



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть  $a_2$  - макс. степень двойки, входящая в число  $a$ . Аналогично:  $a_3; a_5; b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5$ .

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_5 + b_5 \geq 10 \end{cases} \quad (\text{все натур. или } 0)$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow \begin{cases} b_2 + c_2 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases}$$

$$ac: 2^{13} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$$

Сложив все получим:

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53 \end{cases}$$

Вспомним, что все числа натуральные или равны нулю:

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_2 + b_2 + c_2 &\geq 21 \\ a_3 + b_3 + c_3 &\geq 21 \text{ но } a_3 + b_3 + c_3 &\geq 27 \text{ но } a_3 + b_3 + c_3 &\geq 27 \\ a_5 + b_5 + c_5 &\geq 27 \text{ но } a_5 + b_5 + c_5 &\geq 27 \text{ но } a_5 + b_5 + c_5 &\geq 27 \end{aligned}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\Rightarrow abc: 2^{21} 3^{21} 5^{30} \quad abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

$\Rightarrow$  меньше этого числа быть не может.

При этом  $a, b, c$  удовл. этому существуют:

$$a = 2^7 3^7 5^{15} \quad b = 2^2 3^3 \quad c = 2^{12} 3^{11} 5^{15}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$\triangle ADC \sim \triangle EFC$  по двум равным  
углам.

Также

$\triangle ADC \sim \triangle ADB \sim \triangle ACB$  по двум равным углам.

$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ADB \sim \triangle ACB \sim \triangle EFC$$

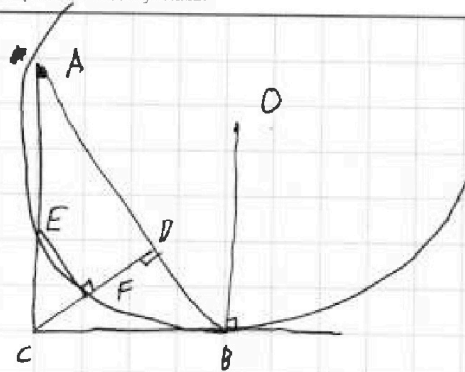
$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3} \cdot a \quad \text{где } BD = a$$

$$\Rightarrow \angle CAB = 30^\circ \quad \angle CBA = 60^\circ \Rightarrow \angle CEF = 30^\circ$$

$$BC = 2a$$

$$AC = 2\sqrt{3}a$$

$$\begin{aligned} S_{FEC} &= \left( \frac{EC}{2\sqrt{3}a} \right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{EC^2}{2\sqrt{3}a} \cdot \frac{3}{4} a = \\ &= EC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3.  $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

По области определ.  $\arcsin \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$  по ОДЗ.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin\left(\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{3}{5}x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}\pi\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{\pi}{5} = \pi n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}n & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi + \frac{5}{2}k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \geq -3\pi \\ \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi + \frac{5\pi k}{2} \geq -3\pi \\ 2\pi + \frac{5\pi k}{2} \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \geq -2 \\ n \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \geq -\frac{2}{5} \text{ no } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \geq 0 \\ k \leq 0 \end{cases}$$

$$n \in \{-2; -1; 0; 1\} \quad k \in \{0\}$$

$$x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\} \cup \{2\pi\}$$

Ответ:  $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

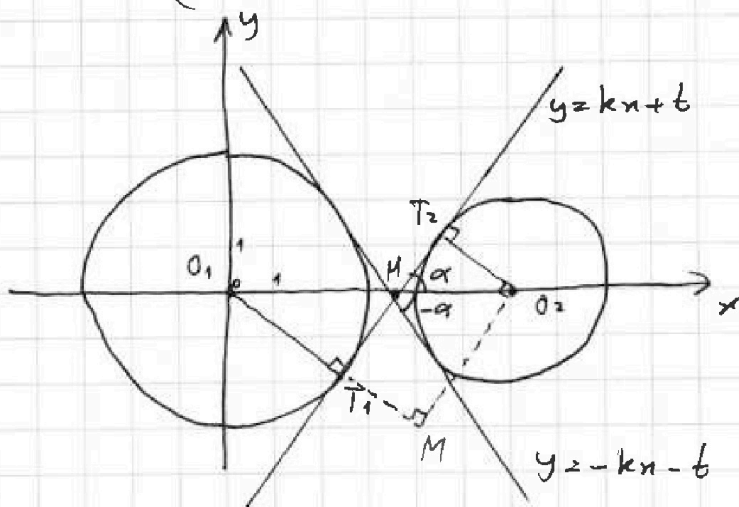
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Торча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b & \text{— линейная ф-я (прямая)} \\ \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases} & \left. \begin{array}{l} \text{уравн. окружн. с рад. 3 и 2} \\ \text{и центрами в} \\ (0;0) \text{ и } (6;0) \end{array} \right\}$$



Заметим, что любая прямая пересекающая две окружности сразу будет тангенсна иметь угол с  $O_1$  меньше, чем две касательные, показанные на графике.

$k$ -я  $y = kx + b$  образует с  $O_1$  угол  $\alpha$   
 По св-ву кас-и линейной ф-ии  $k = \operatorname{tg} \alpha$   
~~Также~~  $\operatorname{tg} \angle T_2 M O_2 = \alpha \Rightarrow \angle O_1 M T_1 = \alpha$  т.к. эти углы накрест лежащие. из  $\Delta O_2$  опустим перпендикуляр на прямую  $O_1 T_1$  в т.  $M$

$$\Rightarrow O_2 M \parallel M T_1 \Rightarrow \angle O_1 M T_1 = \angle O_1 O_2 M = \alpha$$

$$T_1 M = T_2 O_2 = 2 \quad O_1 T_1 = 3 \Rightarrow O_1 M = 5$$

$$O_1 O_2 = 6 \Rightarrow \text{по ПП Пифагора } O_2 M = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1 M}{O_2 M} = \frac{5}{\sqrt{11}} = k$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 4.

Рассмотрим  $y = -\frac{a}{2} + \frac{3}{2}b$

~~Мы выясним~~

угол этой прямой с  $Ox$  ~~на~~  
меньше чем  $\alpha$ , если она пересекает  
обе окр-сти.

$$-\operatorname{tg} \alpha \leq -\frac{a}{2} \leq \operatorname{tg} \alpha$$

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} \leq -\frac{a}{2} \leq \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} \leq a \leq \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Отвизно, что любая прямая проходящая  
через точку пересеч. касат.  $H$ , пересекает  
окружность в двух точках. (см. рисунок),  
если  $a \in (-\operatorname{tg} \alpha; \operatorname{tg} \alpha)$

Также для каждого такого  $a$  найдётся  
число  $b$ , ~~т.к.~~ все прямые, проходящие  
через  $H$  под углами  $\in (-\alpha; \alpha)$  с  $Ox$ , имеют  
свою запись в виде  $y = kx + t$ .

Ответ:  $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. 
$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^2(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

Решим  $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5 \log_3^2 x - 8}{2 \log_3 x}$$

Положим  $a = \log_3 x$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5a^2 - 8}{2a} - 8 \quad | \cdot 2a \quad (a \neq 0 \text{ по ОДЗ})$$

$$2a^5 + 12 = 5 - 16a$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$f(a) = 2a^5 + 16a + 7 \quad f'(a) = 10a^4 + 16$$

$$f'(a) > 0 \text{ всегда}$$

$\Rightarrow$  у  $f(a)$  не более одного корня.

Заметим, что  $f(-1) < 0$ ,  $f(0) > 0$  и  $f(a)$  возрастает.

$\Rightarrow$  у  $f(a)$  есть один корень  $a \in [-1; 0]$

Рассмотрим  $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^2(3^{11}) - 8$

Положим  $b = \log_3 5y$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \quad | \cdot 2b \quad (b \neq 0 \text{ по ОДЗ})$$

$$2b^5 + 4b - 11 = 0$$

$$g(b) = 2b^5 + 4b - 11$$

$$g'(b) = 10b^4 + 4 > 0 \text{ всегда}$$

$\Rightarrow$   $g(b)$  возрастает.

$\Rightarrow$  у  $g(b)$  не более одного корня.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $g(0) < 0$ ,  $g(1) > 0$  и  $g(b)$  возрастает.  
 $\Rightarrow$  у  $g(b)$  есть <sup>только</sup> один корень и  $b \in [0; 1]$

Рассмотрим сумму двух уравн.

$$2a^5 + 16a + 7 + 2b^5 + 16b - 7 = 0$$

$$a^5 + b^5 + 8(a + b) = 0$$

$$(a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} a + b = 0 \\ (a^4 - a^3b + 8) + (a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0 \end{array} \right.$$

Заметим, что  $a^4 - a^3b + 8 > 0$ , т.к.  $a \in [0; 1]$   
и  $b \in [0; 1]$

Также заметим, что у второй скобки:

$$D = b^4 - 4b^4 = -3b^4$$

$D < 0$   $D \not\rightarrow 0$  при  $b \neq 0$ ; при  $b = 0$   $a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 0$

При этом <sup>отрицательный</sup> коэф.  $b^2 > 0 \Rightarrow a^2b^2 - ab^3 + b^4 > 0$

$$\Rightarrow a^4 - a^3b + 8 + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \neq 0$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3(5y) = 0$$

$$\Rightarrow \log_3(5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: 0,2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

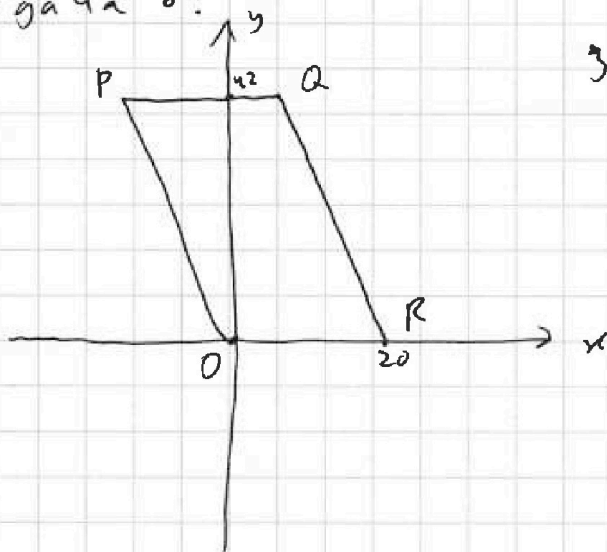
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$\text{П-ть } \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Тогда

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_1 + \Delta x; y_1 + \Delta y)$$

Тогда

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta y = -3\Delta x + 33$$

Тогда

от

точки A

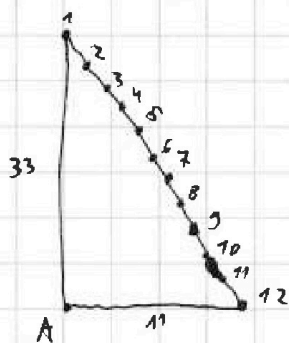
точки B

можно располо-

жить

след.

образом:



12 возможных расположений т. B на гипотенузе треуг. с катетами 33 и 11

Заметим, что эта гипотенуза будет параллельна долевой стороне пар-ма

Тогда остаётся лишь посчитать кол-во точек B для каждой области расположения т. A.

Заметим, что на  $y_1: 3$  мы можем расположить т. A. внутри параллелограмма так, чтоб для т. B было место 10 способами.

( $20 - 11 + 1 = 10$ )  
A при  $y_1: 3$  всего 9

Также начинаем с  $y_1 = 10$  уменьшаются...

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи номер 6.

... уменьшаются не все 12 точек, а  
их кол-во уменьшается на 1 каждые 3  
значения  $y_i$

Тогда в итоге кол-во точек:

$$10 \cdot 12 + (10 + 9 + 9)(12 + 12 + 12 + 11 + 10 + \dots + 1) =$$
$$= 120 + 28 \cdot 102 = 120 + 2856 = 1976$$

Ответ: 1976

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

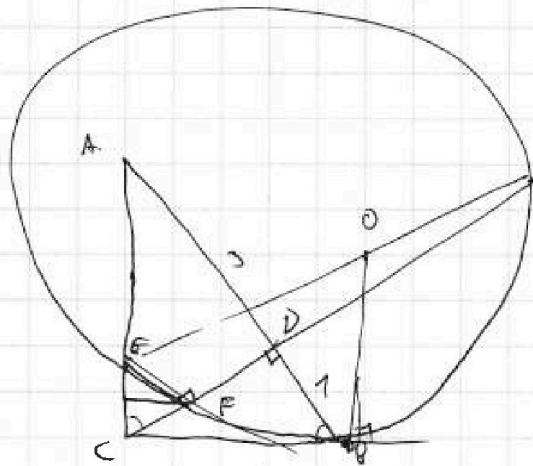
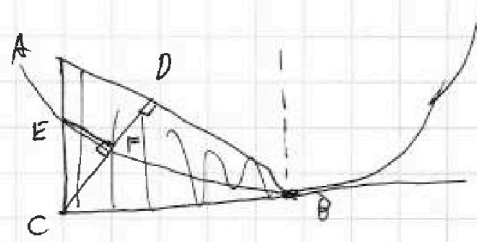
1

$$\begin{aligned}
 ab &: 2^9 3^{10} 5^{10} \\
 bc &: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\
 ac &: 2^{19} 3^{13} 5^{30} \\
 abc &: 2^{15} 3^{17} 5^{30}
 \end{aligned}$$

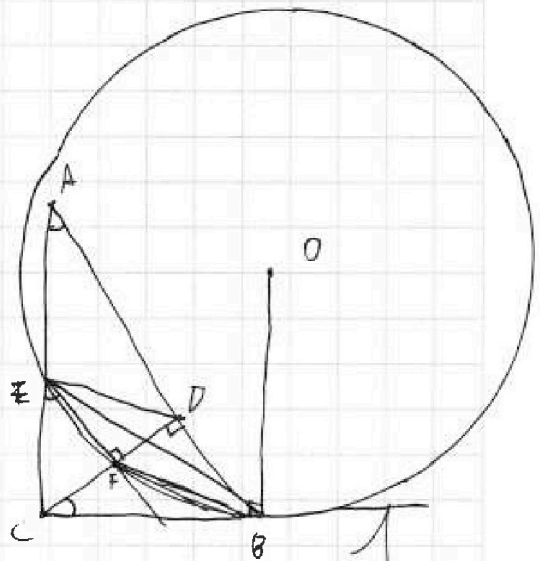
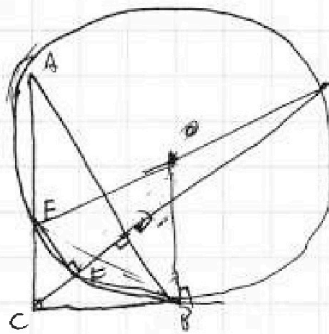
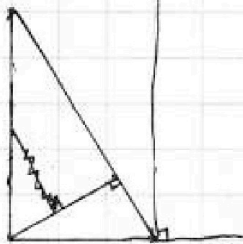
$$\begin{cases}
 a_2 + b_2 \geq 9 \\
 b_2 + c_2 \geq 14 \\
 c_2 + a_2 \geq 19
 \end{cases}
 \quad
 \begin{aligned}
 a_2 &= 7 \\
 b_2 &= 2 \\
 c_2 &= 12
 \end{aligned}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

2



$$\begin{aligned}
 AC &= 2\sqrt{3} \\
 BC &= \sqrt{3} \\
 AB &= 4
 \end{aligned}$$



$$\frac{EC \cdot h}{2} = \frac{EC^2 \sqrt{3}}{8} \quad a \quad c$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EC}{a}$$

1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3

$$5 \arcsin(\cos x) = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{OДЗ: } \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{OДЗ: } \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \in [-3\pi; 2\pi] \quad \text{A} \rightarrow x$$

~~$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \cos x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$~~

$$(a) \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \quad \text{при } x \in [0; \pi] \quad n \in \mathbb{Z}$$

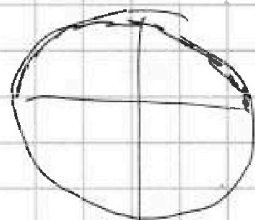
$$(b) \arcsin(\cos x) = \pi - \frac{x}{2} + 2\pi n \quad \text{при } x \in [-\pi; \pi] \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a) \quad x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{входит в OДЗ}$$



4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

2 л.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + \frac{6 \log_3^4 x}{\log_3 x} = \frac{11}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2 \log_3^4 (5y)}{\log_3 5y} = \frac{11}{2 \log_3 5y} - 8$$

						1					
					1	1					
					1	2	1				
					1	3	3	1			
					1	4	6	4	1		
					1	5	10	10	5	1	
											-8

$$(\frac{11}{2} - 8) a = -3,5$$

$$\log_3^5 x + \frac{3,5}{2} = \frac{11}{2} - 8 \log_3 x$$

$$\log_3^5 (5y) + \frac{3,5}{2} = \frac{11}{2} - 8 \log_3 5y$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 (5y) = -8 (\log_3 x + \log_3 5y)$$

$$\log_3 x + \log_3 (5y) = a \quad \log_3 x \cdot \log_3 (5y) = b$$

$$(\log_3 x + \log_3 5y) (\log_3^3 x - \log_3^3 x \cdot \log_3 5y + \log_3^2 x \cdot \log_3 5y - \log_3 x \cdot \log_3^2 5y + \log_3^2 5y) = -8 (\log_3 x + \log_3 5y)$$

$$a (\log_3^3 x - \log_3^3 5y) = \frac{3,5}{\log_3 x} - \frac{3,5}{\log_3 5y}$$

a)  $5y = x -$

б)

$$\frac{3,5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y}$$

h.r.

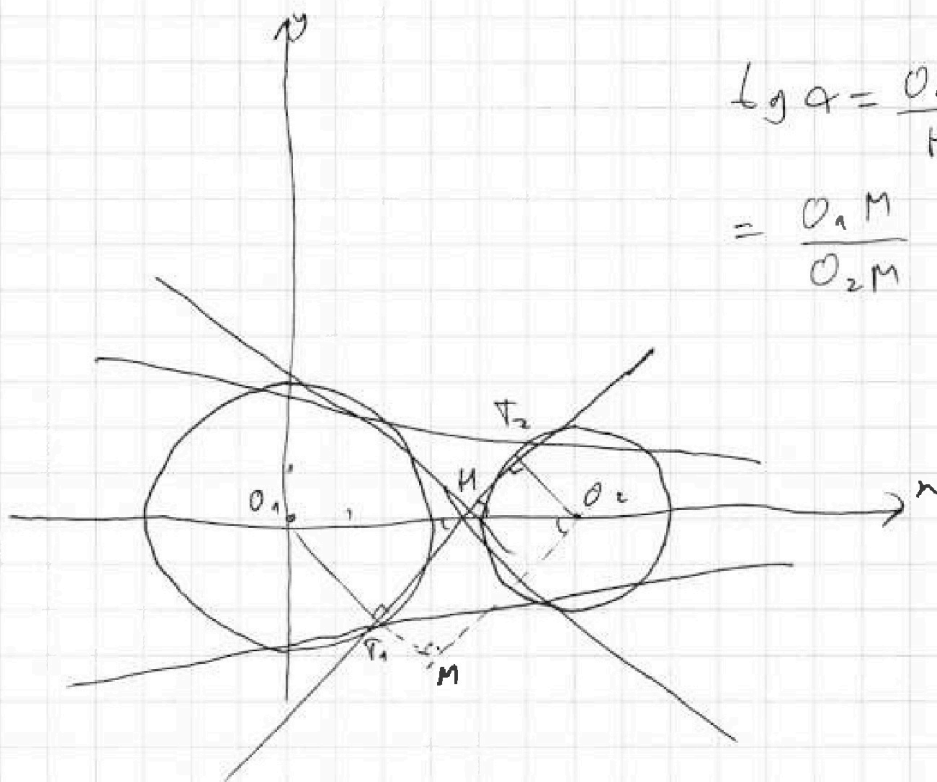
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \lg a &= \frac{O_1 P_1}{M P_1} = \frac{O_2 P_2}{M P_2} \\ &= \frac{O_1 M}{O_2 M} \end{aligned}$$

$$O_1 O_2 = 6$$

$$O_1 M = 3 + 2 = 5$$

$$O_2 M = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

$$\lg a = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$a \in \left( -\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x \cdot 3 = \log_3^2 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y \cdot 3 = \log_3^2 25y^2 (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

}.



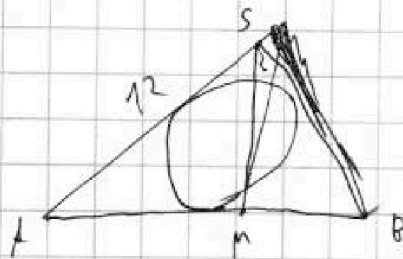
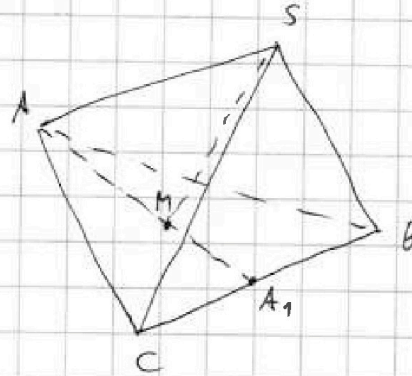
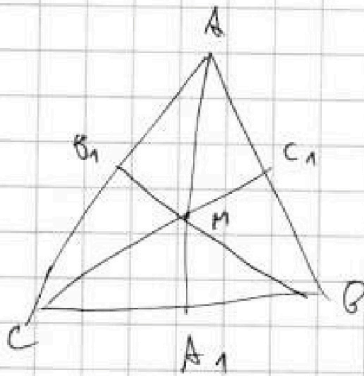
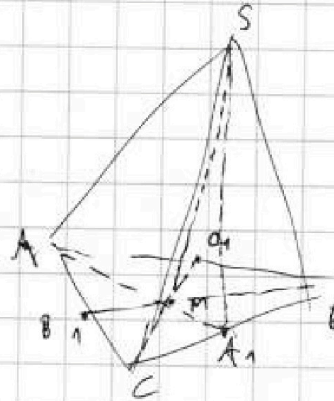
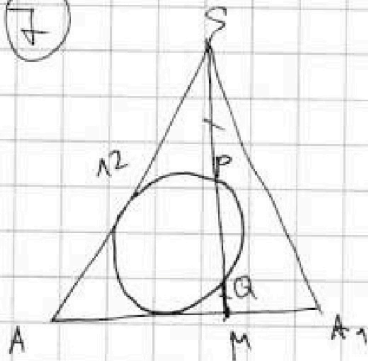
На одной странице можно оформлять только одну задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7



$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

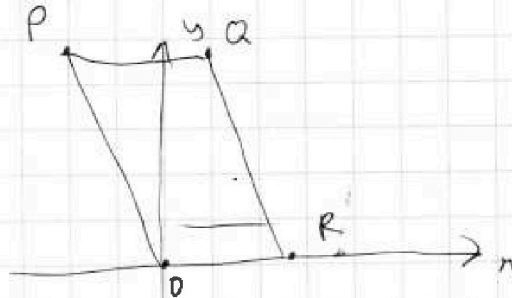
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6



$$y \in [0; 42]$$

$$x \in \left[-\frac{y}{3}; 20 - \frac{y}{3}\right]$$

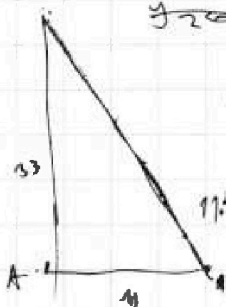
$$x_2 = x_1 + \frac{y_1 - y_2}{3} + 11$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{y_1 - y_2}{3} + 11 \geq -\frac{y_2}{3} \\ x_1 + \frac{y_1 - y_2}{3} + 11 \leq 20 - \frac{y_2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{y_1}{3} \geq -11 \\ x_1 + \frac{y_1}{3} \leq 9 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} y_1 \geq 3x_1 + 33 \\ y_1 \leq 3x_1 + 27 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} x_1 \geq -\frac{y_1}{3} - 11 \\ x_1 \leq -\frac{y_1}{3} + 9 \end{cases}$$



~~$$y_2 = y_1$$~~ 
$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = -3\Delta x + 33$$

$$110 + (9 + 9 + 10) \left( 12 + 12 + 12 + \frac{11+1}{2} \cdot 11 \right) =$$

$$= 110 + (28) (36 + 66) = 110 + 2858 = 2968$$

$$= 2966$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

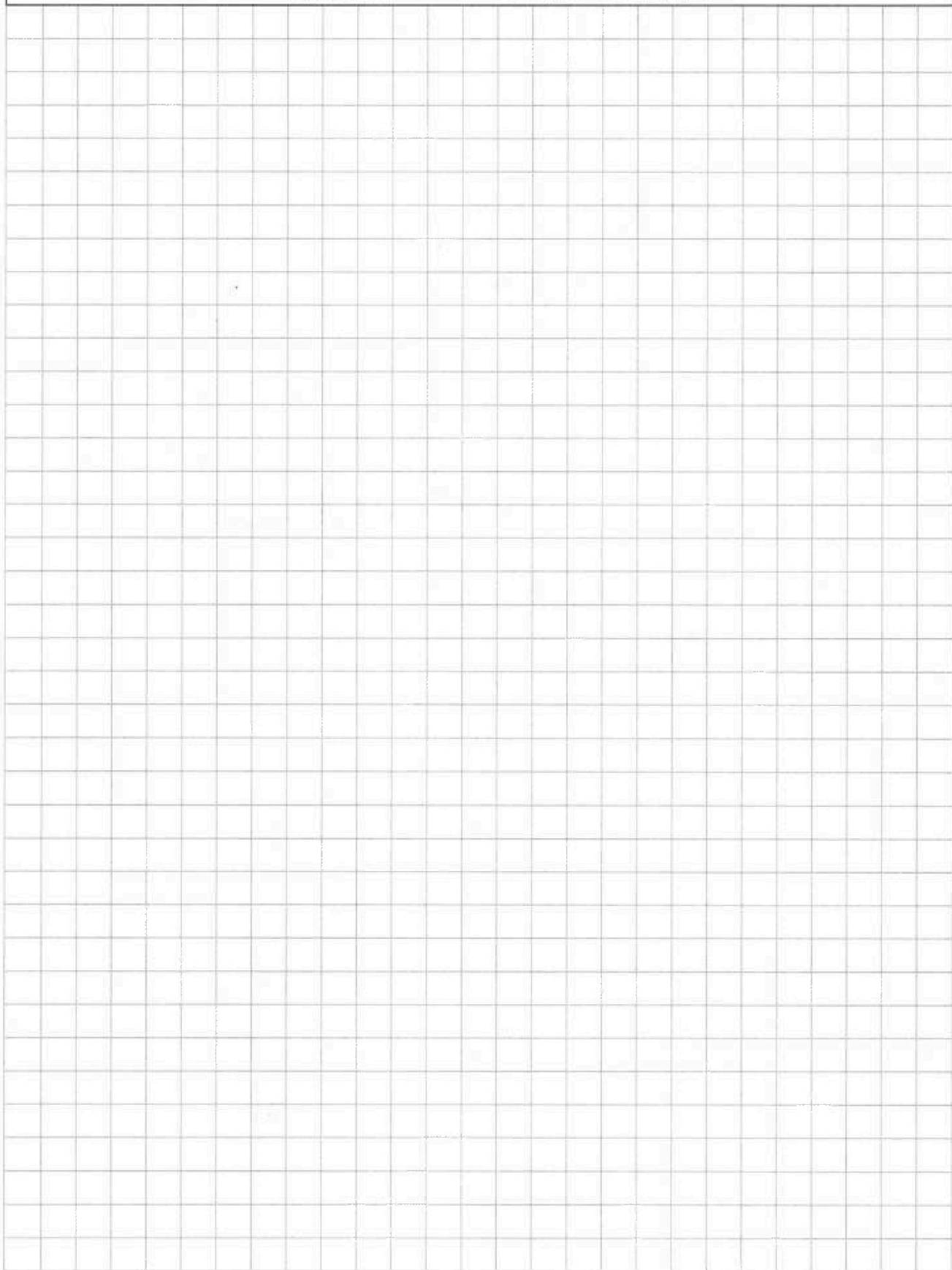
5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5)  $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$a = \log_3 x$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$

$2a^5 + 16a + 7 = 0$

$f'(a) = 10a^4 + 16$

$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$

$2a^5 + 16a + 7 = 0$

$\log_3^4 x \neq 6 \log_x 3$

~~$x = 3$~~

$7a^4 + 16a^4 + 2 = 0$   
 $a \in [-1; 0]$

$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$

$b = \log_3 5y$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$

$b^5 + 8b - 3,5 = 0$

$2b^5 + 16b - 7 = 0 \quad b \in (0; 1]$

$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$

$(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$

$(a^4 + a^3b + 8 + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 0$

~~$a = 0$~~

$a + b = 0$

$\log_3 x \neq \log_3 5y = 0$

$\log_3 5xy = 0$

$xy = \frac{1}{5}$

$a^4 \leq 1$

$a^3b < 0$

$\Rightarrow a^4 + a^3b + 8 > 0$

$D < 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поиск QR-кода недопустим!

Задача 1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

П-ть  $a_2; b_2; c_2$  - минимальные удовл. условию степени числа 2, явл. множителями числа  $a; b$  и  $c$   
т.е.  $a: 2^{a_2}$   $b: 2^{b_2}$   $c: 2^{c_2}$

Аналогично  $a_3; b_3; c_3$  - степени 3.

Аналогично  $a_5; b_5; c_5$  - степени 5.

Из утверждения  $ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$  следует, что

$$a_2 + b_2 \geq 9 \quad a_3 + b_3 \geq 10 \quad a_5 + b_5 \geq 10$$

Аналогично из  $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$

$$b_2 + c_2 \geq 14 \quad b_3 + c_3 \geq 13 \quad b_5 + c_5 \geq 13$$

Так же из  $ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$$a_2 + c_2 \geq 19 \quad a_3 + c_3 \geq 18 \quad a_5 + c_5 \geq 30$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases}$$

$$c_2 = b_2 + 10$$

$$b_2 = 2$$

$$c_2 = 12$$

$$a_2 = 7$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$$

$$c_3 = 8 + b_3$$

$$b_3 = 2,5$$

$$c_3 = 10,5$$

$$a_3 = 7,5$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$$

$$c_5 = 20 + b_5$$

Пропускали решение степеней, т.к. не ушли влезать это были минимальные



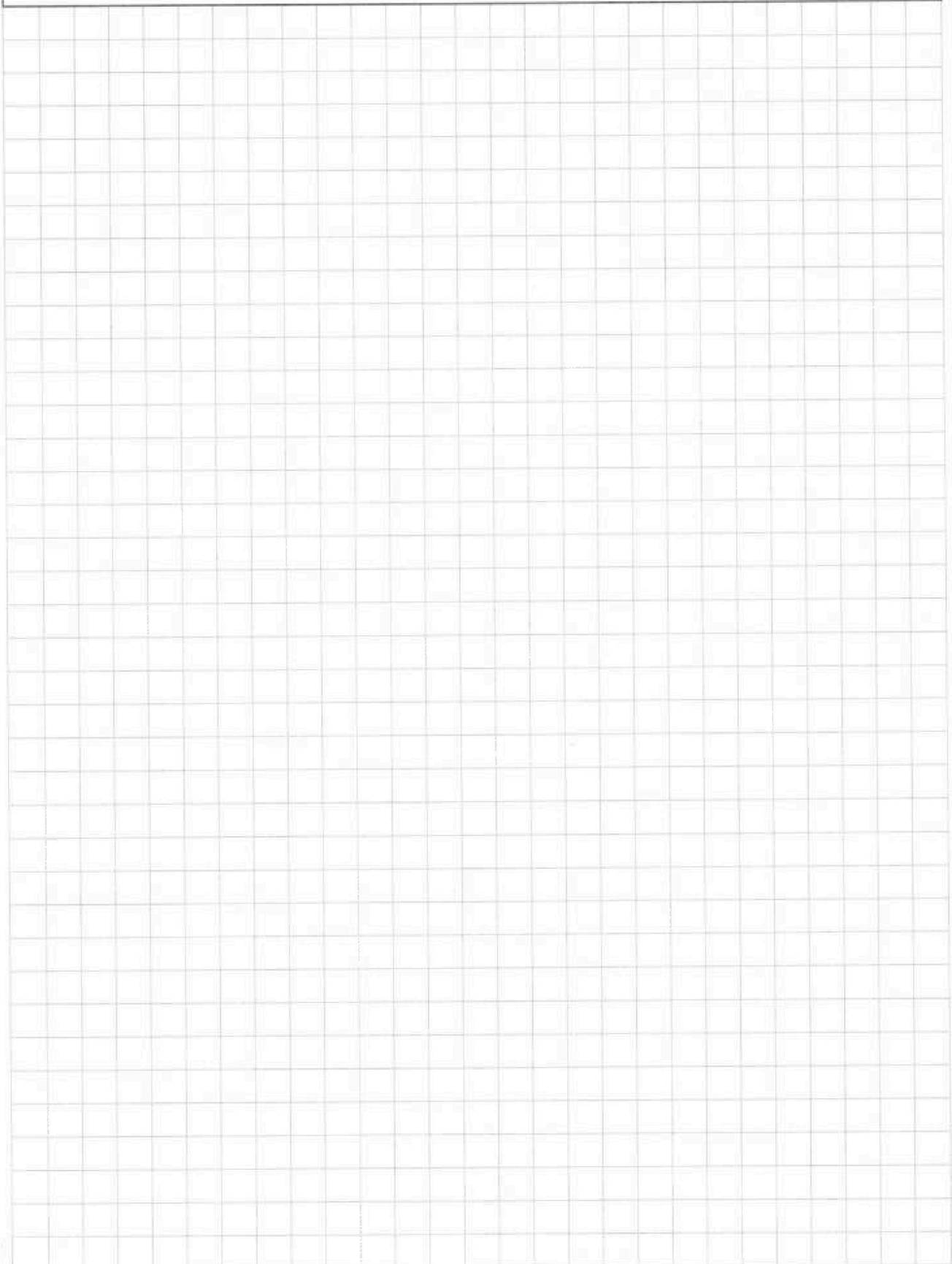
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

