МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 $\begin{cases} ab = n\cdot 2^9\cdot 3^{10}\cdot 5^{10} \\ bc = m\cdot 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13} \\ ac = k\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30} \\ m, n, k \in N \end{cases}$

$abc = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{n\cdot m\cdot k\cdot 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}}$ мы уже видим, что т.к. $a, b, c \in N$ $n\cdot m\cdot k$ должно делится на $3^{2k+1}\cdot 5^{2g-1}$ (т.к. степень под корнем должна быть чётной ($abc \in N$)) где $k, g \in \{0\} \cup N$

для наименьшего зн. abc должно быть $\min$ $n\cdot m\cdot k$

пусть a_i - степень i в числе a такая, что $(a : i^{a_i}) \in Z$ и $\max$ (макс. степень)

тогда:

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 + n_1 \\ b_2 + c_2 = 14 + m_1 \\ a_2 + c_2 = 19 + k_1 \end{cases}$ т.к. мы хотим min $m n k$ зн. $n_1 = m_1 = k_1 = 0$

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 9 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases}$ − $\begin{cases} c_2 - b_2 = 10 \\ c_2 + b_2 = 14 \\ a_2 + c_2 = 19 \end{cases}$ + $\begin{cases} 2c_2 = 24 \\ b_2 = c_2 - 10 \\ a_2 = 19 - c_2 \end{cases}$ $\begin{cases} c_2 = 12 \\ b_2 = 2 \\ a_2 = 7 \end{cases}$ сист. имеет реш. => предп. верное

аналогично пробуем с 3

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} c_3 - b_3 = 8 \\ c_3 + b_3 = 13 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2c_3 = 21 \\ b_3 = c_3 - 8 \\ a_3 = 18 - c_3 \end{cases}$

видим противоречие, т.к. $c_3 \in N \cup \{0\}$ => $2c_3$ ≠ нечет.
для исправ. нам нужно добав. к ∀ зн. справа 1 (не важно к какому, т.к. зн. $n\cdot m\cdot k$ от этого не изм., пусть это будет n_3)

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 13 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} c_3 = 10 \\ b_3 = 3 \\ a_3 = 8 \\ n_3 = 1 \end{cases}$ т.е. $\min n = 3$

теперь 5:

$\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ + $\begin{cases} a_5 + c_5 + 2b_5 = 23 \\ a_5 + c_5 = 30 \\ 2b_5 = -7 \end{cases}$ мин. возм. зн. $2b_5 = 0$

противор. => нам нужно добавить к m_5 или n (без разницы) в сумме 7, чтобы
$a_5 + c_5 + 2b_5 = 23 + n_5 + m_5 = 30$
(добав. к n_5, беспол. им. нет увел. разряд.)

пусть это опять n

$n_5 = 7$

и тогда $\begin{cases} a_5 + c_5 = 30 \\ b_5 = 0 \\ a_5 = 17 - 0 \\ c_5 = 13 - 0 \end{cases}$ $n = 3\cdot 5^7$, $m = 1$, $k = 1$

т.е. $abc = \sqrt{3\cdot 5^7\cdot 2^{42}\cdot 3^{41}\cdot 5^{53}} = \sqrt{2^{42}\cdot 3^{42}\cdot 5^{60}} = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

это зн. abc минимально, т.к. если мы умножим хоть на 1 простое число но одна из величин степени не решится.

Ответ: мин. $abc = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

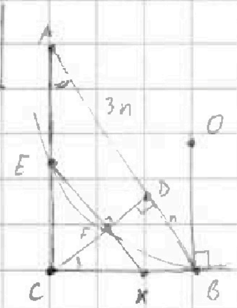
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



Д.П.: продлеваем EF до перес. с BC в т. X

Т.к. CD - высота к гипотенузе в прямоуг. $\triangle$, то $\triangle CAD \sim \triangle CDB \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD}$ $\quad DC^2 = 3n^2 \quad DC = n\sqrt{3}$

$tg\angle A = DC/AD = \frac{\sqrt{3}n}{3n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow$ $BC = \frac{1}{2}AB = 2n$; $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}\cdot 2n$

$AD = 3n \quad DB = n$

$AB \parallel EF$

$EF \parallel AB \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle CEF = \angle CAD = 30^\circ \\ \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ\end{array}\right| \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDA \sim \triangle ABC$

в-ва $\triangle$ т. X: $\quad XB^2 = XE \cdot XF$ $\qquad \triangle CEF \sim \triangle FCX \sim \triangle CEX$ (т.к. $\triangle CEX$ - прямоуг., и $CF \perp EX$)

$\triangle CEX \sim \triangle CEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{EF}{FX} \Rightarrow EF = 3FX \quad EX = 4XF$

$XB^2 = 4XF^2$; $\angle DCB = \angle A = 30^\circ \Rightarrow FX = \frac{1}{2}CX \Rightarrow CX^2 = 4FX^2$

$XB^2 = CX^2$ т.к. XB и $CX > 0$ то $XB = CX = \frac{1}{2}BC$

$\left.\begin{array}{l}X \text{ - серед } BC \\ EX \parallel AB\end{array}\right| \Rightarrow EX$ - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}n$; $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}n$

$S_{CEF} = \frac{3}{2}n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}n^2 \qquad S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3}n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}n^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}n^2} = \frac{16}{3}$

Ответ: $16/3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$

$\arcsin(a) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\sin\alpha = \cos x \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n,\ n \in Z$

$x + \frac{\pi}{2} \in [-2{,}5\pi, 2{,}5\pi]$ при этом $5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$ $\alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$ т.е. $\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n \quad n \in Z$

$2x + \pi = 5\pi \pm 10x + 20\pi n \quad n \in Z$

1) $8x = -4\pi - 20\pi n$ $n=1$: $x = -3\pi$, если увел. n то $x\downarrow \Rightarrow$ уменьш. n

$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} - 2{,}5\pi n \\ n \in Z \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{cases}$ $n=0$: $x = -\frac{\pi}{2} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n=-1$: $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если уменьш. n то $x\uparrow$ всё, мы достигли второго крайнего зн. в этом случае $x_1 \in \{-3\pi; -\frac{\pi}{2}; 2\pi\}$

2) $12x = 4\pi + 20\pi n$ $n=1$: $x = 2\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ если увел. n то $x\uparrow \Rightarrow$ уменьш. n

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}n\pi \\ x \in [-3\pi, 2\pi] \end{cases}$ $n=0$: $x = \frac{\pi}{3} \in [-3\pi, 2\pi]$

$n=-1$: $x = -\frac{4}{3}\pi \in [-3\pi, 2\pi]$

$n=-2$: $x = -3\pi \in [-3\pi, 2\pi]$ вторая крайняя точка

в этом случае $x_2 \in \{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

$\left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$

Ответ. $\{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

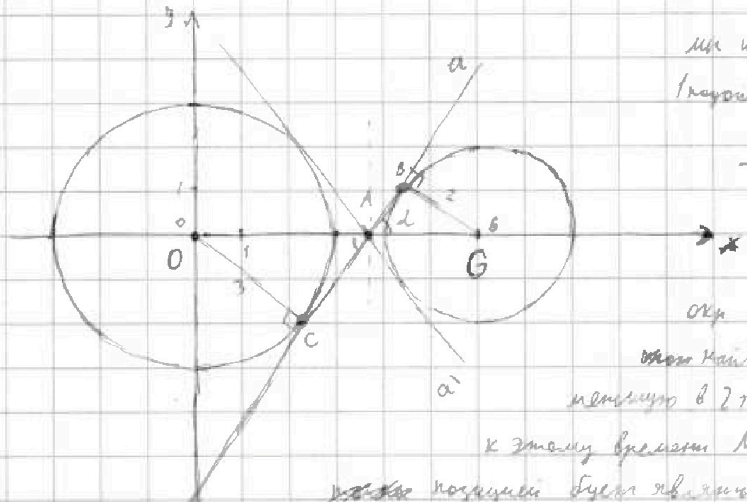
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4 $\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+36+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{array}\right. \end{cases}$

постр. график $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right.$

для 4 реш нужно, чтобы прямая, заданная $y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b$ пересекла его 4 раза



мы имеем право брать $\forall$ b и если хоть 1 подойдет то a неуходим => $1{,}5b = \forall = C^0 \in R$

$-\frac{a}{2}$ задает угол наклона прямой

доп. прямая a $\cap$ большую окр в 2 точках, тогда можно в эти точки ~~этом~~ найти положение когда они первый раз $\cap$ меньшую в 2 тчк, данное решение не подойдет если к этому времени N перес с большей $\neq$ 1 или 0 крайней ~~xxxx~~ позицией будет являться касательная к 2 окр., перес отрезок OG (a и a' на рис) Если мы увел α, очевидно пересечений вообще не будет (предельн. вр. вокруг A прямой a), и их будет 4 пока

$-\frac{a}{2} \in (\operatorname{tg}\alpha;\ -\operatorname{tg}\alpha)$

$\left.\begin{array}{l} \angle OAC = \angle BAG \text{ (т.к. верт)} \\ \angle OCA = \angle GBA = 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \triangle OAC \sim \triangle ABG$ $\frac{AG}{6-AG} = \frac{2}{3}$ $3AG = 12 - 2AG$
$AG = 2{,}4$

$\sin\alpha = \frac{BG}{AG} = \frac{2}{2{,}4} = \frac{5}{6}$ $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11}$ $-\frac{a}{2} \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11};\ \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$

$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\ \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\ \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

ограничения

$\begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_x 3^5 - 8$

$\log_3^4 x + \log_x 3(6 - 2,5) + 8 = 0$

$\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0$ т.к. $x \neq 1$

$\log_3^5 x + 8\log_3 x + 3,5 = 0 \qquad a = \log_3 x \neq 0$

$f = a^5 + 8a + 3,5 \qquad f' = 5a^4 + 8 > 0$ => функц. возр. =>

=> есть лишь 1 a ур. $a^5 + 8a + 3,5 = 0$ и ему соотв. лишь 1 x

аналог. $\log_3^4(5y) - 3,5\log_{5y} 3 + 8 = 0 \qquad b = \log_3 5y \neq 0$ т.к. $y \neq \frac{1}{5}$

$f = b^5 + 8b - 3,5 = 0 \qquad f' = 5b^4 + 8 > 0$ => лишь 1 возм. зн. y

1 зн. x и 1 зн. y => есть единств. зн. xy, если мы его найдем то оно будет ответом

$\begin{cases} a^4 + \frac{3,5}{a} + 8 = 0 \\ b^4 - \frac{3,5}{b} + 8 = 0 \end{cases}$

Заметим, что сист. верна если верно одно из равенств и $a = -b$

т.е. $\log_3 x = -\log_3 5y \qquad \log_3 5xy = 0 \qquad 5xy = 1$

$xy = 0,2$

мы знаем что у равенств есть решения, причём единств. =>

=> рассмотренный нами случай подходит и единственен

Ответ: $xy = 0,2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6) Территория внутри параллелограмма огр. прямыми:

$y = 42$

$y = 0$

$y = -3x$

$y = -3x + 60$

Мы можем „расчертить" параллелогр. на паралл. наклонные прямые вида $y = -3x + n$, где $n \in Z$, $n \in [0; 60]$

т.е. $A(x_1; y_1)$ экв. $A(x_1; -3x_1 + a)$ $a \in Z$, $a \in [0; 60]$

и $B(x_2; y_2)$ экв. $B(x_2; -3x_2 + b)$ $b \in Z$, $b \in [0; 60]$

Из усл.: $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$

$3x_2 - 3x_2 + b - (3x_1 - 3x_1 + a) = 33$

$b - a = 33$ $a, b \in Z$ $a, b \in [0; 60]$

$b = 60$ $a = 60 - 33 = 27$

$b = 59$ $a = 59 - 33 = 26$

...

$b = 33$ $a = 33 - 33 = 0$ меньше быть не может => всего пар a-b 28 (от 0 до 27 для a)

но мы видим, что разность $b - a$ не зав. от x и y => подходит для всех пар точек с целочисленными координатами.

$\angle$ OP: его проекция на $Ox = 14$ и $\in [-14; 0]$ т.е. содерж. 15 целых зн. т.к. обе коорд. целочисленные то больше 15 точек нужных нам там быть не может (иначе $x \notin Z$). Из этих 15 с целыми x у 15 целый y т.к. $y =$ целое $\cdot x$ => при $x \in Z$ $y \in Z$

т.е. на ~~каждой~~ $42 \geq y = -3x + n \geq 0$ $n \in Z$, $n \in [0; 60]$ есть 15 ~~[illegible]~~ точек, уд. усл.

т.е. с 2 отрезков $42 \geq y = -3x + a \geq 0$ и $42 \geq y = -3x + b \geq 0$ можно взять $15 \cdot 15$ пар точек (кажд. т.ч. ~~для~~ у a может обр. пару с кажд. точкой у b), а пар a-b есть 28

$N_{пар} = 15 \cdot 15 \cdot 28 = 225 \cdot 4 \cdot 7 = 900 \cdot 7 = 6300$ пар.

Ответ: 6300 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

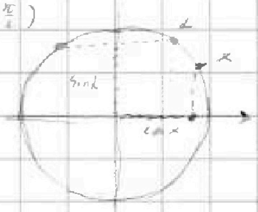
3) $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$x + \frac{\pi}{2} \in [-2{,}5\pi; 2{,}5\pi]$

! $x \in [-3\pi; 2\pi]$

$\sin(5\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



α $\sin\alpha = \cos x$

$5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n, \ n \in Z \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \pm x + 2\pi n$

1) $2x + \pi = 5\pi + 10x + 20\pi n$

$8x = -4\pi - 20\pi n \quad n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2{,}5\pi n \quad n \in Z$

$x \in [-3\pi; 2\pi]$

$n = -1 \quad x = -3\pi$ ✓

$n = 0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$ ✓

$n = 1 \quad x = 2\pi$ ✓

$\cancel{5(2\frac{\pi}{2})}$

$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

2) $2x + \pi = 5\pi - 10x + 10\pi n, \ n \in Z$

$12x = 4\pi + 20\pi n \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi n$

$n = 1 \quad x = 2\pi$

$n = 0 \quad x = \frac{\pi}{3}$

$n = -1 \quad x = -\frac{4}{3}\pi$

$n = -2 \quad x = -3\pi$

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

---

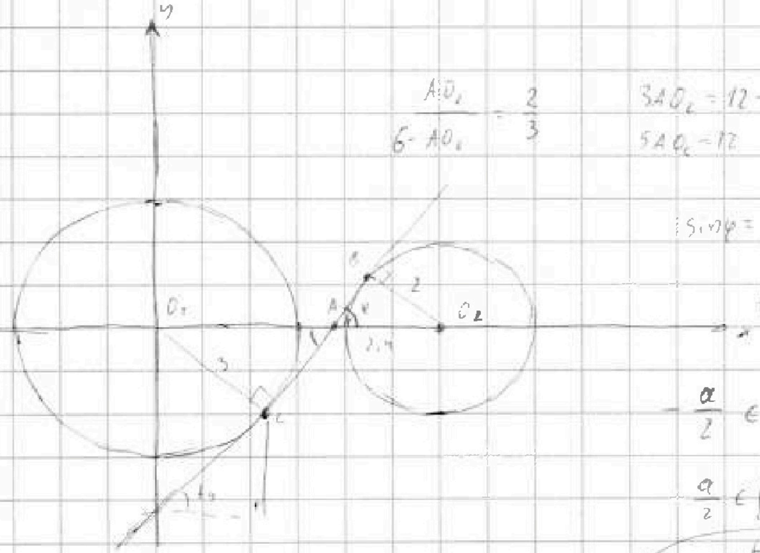
4) 4 реш. Вне з. a

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = (x-6)^2 + y^2 - 4$

$$\begin{cases} 2y = 3b - ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b$



$\frac{AO_2}{6 - AO_2} = \frac{2}{3}$

$3AO_2 = 12 - 2AO_2$

$5AO_2 = 12 \quad AO_2 = 2{,}4$

$\sin\varphi = \frac{2}{2{,}4} = \frac{5}{6}$

$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$tg = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$-\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$\frac{a}{2} \in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$

$a \in \left[-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)

$ab = n \cdot 2^{9} 3^{10} 5^{13}$

$bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = k \cdot 2^{19} 3^{14} 5^{30}$

$\min abc = ?$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 19 \end{cases}$

abc зн m b_2 з ...

т.е. $2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5}$

т.е. $n_2 \geq$ ~~КОД~~ 19 $n_3 \geq 18$ $n_5 \geq 30$

$\begin{cases} a_2 = 9 - b_2 \\ b_2 + c_2 = 14 \\ 9 - b_2 + c_2 = 19 \end{cases}$ $c_2 = 14 - b_2$ $c_2 = 10 + b_2$

$2c_2 = 24$ $c_2 = 12$ $b_2 = 2$ $a_2 = 7$

2^{21}

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 10 \\ b_3 + c_3 = 14 \\ a_3 + c_3 = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} c_3 - b_3 = 8 \\ c_3 + b_3 = 14 \end{cases}$ $2c_3 = 22$

$c_3 = 11$ $b_3 = 3$ $a_3 = 7$ $m = 3\,5^{7}$

$abc = \sqrt{mnk\, 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$

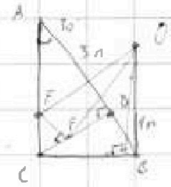
$\sqrt{2^{42} \cdot 3^{72} \cdot 5^{60}} =$

$= 2^{21} 3^{36} 5^{30}$

5^{7} $\begin{cases} a_5 + b_5 = 10 \\ b_5 + c_5 = 16 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ $c_5 - b_5 = 20$ $c_5 + b_5 = 14$ $c_5 = 17$ $b_5 = -3$ нельзя.

$\begin{cases} a_5 + b_5 = 17 \\ b_5 + c_5 = 13 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ $\begin{cases} a_5 + c_5 + 2b_5 = 30 \\ a_5 + c_5 = 30 \end{cases}$ $\begin{cases} b_5 = 0 \\ a_5 = 17 \\ c_5 = 13 \end{cases}$

2)

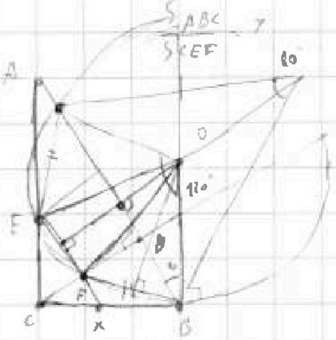


$\frac{CF}{FE} = \frac{CD}{AD}$ $\frac{n}{CD} = \frac{CD}{3n}$ $CD = n\sqrt{3}$

$\frac{EC}{FE} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle A = 30°$ $\Rightarrow CB = 2n$

$AC = 2\sqrt{3}n$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$



$XB^2 = XE \cdot XF$

$XE = 4XF$

$XB^2 = 4XF^2$

$CX = 2XF$ $CX^2 = 4XF^2$

$XB^2 = CX^2$

т.к. $XB, CX > 0$ то $XB = CX$ $\Rightarrow$ XE - ср. линия $= 2n$

~~$EF = \frac{3}{4} CAK$~~ $EF =$ ср. л. $\triangle CAK = \frac{3}{2} n$

$CF = \frac{3}{2} n \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} n$

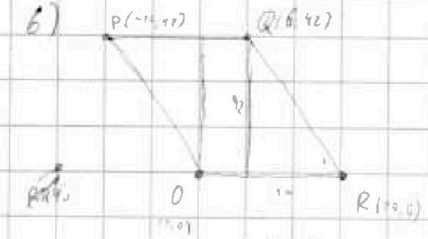
$S_{CEF} = \frac{3}{2} n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} n \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} n^2$

$S_{ABC} = 2n \cdot 2\sqrt{3} n \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} n^2$

$\frac{2\sqrt{3} n^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8} n^2} = \frac{16}{3}$

$\frac{4\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{16}{3}$

6)



$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

max $\Delta x = 20$

$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

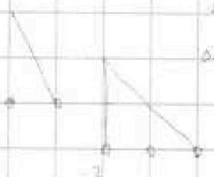
$33 = 3 \cdot 11$

$\Delta y = -3$

$\Delta x = 0$	$\Delta y = 33$	$\Delta x = 7$	$\Delta y = 12$
$\Delta x = 1$	$\Delta y = 30$	$\Delta x = 8$	$\Delta y = 9$
$\Delta x = 2$	$\Delta y = 27$	$\Delta x = 9$	$\Delta y = 6$
$\Delta x = 3$	$\Delta y = 24$	$\Delta x = 10$	$\Delta y = 3$
$\Delta x = 4$	$\Delta y = 21$	$\Delta x = 11$	$\Delta y = 0$
$\Delta x = 5$	$\Delta y = 18$		
$\Delta x = 6$	$\Delta y = 15$		

+ [illegible]

	33	$\Delta x = 5$ 15 + 18
$\Delta x = 0$	0 + 33	$\Delta x = 6$ 18 + 15
$\Delta x = 1$	3 + 30	~~21 + 12~~
$\Delta x = 2$	6 + 27	~~24 + 9~~
$\Delta x = 3$	9 + 24	~~27 + 6~~
$\Delta x = 4$	12 + 21	~~30 + 3~~
$\Delta x = 7$	21 + 12	
$\Delta x = 8$	24 + 9	
$\Delta x = 9$	27 + 6	
$\Delta x = 10$	30 + 3	
$\Delta x = 11$	33 + 0	



7)

SP = MQ

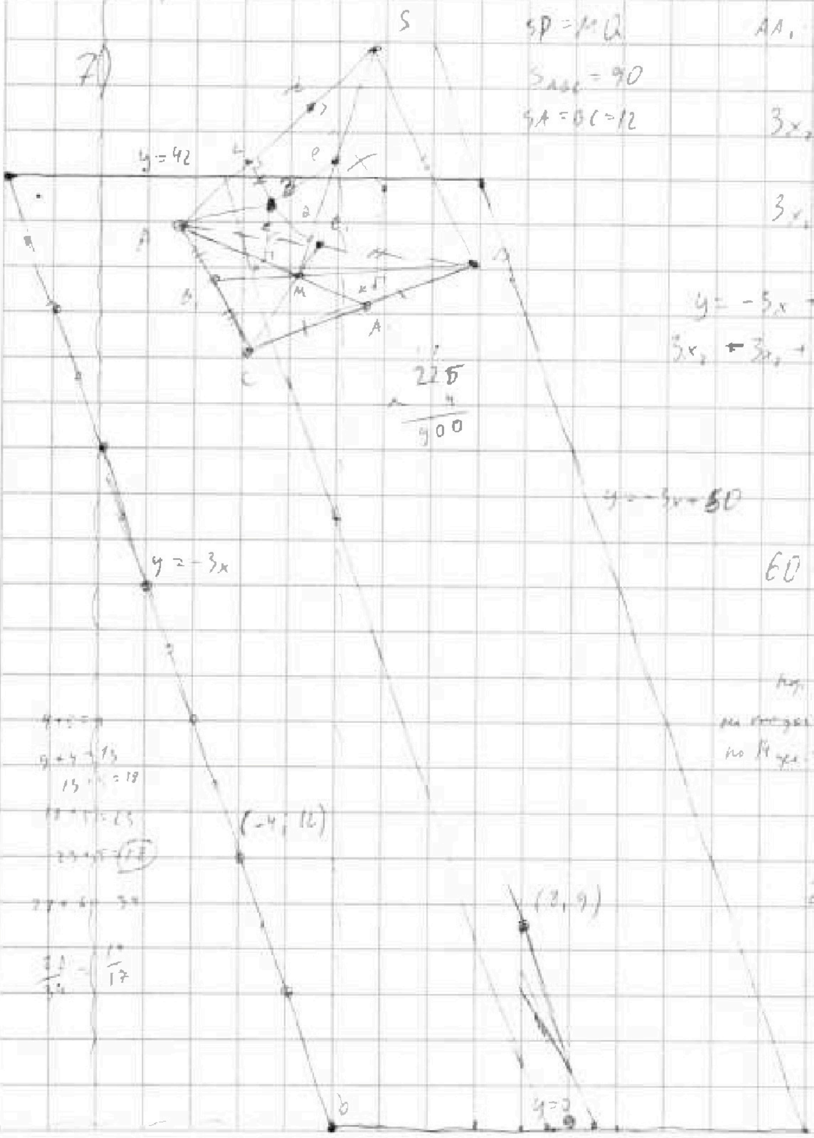
$S_{ABC} = 90$

SA = BC = 12

$AA_1 : BB_1 : CC_1 = ?$

$3x_2 + y_2 - 3x_1 + y_1 = 33$

$3x_2 + y_2 - (3x_1 + y_1) = 33$



$y = -3x + a$ $a \in [0; 60]$

$3x_2 - 3x_2 + b - (3x_1 - 3x_1 + a)$

$b - a = 33$ $b; a \in [0; 60]$

~~16~~ 14 [illegible] b/a

60 − 27 = 33 33 − 0 = 33

27 27 [illegible] a и b

7 + 33 = [illegible]

[illegible]

[illegible] x и b

$y = -3x - 33 \to x - 9$

по 14 [illegible] 14 × 14 [illegible]

$x_2 - x_1 =$

~~16~~ 23

24 + 9

14 × 4 = 56; 14 × 14 = 196

$14 \cdot 14 \cdot 27 = 7^2 \cdot 4 \cdot 3^3$

196 × 27 = 1372 + 392 = 5292

всего 5292 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте **крестиком номер задачи**,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x \cdot 27} 3^5 - 8$ $\qquad \log_3^4 (5y) - 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\begin{cases} x>0 & y>0 \\ x \neq 1 & y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$ $\qquad$ все $\log_{xy}$ $xy = ?$

$\log_3^4 x + \frac{6\log_3 3}{\log_3 x} = 2{,}5\log_x 3 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{3{,}5}{\log_3 x} + 8 = 0 \quad | \cdot \log_3 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\log_3^5 x + 3{,}5 + 8\log_3 x = 0 \qquad f = 2a^5 + 16a + 7 = 0$ $\qquad 2\left(\frac{243}{32}\right)$

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0 \qquad f' = 10a^4 + 16 > 0$ $\qquad$ функ. возр.

$\Rightarrow$ единств. корень

$\log_3 x$

$2a^5 + 16a = 7$

$2a(a^4 + 8)$

$\frac{(8n+1)2}{n^5} = 7 \qquad 2 \qquad \frac{37}{32} \qquad \frac{16}{1}$

$3\left(\frac{5,0}{11}\right)$

$\log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = 5{,}5\log_{5y} 3 - 8$

$\begin{cases} \log_3^4 (5y) - 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 (x) + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} \left(\frac{1}{\log_{5y} 3}\right)^4 - 3{,}5\log_{5y} 3 + 8 = 0 \\ \left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 + 3{,}5\log_x 3 + 8 = 0 \end{matrix}$

$a^5 - 3{,}5 + 8a \qquad 5a^4 + 8 > 0$ $\quad$ функ. возр. $\Rightarrow$ ед. зн. y

$\log_3 5y = -\log_3 x$

$\log_3 5xy = 0$

$5xy = 1$

$xy = 0{,}2$