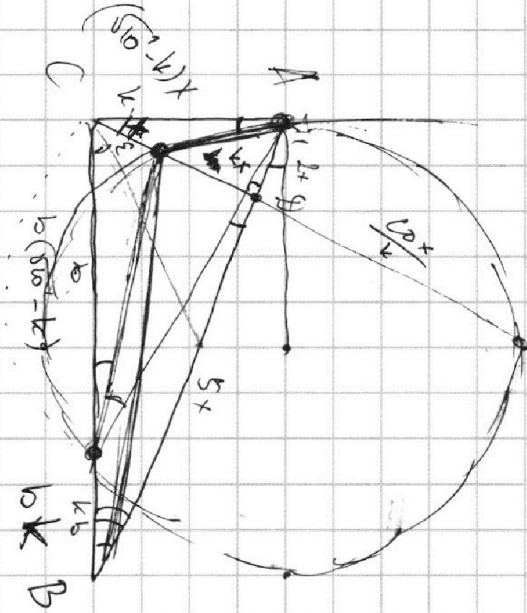
$$CD^2 = BD \cdot AD$$

$$\left(\sqrt{10}^2 - k \right) x^2 \cdot x \left(\sqrt{10} - k + k + \frac{10}{k} \right) = \left(\sqrt{10} x - kx \right) \left(x\sqrt{10} + \frac{10x}{k} \right) = 10x^2 - k\sqrt{10}x^2 + \frac{10 \cdot 10x^2}{k} - 10x^2$$

$$? = \frac{10x^2}{k} = \frac{10x}{k}$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$kx \cdot ? = 10x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c - коэф.
 $a, b, c: 2^6 \cdot 3^{15} \cdot 5^{11}$
 $b, c: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$
 $a, c: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3
a_5	b_5	c_5

$a_2 + b_2 \geq 6$
 $b_2 + c_2 \geq 14$
 $a_2 + c_2 \geq 16$

$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 36$
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$

$a_2 + b_2 = 6$
 $b_2 + c_2 = 14$

$a_2 + c_2 - a_2 = 8$
 $c_2 = a_2 + 8$

$a_2 + a_2 + 8 = 16$
 $2a_2 = 8$
 $a_2 = 4$

$b_2 = 2$
 $c_2 = 12$

$a_2 + b_2 + c_2 = 18$

$a_5 \neq b_5$
 $c_3 - a_3 = 8$
 $c_3 = a_3 + 8$

$2a_3 + 8 = 25$
 $2a_3 = 17$
 $a_3 = 8$
 $b_3 = 4$
 $c_3 = 12$

$a_5 - a_5 = 2$
 $2a_5 + 8 = 28$
 $2a_5 = 20$
 $a_5 = 10$
 $b_5 = 0$
 $c_5 = 14$

$a_5 = c_5 = 14$
 $b_5 = 0$

$11 + 13 + 28 = 52$
 $\frac{52}{24}$

$13 + 21 + 25 = 59$
 $\frac{59}{34}$

30