МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. $ab \vdots 2^{8}\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$, $bc \vdots 2^{12}3^{20}5^{17}$, $ac \vdots 2^{14}3^{21}5^{35}$

$ab\cdot bc\cdot ac = (abc)^2 \vdots 2^{34}3^{55}5^{64} \Rightarrow abc \vdots 2^{17}3^{28}5^{34}$, $abc \vdots 3^{28}$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$ и abc не может содержать в своём разложении делителя в нецелой степени, а если степень будет < 28, то $(abc)^2 \not\vdots 2^{34}3^{55}5^{64}$. Пусть числа $a = 2^{\alpha_1}3^{\beta_1}5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2}3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3}3^{\beta_3}5^{\gamma_3}$. Тогда $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 17$, $\alpha_1+\alpha_2 \geq 8$, $\alpha_2+\alpha_3 \geq 12$, $\alpha_1+\alpha_3 \geq 14$. Т.к нужно минимизировать сумму $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, пусть она равна 17 $\Rightarrow$ легко можно найти, что $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 9$. Аналогично с β_1, β_2 и β_3 получаем, что $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ может быть равно 28 при $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 14$.

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 34$, $\gamma_1+\gamma_2 \geq 12$, $\gamma_2+\gamma_3 \geq 17$, $\gamma_1+\gamma_3 \geq 39$. Из последнего условия следует, что $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 39$. Легко найти подбором, например, $\gamma_1 = 19$, $\gamma_3 = 20$, $\gamma_2 = 0$ (т.к необходимо минимизировать $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$, ведь чем в меньшей степени в число входит простой множитель, тем число меньше, поэтому сразу искали $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ не просто ≥ 39, а $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 39$). Тогда минимальное значение abc равно $2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} = 2^{17}\cdot 3^{28}5^{39}$

Ответ: $2^{17}3^{28}5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

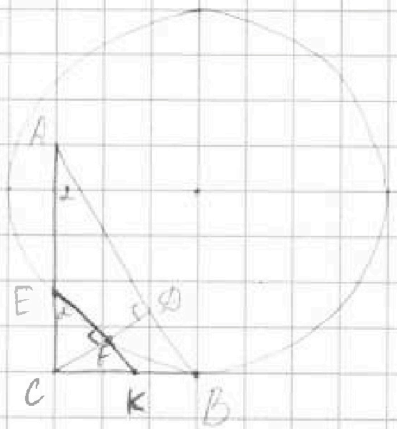
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 Дано:
$\triangle ABC$ - прям.уг.
$AB \parallel EF$
$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ - ?



Решение: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2$, k - коэф подобия.

Пусть $AD = 5x$, $DB = 2x \Rightarrow CD^2 = 5x \cdot 2x$

Т.к. $EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFC = 90°$. Пусть $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle ECF = 90° - \alpha = \angle ABC$ ~~и т.д.~~

$\triangle ADC \sim \triangle ACB$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = AD \cdot (\cancel{AD} + DB)$

$\triangle ADC \sim \triangle EFC$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AD}{EF} = \frac{CD}{CF}$

$\triangle EFC \sim \triangle ACB$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB} = \frac{CF}{BC} \Rightarrow EF \cdot AB = EC \cdot AC$

~~По свойству касательной и секущей $BC^2 = EC \cdot AC$~~ Пусть $EF \cap BC = K$

$\frac{EF}{FK} = \frac{AD}{DB} = \frac{5}{2} \Rightarrow EF = 5y$, $FK = 2y \Rightarrow CF^2 = 10y^2$

$\triangle CEF \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{CF}{BD} = \frac{EF}{CD}$ [illegible]

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

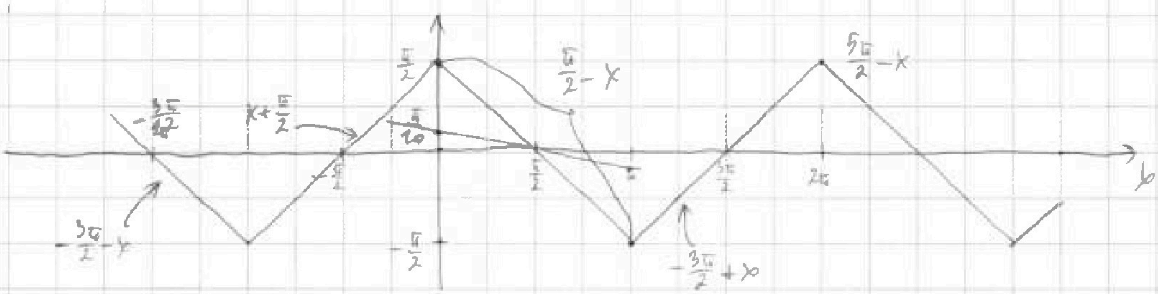
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3. $10\arcsin(\cos x)=\pi-2x \Rightarrow \arcsin(\cos x)=\frac{\pi-2x}{10}$; $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi-2x}{10}\le\frac{\pi}{2}$

Начертим график правой и левой части:



$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi-2x}{10}=k\cdot\frac{\pi}{2}-x, \text{ где } k=1,5,9,\dots,-3,-7\dots \text{ (числа отличаются на 4 с соседними)}\\ \frac{\pi-2x}{10}=x-n\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ где } n=-1,3,7,\dots,-5,-9\dots\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\pi-2x=5k\pi-10x\\ \pi-2x=10x-5\pi n\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{(5k-1)\pi}{8}\\ x=\frac{(5n+1)\pi}{12}\end{array}\right.$$

При этом $\frac{\pi-2x}{10}\ge-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi-2x}{10}\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\pi-2x\ge-5\pi\\ \pi-2x\le5\pi\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x\le3\pi\\ x\ge-2\pi\end{array}\right.$

Из первой серии $x=\frac{(5k-1)\pi}{8}$: $\left[\begin{array}{l}x=\underset{k=1}{\frac{\pi}{2}};\ \underset{k=5}{3\pi}, \text{ при } k>5: x>3\pi\\ x=\underset{k=-3}{-2\pi}, \text{ при } k<-3: x<-2\pi\end{array}\right.$

Из второй серии $x=\frac{(5n+1)\pi}{12}$: $\left[\begin{array}{l}x=\underset{n=3}{\frac{4}{3}\pi};\ \underset{n=7}{3\pi}, \text{ при } n>7: x>3\pi\\ x=\underset{n=-1}{-\frac{\pi}{3}};\ \underset{n=-5}{-2\pi}, \text{ при } n<-5: x<-2\pi\end{array}\right.$

Ответ: уравнение имеет 5 решений: $x=-2\pi$; $x=-\frac{\pi}{3}$; $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{4\pi}{3}$; $x=3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. $\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)\cdot(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$

Второе уравнение системы задаёт две окружности, уравнения которых:

$x^2+y^2=1$ и $x^2+(y-10)^2=6^2$

Начертим графики этих окружностей.

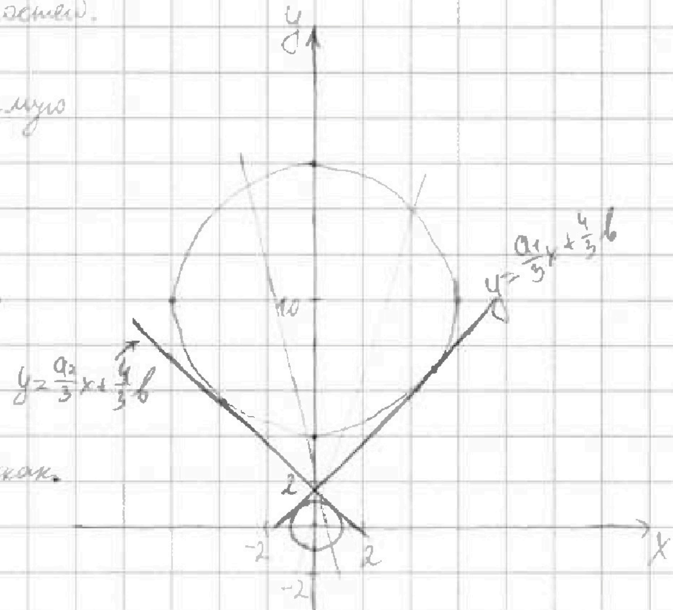
Первое ур-ие системы задаёт прямую

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$

Чтобы система имела 4 решения,

необходимо, чтобы эта прямая

пересекала 2 окружности в 4 точках.



Из рисунка видно, что при $a=a_1$

прямая касается окружностей и при уменьшении

a не будет достигаться 4 решения. Заметим, что график симметричен относительно оси y, $\Rightarrow$ $a_1=-a_2$. Осталось найти это граничное положение. При этом ответ будет выглядеть так: $a\in(-\infty;-a_1)\cup(a_1;+\infty)$

Точки a_1 и $-a_1(a_2)$ выколоты, т.к. при них не достигается 4 решений, потому что прямая касается обеих окружностей и подобрать такое b, что она пересекает 2 окружности в 4 точках не удастся, потому что b определяет смещение вверх или вниз.

→ см. след стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (продолжение). Чтобы найти a_1, необходимо $y=\frac{a_1}{3}x+\frac{4}{3}b$ подставить в 2 уравнения окружностей.

$x^2+\left(\frac{a_1x}{3}+\frac{4}{3}b\right)^2=1 \Rightarrow 9x^2+a_1^2x^2+8a_1bx+16b^2-9=0$

Т.к прямая касается окружности, то $D_1=0 \Rightarrow 16a_1^2b^2-(9+a_1^2)(16b^2-9)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a_1^2+81-9\cdot 16b^2=0 \Rightarrow a_1^2+9=16b^2$ (1)

$x^2+\left(\frac{a_1x}{3}+\frac{4}{3}b-10\right)^2=36 \Rightarrow x^2(9+a_1^2)-x(60a_1-8a_1b)-240b+16b^2+64\cdot 9=0$

$D_2=0 \Rightarrow (30a_1-4a_1b)^2-(a_1^2+9)\cdot(16b^2-240b+64\cdot 9)=0 \Rightarrow a_1^2(16b^2-240b+900)-(a_1^2+9)\cdot$

$\cdot(16b^2-240b+64\cdot 9)=0 \Rightarrow (16b^2-240b+900)(a_1^2-a_1^2-9)+(a_1^2+9)\cdot 36\cdot 9=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-9)\cdot(-(a_1^2+9)\cdot 36+16b^2-240b+900)=0 \Rightarrow -(a_1^2+9)\cdot 36+16b^2-240b+900=0$

С учетом (1), что $a_1^2+9=16b^2$: $-16b^2\cdot 36+16b^2-240b+900=0$ $|:4$

$\cancel{-140b^2-60b+225=0}$ $-140b^2-60b+225=0 \Rightarrow 28b^2+12b-45=0$

$D_1=36+28\cdot 45=9\cdot 4+9\cdot 5\cdot 28=9\cdot 144$

$b_{1,2}=\frac{6\pm 3\cdot 12}{28}=\frac{42}{28};\ \frac{-30}{28}$, $b<0$ не подходит $\Rightarrow b=\frac{42}{28}=\frac{3}{2}$

$a_1^2+9=16\cdot\frac{9}{4} \Rightarrow a_1^2=36-9=27 \Rightarrow a_1=3\sqrt{3}$

При $a>0$: чем больше a, тем ближе к оси y график прямой, при $a<0$ — наоборот $\Rightarrow a\in(-\infty;-3\sqrt{3})\cup(3\sqrt{3};+\infty)$

Ответ: $a\in(-\infty;-3\sqrt{3})\cup(3\sqrt{3};+\infty)$.

№5. $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{4x^4}625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$\log_5^4(2x) = \frac{13}{3}\log_{2x}5 - 3$

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3}\log_y 5 - 3$

$\log_5^4(2x) = \frac{13}{3\log_5(2x)} - 3$

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3\log_5 y} - 3$

$3\log_5^5 2x = 13 - 3\log_5 2x \quad (1)$

$3\log_5^5 y = -13 - 3\log_5 y \quad (2)$

Сложим (1) и (2): $3(\log_5^5 2x + \log_5^5 y) = -3(\log_5 2x + \log_5 y)$

$\log_5^5 2x + \log_5^5 y = -(\log_5 2x + \log_5 y)$

$\log_5^5 2x + \log_5 2x = -\log_5^5 y - \log_5 y$

$\log_5^5 2x + \log_5 2x = -(\log_5^5 y + \log_5 y)$

Введём функцию $f(t) = \log_5^5 t + \log_5 t$. Тогда можно записать, что $f(2x) = -f(y)$. Функция $f(t)$ – возрастающая. Есть случай, когда $f(2x) = -f(y) = 0 \Rightarrow 2x = y \Rightarrow x \cdot y = \frac{y^2}{2}$. $f(y) = 0$ при $y = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$. В других случаях, когда $2x \neq y$, заметим, что $f(t) = -f(\frac{1}{t})$, т.к. $\log_5^5 t$ будет иметь тот же знак, что и $\log_5 t$, т.к. $t \cdot \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow 2x \cdot y = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$.

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$.

№6. Т.к. координаты x_1, x_2, y_1, y_2 точек A и B – целые числа ~~...~~ и

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Rightarrow y_2 - y_1 \,\vdots\, 5$

Одна из сторон параллелограмма равна 18, а другая – $\sqrt{80^2 + 16^2} = 16\sqrt{26}$.

Если $y_2 - y_1 = 0$, то есть точки лежат на одной ~~вертикальной~~ горизонтальной прямой,

то $x_2 - x_1 = 9$, в первом ряду будут 10 пар таких точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

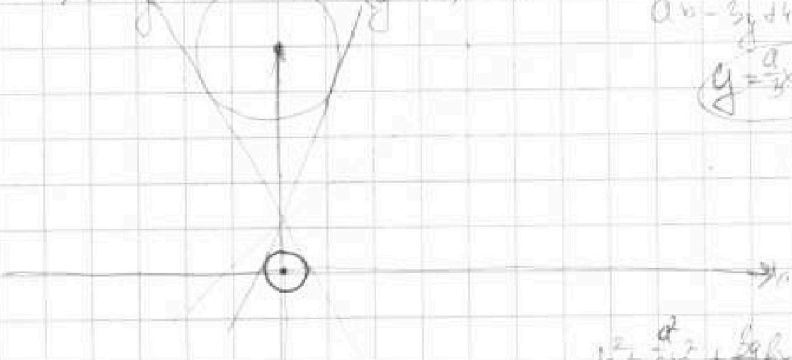
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)\cdot(x^2+y^2-20y+64) = 0 \end{cases}$$ №4.

Все a, для каждого из кот. $\exists$ b, при котором система имеет 4 решения.

$x^2+y^2=1$ $\quad x^2+(y-10)^2=6^2$



$ax-3y+4b=0$

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$

$\frac{6+36}{21}$ $\quad 6+\frac{41}{21}$

$6-36\frac{20}{21}$

$x^2+\frac{a^2}{9}x^2+\frac{8a}{9}bx+\frac{16}{9}b^2=1 \quad |\cdot 9$

$9x^2+a^2x^2+8abx+16b^2-9=0$

$D_1=16a^2b^2-(9+a^2)\cdot(16b^2-9)=$

$=16a^2b^2-9\cdot16b^2-16a^2b^2+81+9a^2=$

$=9a^2-9\cdot16b^2+81=9\cdot(a^2-16b^2+9)=$

$D_1=36+24\cdot46$

$9\cdot4+9\cdot(15\cdot79)$

$9(144$

$a^2 0$ $\quad a^2=16b^2-9$

$x^2+\left(\frac{ax}{3}-10+\frac{4}{3}b\right)^2=36$

$x^2+\frac{a^2x^2}{9}-\frac{10ax}{3}+\frac{4axb}{9}-\frac{10ax}{3}+100-\frac{40}{3}b+$

$+\frac{4axb}{9}-\frac{40}{3}b+\frac{16}{9}b^2=36 \quad |\cdot 9$

$9x^2+a^2x^2-30ax+4axb-30ax+900-120b+4axb-120b+16b^2-36\cdot9=0$

$16\cdot37$

$4\cdot37$

$x^2(9+a^2)-x(60a-8ab)-240b+16b^2+100\cdot9-36\cdot9=0$

900

120

$x^2(a^2+9)-2x(30a-4ab)-240b+16b^2+64\cdot9=0$

$\frac{240}{16}$ $\quad \frac{30}{2}$ $\quad \frac{900}{16}=\frac{225}{4}$

$D_1=(30a-4ab)^2-(a^2+9)\cdot(16b^2-240b+64\cdot9)=0$

$a^2(16b^2-240b+900)-(a^2+9)\cdot(16b^2-240b+900)+(a^2+9)\cdot36\cdot9=$

$=(16b^2-240b+900)(a^2-a^2-9)-(a^2+9)\cdot36\cdot9=(16b^2-240b+900)\cdot(-9)-(a^2+9)\cdot36\cdot9=$

$=(-9)\cdot(a^2+9)\cdot36+16b^2+\dots16b^2-240b+900)$

$16\cdot37b^2-240+900$

$4\cdot37b^2-60b+225=0$

900

$(a^2+9)\cdot36$ $\quad 36a^2+36\cdot9+(4b-30)^2=0$

$36(a^2+9)+(4b-30)^2=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$

$\log_5^4 2x = \frac{13}{3}\log_{2x} 5 - 3$

$\log_5^4 2x = \frac{13}{3\log_5 2x} - 3 \quad | \cdot 3\log_5 2x$

$3\log_5^5 2x + 9\log_5 2x - 13 = 0$

$\log_5^4 2x = t$

$3t^5 + 9t - 13 = 0$

$x > 0$
$y > 0$
$x \neq \frac{1}{2}$
$y \neq 1$

$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 32 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3}\log_y 5 - 3$

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 y} - 3$

$3t^5 + 9t + 13 = 0$

$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 4 \cdot 8$

$\log_2 4 = 2$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$

$\log_a b = \log_b a$

$\log_4 16 = 2$

$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

$\log_2 \frac{1}{2} = -1$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

$\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$

$\boxed{\frac{1}{\log_a b} = \log_b a}$

$\log^4 t = \log t - 3$

$\log t = -\log y - 3$

$3\log_5^5 2x + 3\log_5^5 y = -3\log$

$\log_5^5 2x = f(V)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4+5+4+5+5+5+6=34$

abc

№1

$ab : 2^{8} 3^{14} 5^{12}$

$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac : 2^{14} 3^{24} 5^{39}$

$abc = ac : 2^{34} 3^{55} 5^{68}$

$a^2b^2c^2 : 2^{34} 3^{55} 5^{68}$

$a+b=8$, $a+c=14$, $b+c=24$, $c=9$, $b=3$, $a=5$

$a = 2^{5} 3^{7} 5^{18}$ $b = 2^{3} 3^{7} 5$ $c = 2^{9} 3^{14} 5^{20}$

$abc \geq ac$

$a+b=14$, $b+c=20$, $a+c=21$, $a-b=1$, $a=7{,}5$ – невоз

$a+b=12$, $b+c=27$, $a+c=39$

$a+b+c=17$

$a+b+c=38$, $a+b=14$, $a=7$, $b=7$

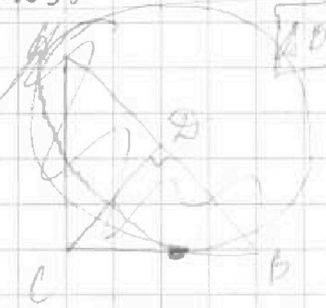
$a+b+c=34$

$a+b \geq 12$

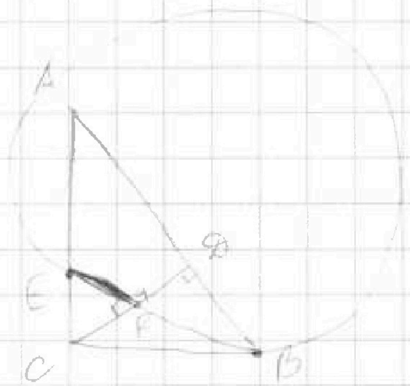
$2(a+b+c) \geq 69$, $4c \geq 39$

$a+b+c \geq 34$

39 $c=20$, $a=19$, $b=0$

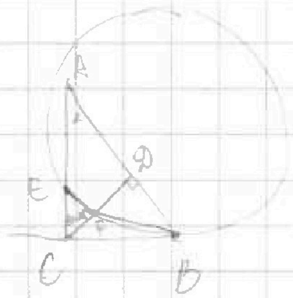


$AD \parallel EF$ $\frac{AD}{DB}=\frac{5x}{2x}$ $\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}}$ – ?



$AB \parallel EF$

$AD=5x$, $DB=2x$



$\frac{AD}{DB}=\frac{5}{2}$

$\Delta ADC \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$

$AC^2=5x\cdot 7x$

$CD^2=2x\cdot 5x$

$\Delta ADC \sim \Delta EFC$

$\Downarrow$

$\frac{AD}{EF}=\frac{CD}{CF}$

$\Delta BCD \sim \Delta CEF$

$\Downarrow$

$\frac{CD}{EF}=\frac{BD}{CF}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(\cos x) \le \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi-2x}{10}$

$\frac{\pi-2x}{10}$ – убывающая

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$D(y)$ $\frac{\pi-2x}{10}$

$E(y)$: $\in[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\frac{\pi-2x}{10} > -\frac{\pi}{2}$

$\pi - 2x > -5\pi$

$x < 3\pi$

$\frac{\pi-2x}{10} < \frac{\pi}{2}$

$\pi - 2x < 5\pi$

$x > -2\pi$

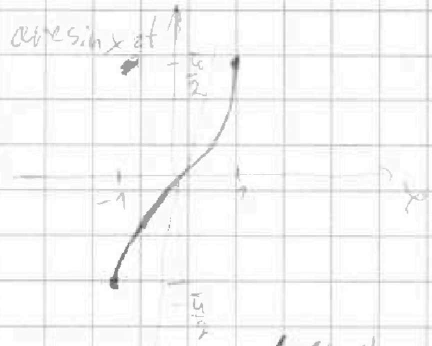
$x\in[-2\pi; 3\pi]$

$\sin t = x$

$\frac{\pi}{2}$ $\arcsin 0 = 0$

$\cos x$

$\arcsin x = t$



$(-1; 1)$

$\pi + 2 > 0$

$\pi - 2 > 0$

$\frac{\pi-2}{10}$ $\frac{\pi+2}{10}$

$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 6$

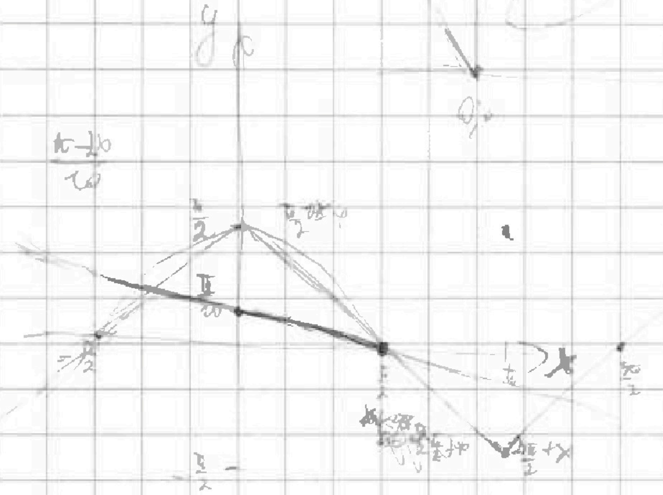
$\arcsin(\cos\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}$

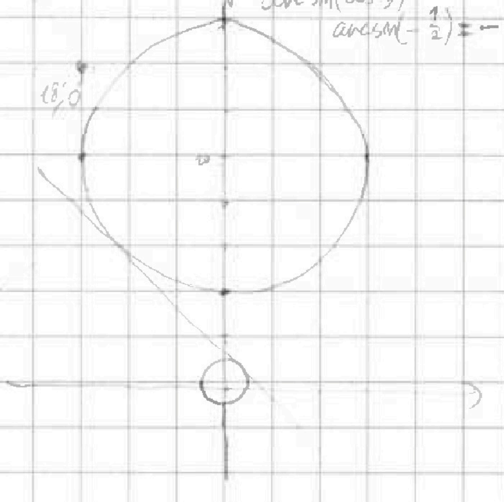
$\arcsin(\cos x)$

$\arcsin(\sin x) = t$

$\arcsin(\cos\frac{2\pi}{3})$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{3}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$BC^2 = 10y^2 + 25y^2 = 35y^2$

$EC = AC = EF = AB$

$CF = 5y \cdot 2y$

$\frac{EC}{AB} = \frac{\sqrt{35}y}{2x} = \frac{y}{x}$

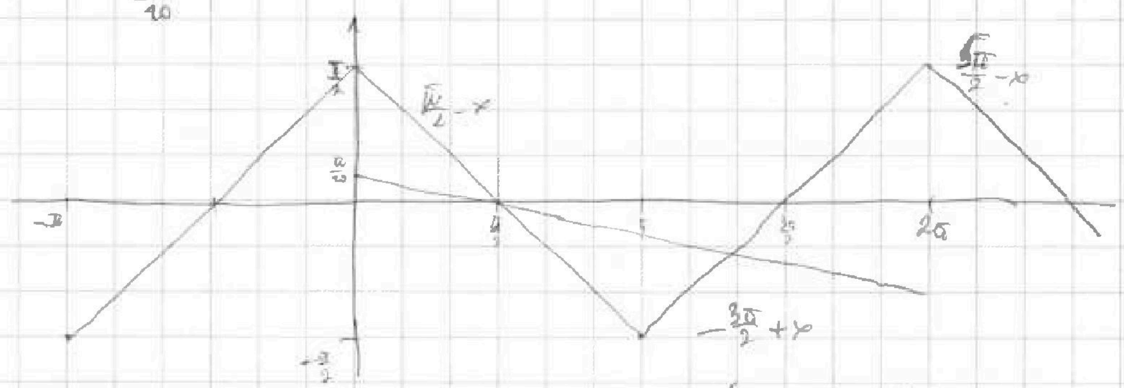
$10y^2 \cdot 10x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\log_5^3 x + \log_5 x$

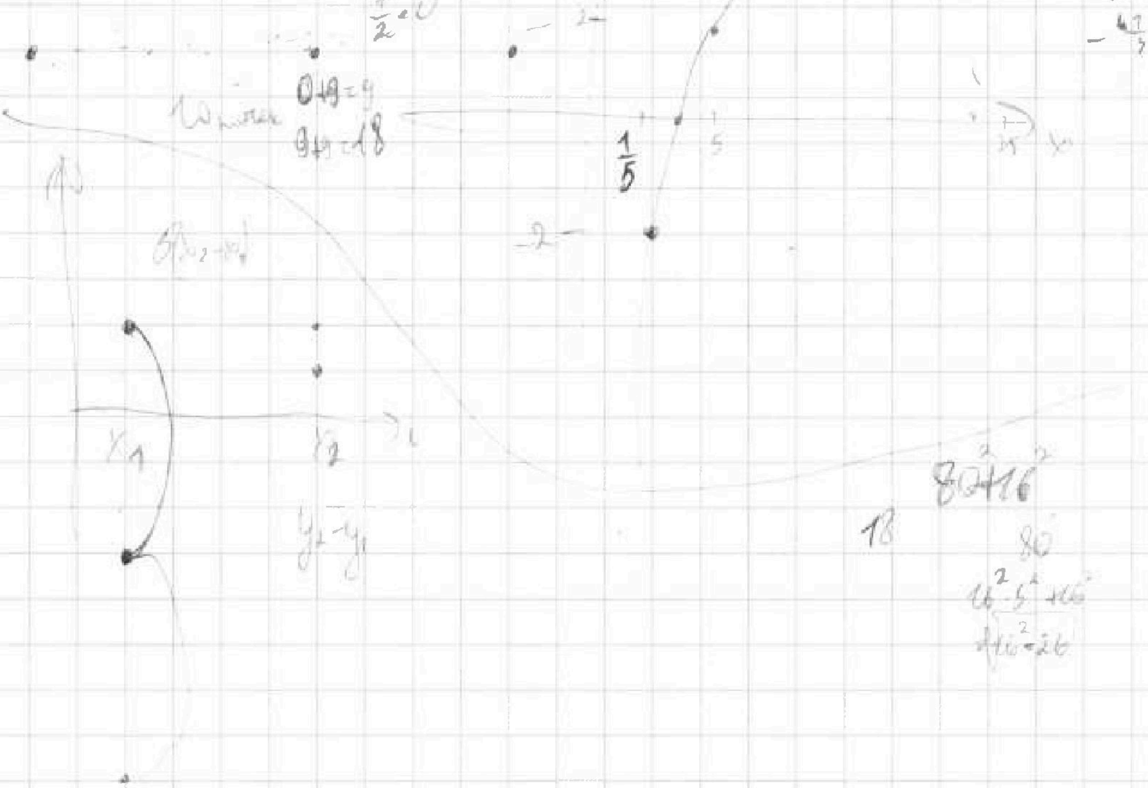
$\log_5^2 x + \log_5 x$

$0+0$

-1

$x=1$

$\log_{5}\frac{1}{5} = -1$



$0+9=9$

$9+9=18$

$y_2 - y_1$

18

$8^2 + 16^2$

80