МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $ab = k\cdot 2^{8}\cdot 3^{19}\cdot 5^{12}$

$bc = m\cdot 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$

$ac = n\cdot 2^{15}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

$\Rightarrow$ ~~$ab\cdot bc\cdot ac = (abc)^2 \ldots 2^{31}\ldots 3$~~

где $k, m, n \in \mathbb{N}$

$ab\cdot bc\cdot ac = (abc)^2 = kmn\cdot 2^{39}\cdot 3^{55}\cdot 5^{58}$

Причём тогда возможно нужно, чтобы все степени всех чисел в разложении были чётными, т.к. квадрат.

~~Приведём пример такого числа~~

~~$a = 2^{5}\cdot 3^{8}\cdot 5^{17}$~~

Вт т.к. $(abc)^2 = 2^{39+2x}\cdot 3^{56+2y}\cdot 5^{68+2z}$

где $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x, y, z \geq 0$

$\Rightarrow abc = 2^{17+x}\cdot 3^{28+y}\cdot 5^{39+z}$

поскольку $a = \frac{abc}{bc}$, $b = \frac{abc}{ac}$, $c = \frac{abc}{ab}$, то abc должно нацело делиться на каждое из чисел ab, bc, ac т.е.

$$\begin{cases} 17+x \geq \max(8, 12, 15) \Rightarrow x = 0 \\ 28+y \geq \max(19, 20, 21) \Rightarrow y = 0 \\ 39+z \geq \max(12, 17, 30) \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$ — минимальные значения

$\Rightarrow abc = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$. Приведём такие a, b и c:

$a = 2^{5}\cdot 3^{8}\cdot 5^{22}$; $b = 2^{3}\cdot 3^{7}\cdot 5^{0}$; $c = 2^{9}\cdot 3^{15}\cdot 5^{17}$.

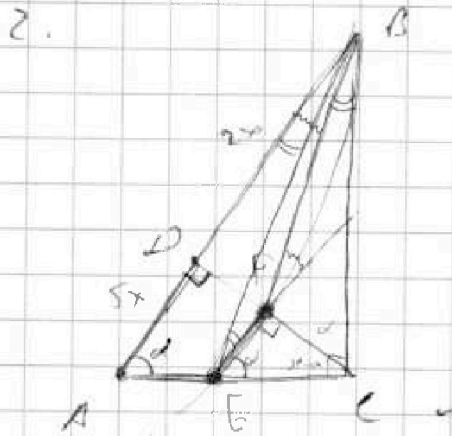
Ответ: $\boxed{2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

Т.к. $AB \parallel EF \Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$ (накрест леж.).

Поскольку BC – касательная к окружности, то $\angle FBC = \frac{1}{2} \cup FB$ (теор. о касательной)

но $\angle BEF = \frac{1}{2} \cup FB$ (опис. вписанный угол, опир. на FB)

$\Rightarrow \angle BEF = \angle FBC$. Но $\angle BEF = \angle ABE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBC = \angle ABE$. Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle FEC = \alpha$ (из $\parallel$). $\Rightarrow \angle ECF = 90 - \alpha \Rightarrow \angle FCB = \alpha$.

$\triangle AEB \sim \triangle BFC$ ($\angle ABE = \angle FBC$, $\angle BAE = \angle FCB = \alpha$).

$\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB}$ (1)

$\Rightarrow FC = \frac{AE}{AB} BC$. Пусть $AD = 5x$, $BD = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$ (т.к. высота прямоуг.) $\Rightarrow AC = x\sqrt{35}$ (по т. Пифагора для $\triangle ADC$.) и $BC = x\sqrt{14}$ (аналогично). Из (1): $\frac{FC}{x\sqrt{14}} = \frac{AE}{7x} \Rightarrow AE = \frac{7}{\sqrt{14}} FC$

Из того, что $\triangle ADC \sim \triangle EFC \Rightarrow$

~~$AC = AE + EC \Rightarrow \frac{AE}{AC} + 1 = \frac{x\sqrt{10}}{FC}$, то $AE = \frac{7}{\sqrt{14}} FC$~~

~~$\Rightarrow \frac{\frac{7}{\sqrt{14}} FC}{x\sqrt{35}} + 1 = \frac{x\sqrt{10}}{FC} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{14}} FC^2 + x\sqrt{35} FC - x^2\sqrt{350} = 0$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{\frac{EG}{CF} = \frac{AE}{AD} = \frac{10\sqrt{35}}{5\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{2}{5}}EF.}$

$\Rightarrow \cancel{AE = AC - EC = x\sqrt{35} - \sqrt{\frac{7}{5}}EF,\ \text{но}\ AE = \frac{2}{\sqrt{15}}FC}$

$\frac{EC}{FC} = \frac{AC}{CD} = \frac{10\sqrt{35}}{6\sqrt{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{7}{2}}FC.$

$AE = AC - EC = AC - \sqrt{\frac{7}{2}}FC$, но $AC = \frac{2}{\sqrt{15}}FC \Rightarrow$

$\Rightarrow AC - \sqrt{\frac{7}{2}}FC = \sqrt{\frac{3}{2}}FC \Rightarrow FC = \frac{AC}{\sqrt{15}} = \frac{x\sqrt{35}}{\sqrt{15}} = x\sqrt{\frac{5}{2}}.$

Т.к. $\triangle GFC \sim \triangle ABC$ (угол по α). $\Rightarrow$

$\frac{S_{ABC}}{S_{GFC}} = \left(\frac{BC}{FC}\right)^2 = \left(\frac{x\sqrt{15}}{x\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)^2 = \frac{15}{5}\cdot 2 = \boxed{\frac{26}{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

Т.к. $\arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то

$-\frac{\pi}{2} \le \pi - 2x \le \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} \ge 2x - \pi \ge -\frac{\pi}{2}$

$\frac{3}{2}\pi \ge 2x \ge \pi$

$\boxed{\frac{3}{4}\pi \ge x \ge \frac{\pi}{2}}$ — ОДЗ.

Известно, что $\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}$ для любого y. (у ОДЗ)

$\Rightarrow$ ~~arccos y = π/2 arcsin y~~ $\Rightarrow$

~~arccos(cos x) = π/2~~ $\Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$

$= \frac{\pi}{2} - x$ (для $x \in$ ОДЗ) $= [\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi]$.

Заменим: $10(\frac{\pi}{2} - x) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$\cancel{5}\ = 8x$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$.

Ответ: $\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

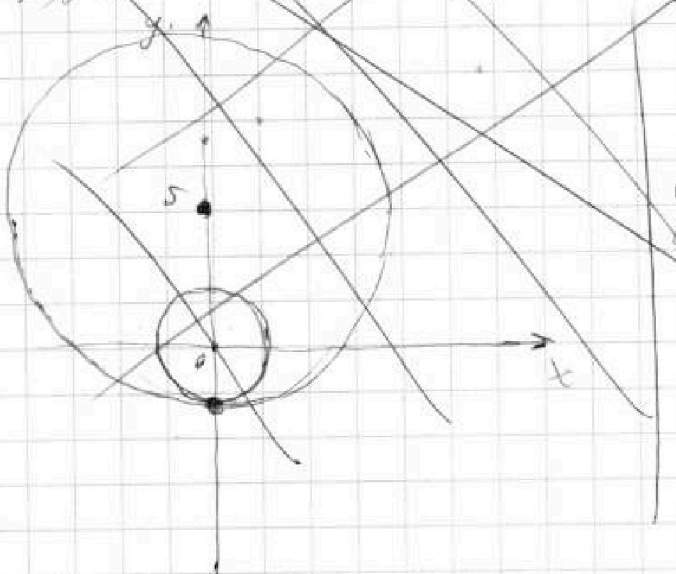
МФТИ

4. $$\begin{cases} ax - 3y + 5b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+65)=0 \end{cases}$$

Второе уравнение равносильно:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-20y+65=0 \iff x^2+(y-10)^2-100+65=0 \\ \qquad\qquad x^2+(y-10)^2=36=6^2 \end{array}\right.$$

~~В системе координат xy такая совокупность задает две окружности с центрами в точках $(0;0)$, $(0;5)$ с радиусами 1 и 6 соотв.~~

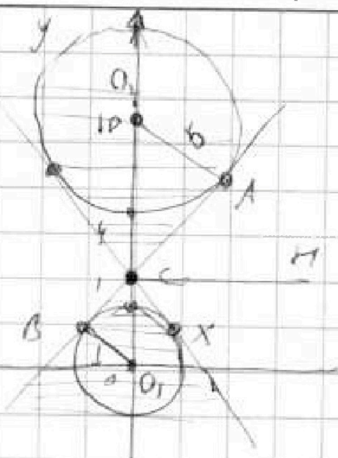


~~Очевидно, что окружности касаются друг друга, т.к. расстояние между центрами (5) равно сумме радиусов меньшей (1) и радиуса большей (6)~~

В системе координат xy эта совокупность задает две окружности с центрами $(0;0)$, $(0;10)$, радиусами 1 и 6 соотв.:

Уравнение $ax-3y+5b=0$ задает прямую

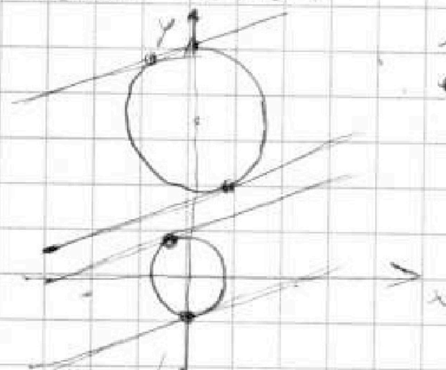
$y = \frac{a}{3}x + \frac{5}{3}b$.



Проведем общие внутренние касательные к окружностям.

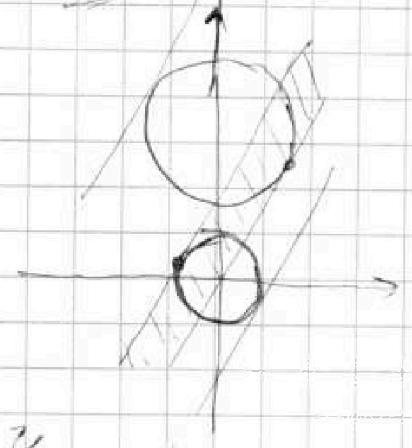
Докажем, что если для данного a можно выбрать такое b, что следующие прямые будут пересекать окружности в 4-х точках, то такие прямые лежат в области, обозначенной на рисунке.

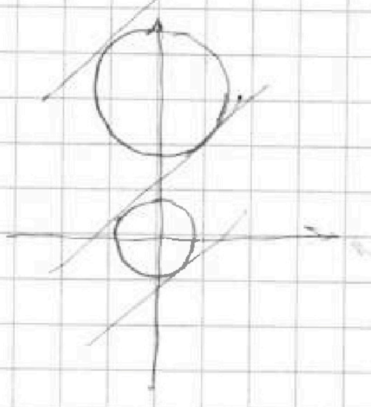
Действительно, если наклон не принадлежит указанному интервалу, то будем «тянуть» прямую из $-\infty$ в $+\infty$, обозначая точки касания:



Мы видим, что для такой прямой имеется либо 0, либо 1, либо 2 пересечения при параллельном переносе снизу вверх.

3 и 4 точки пересечения появляются только при внутреннем касании и дальнейшем движении угла наклона.





Четыре точки пересечения будут только в области, обозначенной на рисунке штриховкой, т.е. угол наклона прямой должен лежать в области между двумя внутр. касательными.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Найдём эти касательные. Из рисунка

$$\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{BO_1}{O_2A} = \frac{1}{6} \Rightarrow O_1C = \frac{1}{6}CO_2$$

Но $O_1C + CO_2 = O_1O_2 = 10 \Rightarrow \frac{7}{6}CO_2 = 10 \Leftrightarrow CO_2 = \frac{6}{7}\cdot 10$

$CO_1 = \frac{1}{7}\cdot 10.$

Пусть $CH \perp O_1O_2$. $\operatorname{tg}\angle ACH = \operatorname{ctg}\angle O_2CA = \frac{CA}{O_2A}$. Но по т. Пифагора $CA = \sqrt{O_2C^2 - O_2A^2} = 6\sqrt{\frac{100}{49} - 1} = 6\sqrt{\frac{51}{49}} = \frac{6}{7}\sqrt{51} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\angle ACH = \frac{\sqrt{51}}{7}.}$

$$\operatorname{tg}\angle HCX = \operatorname{tg}\angle XCO_1 = \operatorname{ctg}\angle O_1CB = \frac{BC}{BO_1}$$

Но $BC = \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \sqrt{\frac{51}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \operatorname{tg}\angle HCX = \frac{\sqrt{51}}{7}$

Т.к. тангенс наклона прямой это $\frac{a}{3}$, то

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{3} < -\operatorname{tg}\angle HCX \\ \frac{a}{3} > \operatorname{tg}\angle HCA \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a \in \left(-\infty; -\frac{3}{7}\sqrt{51}\right) \cup \left(\frac{3}{7}\sqrt{51}; +\infty\right)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. $\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 32 - 3 \end{cases}$

ОДЗ: $x>0,\ x \neq \frac{1}{2};\ y>0;\ y\neq 1$

Преобразуем первое:

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{\log_{2x}625}{\log_{2x}2x^3} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{1}{3}\log_{2x}5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

(1) $$\log_5^4(2x) - \frac{1}{\log_5 2x}\cdot\frac{13}{3} + 3 = 0$$

Преобразуем второе:

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3}\frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$$

(2) $$\log_5^4 y + \frac{13}{3}\frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$$

Вычтем из (1) (2):

$$(\log_5^2(2x) - \log_5^2 y)(\log_5^2(2x) + \log_5^2 y) - \frac{13}{3}\left(\frac{1}{\log_5 2x} + \frac{1}{\log_5 y}\right) = 0$$

$$(\log_5 2x + \log_5 y)(\log_5 2x - \log_5 y)(\log_5^2 2x + \log_5^2 y) - \frac{13}{3}\left(\frac{\log_5 2x + \log_5 y}{\log_5 2x \cdot \log_5 y}\right) = 0$$

Замена $\boxed{a = \log_5 2x,\quad b = \log_5 y}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases} \qquad a+b-2$$

~~(a-b)~~ Из первого вычтем второе:

$$(a^2-b^2)(a^2+b^2) - \frac{13}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$$

(3) $(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3ab}\right) = 0$

Домножим первое на a, второе — на b.

$$\begin{cases} a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0 \\ b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

Сложим: $3a^5 + 3b^5 + 9(a+b) = 0$

$3(a^5+b^5) + 9(a+b) = 0$

$a^5 + b^5 \,|\, a+b$

$a^5 + a^4 b \quad | \quad a^4 + b^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3$

$b^5 - a^4 b$

$b^5 + a b^4$

$-a^4 b - a b^4$

$-a^4 b - a^3 b^2$

$a^3 b^2 - a b^4$

$a^3 b^2 + a^2 b^3$

$-a^2 b^3 - a b^4$

$-a^2 b^3 - a b^4$

0

(4) $(a+b)\left(3(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4) + 9\right) = 0$

Из (3):

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{\log_5(2xy)\left(\log_5\left(\frac{2x}{y}\right)(\log_5^2 2x+\log_5^2 y)-\frac{13}{3(\log_5 2x\log_5 y)}\right)=0}$

~~Пусть~~ $\cancel{a=\log_5 2x,\ b=\log_5 y}$

$\cancel{\log_5(2xy)\left((a-b)(a^2+b^2)-\frac{13}{3ab}\right)=0}$

5) $(a+b)\left(3ab(a^3+a^2b+ab^2-b^3)+13\right)=0$

Вычтем из 4 5:

$\cancel{(a+b)\left(3a(a^3-a^2b+ab^2-b^3)+3b^4+9-3ab(a^3-a^2b+ab^2-b^3)-13\right)=0}$

Рассмотрим уравнение $3x^5+9x-13=0$

Возьмем производную $15x^4+9>0$ при любых x

Ф-ция $3x^5+9x$ возрастает $\Rightarrow$ уравнение имеет ровно 1 корень. Аналогично для уравнения $3x^5+9x+13=0$

Следовательно у системы:

$$\begin{cases}3a^5+9a-13=0\\3b^5+9b+13=0\end{cases}$$ ровно 1 решение.

Из предыдущих рассуждений ~~...~~ следует (т.к. решение одно) $a+b=0$ и $a=-b$ (можно проверить и убедиться).

Т.к. $a=\log_5 2x$ и $b=\log_5 y$, то

$a+b=\log_5 2x\cdot y=0 \Rightarrow 2xy=1 \Rightarrow xy=0{,}5$

Ответ: $\boxed{0{,}5}$

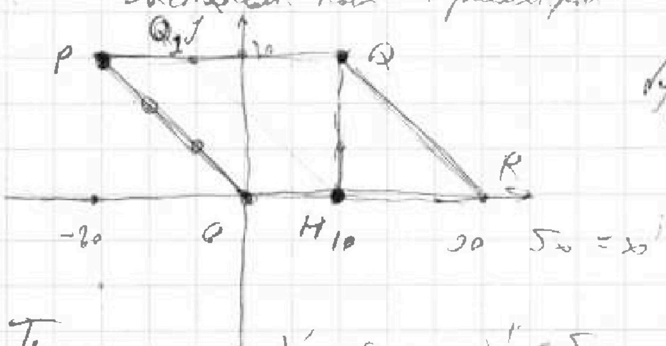
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

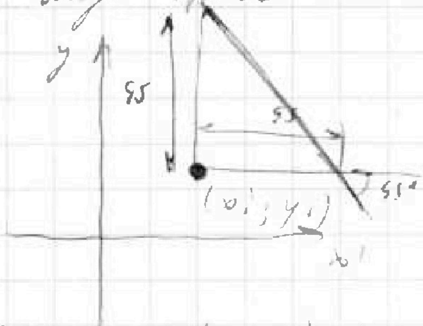
6. Растянем наш параллелограмм в 5 раз по оси Ox, т.е. будет обозначено для всех x: $x' = 5x$.



Тогда $x_1' = 5x_1$, $x_2' = 5x_2$ $\Rightarrow$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 95 \Leftrightarrow x_2' - x_1' + y_2 - y_1 = 95.$

~~Для~~ Для каждого $(x_1'; y_1)$ множество выражается в виде прямой:



Т.к. у самого параллелограмма стороны наклонены под 45°, то для каждой точки A левее внутри $OPQR$ с $x' \le 10$ есть ~~прямая~~ точная прямая с набором точек $(x_2'; y_2)$ на каждой из которых $20 + 1 = 21$ пара точек $(x_2'; y_2)$. Всего допустимых точек $A(x_1'; y_1)$ — это кол-во точек в фигуре $OPQH$. Это кол-во легко найти, посчитав кол-во точек в п-ме OPQ_1H и прибавив все отдельные:

$21 \cdot (10+1) = 21 \cdot 11 = 231$ — в OPQ_1H.

Отдельно: $20 + 19 + \ldots + 2 + 1 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 21 \cdot 190$

Всего — $231 + 3990 = \boxed{9131}$

Т.к. для каждой A существует 21 B, то ответ: $\boxed{9131 \cdot 21}$ $\boxed{339611}$

$21 \cdot 11 = 231$
$21 \cdot 190 = 3990$
$3990 + 231 = 9131$
$9131 \cdot 21 = 339611$

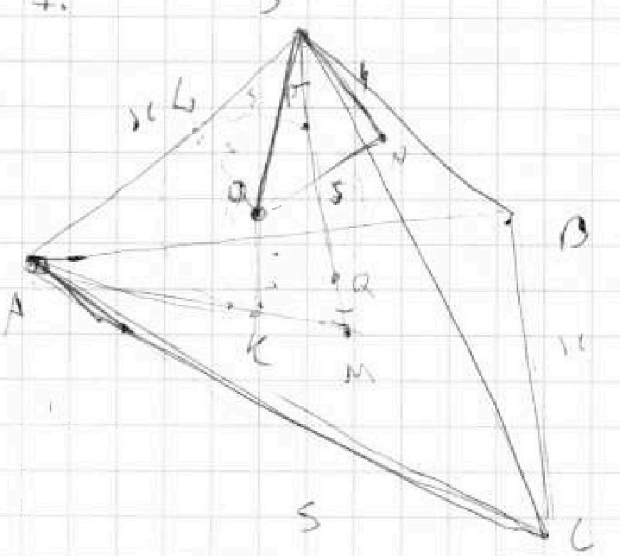
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

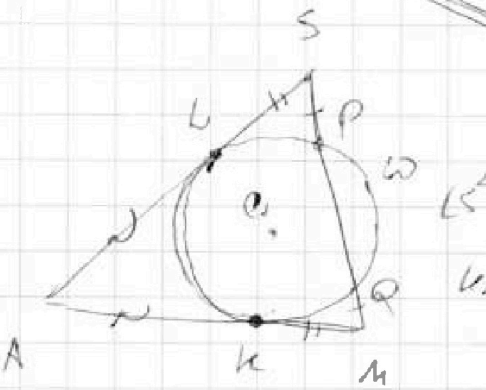
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

7.



а) Т.к. Ω касается плоскости ABC, то OK ⊥ AM, где O — центр Ω.
Рассмотрим ~~...~~ треугольник ASM. Тогда сечение Ω этой плоскостью — окружность ω с центром O_1.



По теореме о ~~...~~ секущих

$LS^2 = SP\cdot SQ$

$KM^2 = MQ\cdot MP$

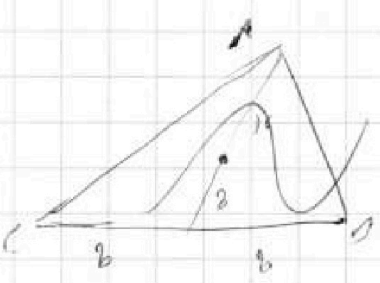
но $MQ = SP \Rightarrow LS^2 = KM^2 \Rightarrow LS = KM$

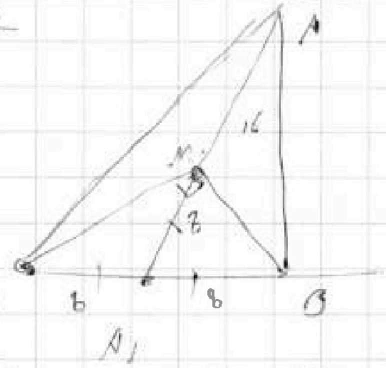
$AL = AK$ как касательные из одной точки

б)

ΔASM — равнобедр. и $AS = AM \Rightarrow AM = 16$

Рассмотрим ΔABC





$CA_1 = A_1B = 8$. M — точка пересеч. медиан $\Rightarrow A_1M = \frac{1}{2}AM = 8$.

$\Rightarrow A_1M = CA_1 = A_1B = 8 \Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$ Пусть $\angle MA_1B = \alpha$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ ~~$AA_1 \cdot CB \sin\alpha$~~ $= \frac{1}{2}AA_1 \cdot CB\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 16\cdot\sin\alpha =$

$= 12\cdot 16\cdot\sin\alpha$ но $S_{ABC} = 100$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{100}{12\cdot 15} = \frac{25}{12\cdot 5} = \sqrt{\frac{25}{52}}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{52^2-29^2}{52^2}} = \frac{\sqrt{23\cdot 73}}{52} =$

~~MB~~ $=$ Т.к. медиана? ~~$MB =$~~ ~~$\frac{8^2+8^2}{2\cdot 8\cdot 8\cos\alpha}$~~

$MB = \sqrt{8^2+8^2 - 2\cdot 8^2\cdot\frac{\sqrt{23\cdot 73}}{52}}$ $\quad BB_1 = \frac{3}{2}MB$

$MC = \sqrt{8^2+8^2 + 2\cdot 8^2\frac{\sqrt{23\cdot 73}}{52}}$ $\quad CC_1 = \frac{3}{2}MC$

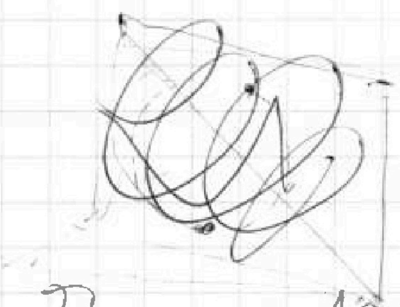
$BB_1\cdot CC_1 = 8^2\cdot\frac{9}{4}\sqrt{\left(2-2\frac{\sqrt{23\cdot 73}}{52}\right)\left(2+2\cdot\frac{\sqrt{23\cdot 73}}{52}\right)} =$

$= 8^2\frac{9}{4}\cdot 2\sqrt{1-\frac{52^2-29^2}{52^2}} = 8^2\cdot\frac{9}{2}\cdot 2\cdot\frac{25}{52} =$

$= \frac{\cancel{64}\cdot 9}{2\cdot\cancel{52}}\cdot 25 = 150$.

$\Rightarrow AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 150\cdot 24 = 3600$

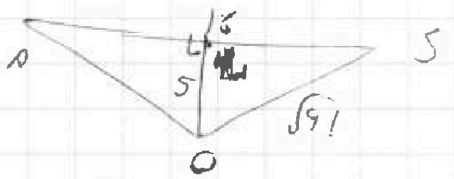
б)



Т.к. Ω касается SBC в т. N, то $ON = 5$, $SN = 4$

$\Rightarrow$ по Пифагору $OS = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$.

Рассмотрим $\triangle AOS$: Пусть $OL \perp AS \Rightarrow$



$OL = R = 5$ (т.к. Ω касается AS)

$\Rightarrow LS = \sqrt{OS^2 - OL^2} = 4$

$\Rightarrow AL = 16 - 4 = 12$

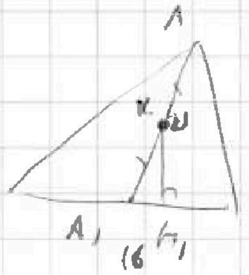
Также легко понять, что ~~AHO~~ $AL = AK \Rightarrow$

$AK = 12 \Rightarrow KA_1 = AA_1 - AK = 24 - 12 = 12$.

~~Если сфера касается двух касательных, то~~

Ω касается ABC и SBC. ~~Изобразим~~ Найдем ~~р~~

расстояние от K до BC. Т.к. K — середина AA_1,



$(AK = 12,\ AA_1 = 24) \Rightarrow$

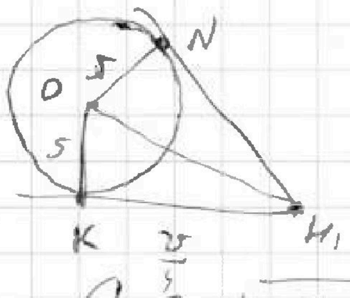
$KH_1 = \frac{1}{2} AH$, где KH_1, AH — высоты

из точек K и A соотв.:

Из $AH \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = S = 100 \Rightarrow$

$\frac{1}{2} AH = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$.

Т.к. Ω касается ABC и SBC, то рассмотрим сечение плоскостью проходящей через т $O \perp BC$.



$\operatorname{tg}\angle KH_1O = \frac{5}{\frac{25}{4}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \angle NH_1K = \boxed{2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}}$.

Ответ: $\boxed{2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}}$