



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot k_1$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot k_3$$

$$abc = 2^{d_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{d_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{d_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3.$$

Заметим, что так как мы ищем $\min abc$, то k_1, k_2 и k_3 мы можем приравнять к нулю.

$$\Delta (abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

П.к. $(abc)^2$ - квадрат $\Rightarrow (abc)^2 : 3^{2n}$, $(abc)^2 : 3^{59} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{60} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

Заметим, что $ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28} \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

П.к. числа натуральные, то $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Он достигается при $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$, $b = 2^2 \cdot 3^5$ и $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

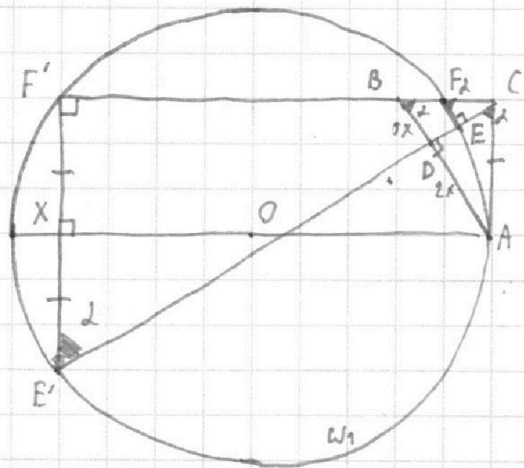
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
~~Δ~~ ACB - туп. $\angle ACB = 90^\circ$



Решение:

- 1) Прямые CD и CB до второй т. пересекаются с отр. ω_1 : $CD \cap \omega_1 = E'$, $CB \cap \omega_1 = F'$.
- 2) П.к. $AB \parallel FE \Rightarrow \angle CFE \doteq \angle ABC$ и $FE \perp CD$.
- 3) П.к. $EFF'E'$ - впис. 4-угол. $\Rightarrow \angle FF'E' = 180^\circ - \angle FEE' = 90^\circ$ и $\angle CE'F' = \angle CFE = \alpha$
- 4) П.к. CD - высота в туп. $\Delta ABC \Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{2x \cdot 2x} = x\sqrt{10}$, где $2x = BD$.
- 5) П.к. ΔCDB - туп. $\Rightarrow \operatorname{tg} \angle CBD = \frac{CD}{BD} = \frac{x\sqrt{10}}{2x} = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$
- 6) П.к. $AC \perp BC$ и $E'E' \perp CF' \Rightarrow AC \parallel E'E'$.
- 7) П.к. A - т. касания AC и $\omega_1 \Rightarrow OA \perp AC$, а $AC \parallel E'E' \Rightarrow OA \perp E'E'$.
- 8) П.к. $AC \parallel E'E'$ и $AO \parallel CF'$ ($AO \perp E'E'$ и $CF' \perp E'E'$) $\Rightarrow ACF'X$ ($X = AO \cap CF'$) - параллелограмм. $\Rightarrow AC = E'X = \frac{E'F'}{2}$ (п.к. хорда \perp диаметру делится пополам)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10) \triangle ACD: \triangle ACD - \text{пря.} \Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = x \sqrt{\frac{35}{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{вып. п. 9 } EF' = 2x \sqrt{14}$$

$$11) \text{Пл. к. } \triangle CF'E' - \text{пря.} \Rightarrow CF' = E'F' \cdot \operatorname{tg} \angle CE'F' = 2x \sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{5x \sqrt{14}}{4 \sqrt{5}}$$

$$12) \text{Пл. к. } CF' - \text{сис. и } CA - \text{кас. к } \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CA^2 = CF \cdot CF' \Rightarrow CF = \frac{35x^2}{\frac{5x \sqrt{14}}{4 \sqrt{5}}} = \frac{4 \sqrt{5}}{\sqrt{14}} = x \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{35}}{2} x$$

$$13) \triangle BCD: \triangle BCD - \text{пря.} \Rightarrow BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = x \sqrt{35}$$

$$14) \text{Пл. к. } \triangle BCD \sim \triangle CEF \text{ по 2-м углам} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{BD} = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = x \sqrt{\frac{35}{2}} \cdot \frac{5x}{2} \text{ и } CE = x \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$15) \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDA}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot EF}{\frac{1}{2} CD \cdot AD} = \frac{\frac{5x}{2} \cdot x \sqrt{\frac{5}{2}}}{x \sqrt{10} \cdot 2x} = \frac{5}{8}$$

Ответ: 5 : 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

П.к. $f(x) = \arccos x$ принимает значения от 0 до π включительно \Rightarrow

$$\Rightarrow 10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 5\pi - 10 \arcsin(\sin x)$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$-10 \arcsin(\sin x) + 2x = 4\pi$$

$$x - 5 \arcsin(\sin x) = 2\pi$$

Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$x - 5x = 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \text{удовл. условию, ограничению}$$

Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\cancel{x - 5(x - \pi) = 2\pi}$$

$$\cancel{-4x = -3\pi}$$

$$\cancel{x = \frac{3\pi}{4} - \text{удовл. ограничению}}$$

$$x - 5(\pi - x) = 2\pi$$

$$6x = 7\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} - \text{удовл. усл.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Если } x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right], \text{ то}$$

$$x - 5(x - 2\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -8\pi$$

$$x = 2\pi - \text{углы. опер.}$$

$$\text{Если } x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right], \text{ то}$$

$$x - 5(3\pi - x) = 2\pi$$

$$6x = 17\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6} - \text{углы. опер.}$$

$$\text{Если } x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right], \text{ то}$$

$$x - 5(x - 4\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -18\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} - \text{углы. опер.}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17\pi}{6} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

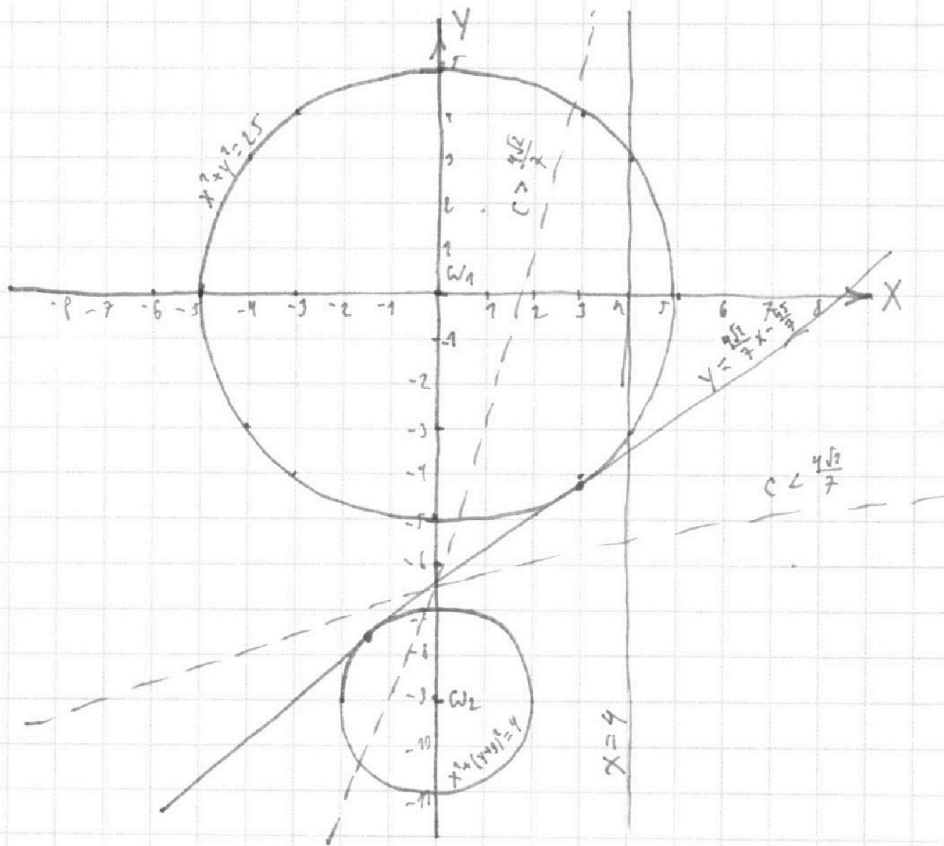


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+1)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$



Если $a = 0$, то $x = \frac{b}{5}$ имеет 4 точки пересечения при $b \in (-10; 10)$. $\Rightarrow a = 0$ или не подходит.

Если $a \neq 0$, то

$$y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 $a < 0$, если $a > 0$, но рассмотрим отдельно, когда

$$y = cx + d, \text{ где } c > 0.$$

Заметим, что когда $y = cx + d$ совпадает с внутренней касательной

окружностей ω_1 и ω_2 , то тогда $a = \frac{-5}{6c}$ нам подходит.

$$\text{Ур-ние касательной: } y = \frac{4\sqrt{2}}{7}x - \frac{45}{7} \Rightarrow a = \frac{-35}{24\sqrt{2}} = \frac{-35\sqrt{2}}{48}$$

Поэтому нам подходит ур-ние касательной. Т.к. мы зафиксировали a ,
то можем двигаться только b , т.е. d . Если $d \uparrow$, то прямая уже не будет
касаться ω_2 и будет ≤ 2 точек пересечения, аналогично, если $d \downarrow$.

Если $c \leq \frac{4\sqrt{2}}{7}$, то наша прямая уже не будет касаться 2-ух окр. и

пересекать соответственно, т.е. $c \in [0; \frac{4\sqrt{2}}{7}]$ нам подходит \Rightarrow

$$\Rightarrow a \in \left[\frac{35\sqrt{2}}{48}, +\infty \right) \text{ подходит.}$$

Если $c > \frac{4\sqrt{2}}{7}$ и $d = -\frac{45}{7}$, то наша прямая будет пересекать 2 окружности, но
уже не подойдет, т.к. будет 4 решения.

Аналогично, если $a > 0$, но получим. $a \in \left[\frac{35\sqrt{2}}{48}, +\infty \right)$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{35\sqrt{2}}{48} \right] \cup \left[\frac{35\sqrt{2}}{48}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5} 11 = \log_{0,125y} (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0,5y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

Пусть $u = \log_{11} x$, а $v = \log_{11}(0,5y)$, то $u \neq 0$ и $v \neq 0$, т.к. $x \neq 1$ и $0,5y \neq 1$

$$\begin{cases} u^4 - \frac{6}{u} = -\frac{2}{3u} - 5 \\ v^4 + \frac{1}{v} = -\frac{13}{3v} - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} u^4 + 5 - \frac{16}{3u} = 0 \\ v^4 + 5 + \frac{16}{3v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u^5 + 45u - 16 = 0 \\ 3v^5 + 15v + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta F(u) = 3u^5 + 15u - 16$$

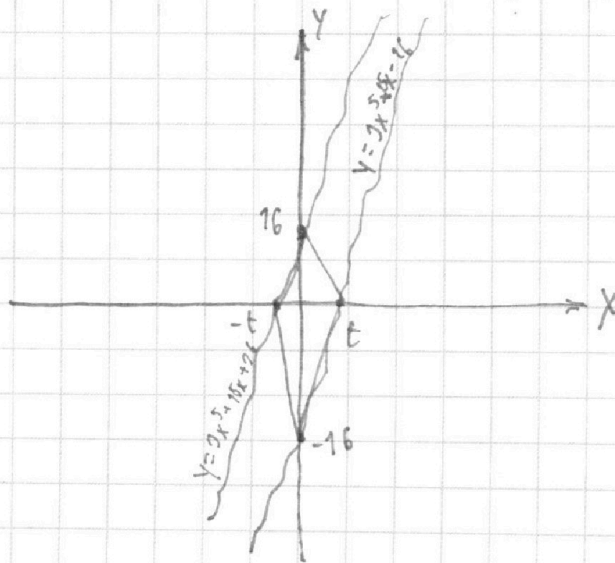
$$F'(u) = 15(u^4 + 1) > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow F$ - возр. ф-ция

$$g(v) = 3v^5 + 15v + 16$$

$$g'(v) = 15(v^4 + 1) > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow g$ - возр. ф-ция.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $f(x)$ и $g(x)$ - это ф-ции, полученные переносом
переносом $3x^5 + 15x$ на 16 вниз для f и 16 на вверх для g .

А $3x^5 + 15x = 0$ имеет един. корень $x=0$, тогда в силу симметрии \Rightarrow

\Rightarrow если f имеет корень x_0 , то g имеет корень $-x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall u = -v$

$$\log_{11} x = -\log_{11} 0,5y = \log_{11} \frac{2}{y}$$

$$x = \frac{2}{y}$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2

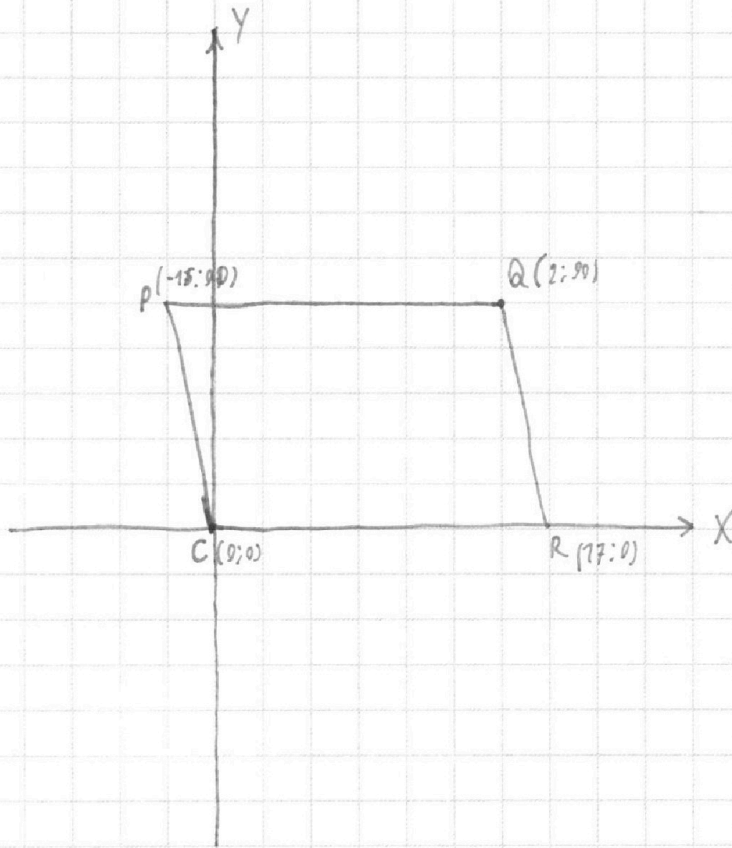
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Δ $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$. Заметим, что $6x_2 - 6x_1 : 6$ и $48 : 6 \Rightarrow$

\Rightarrow н.к. $y_2, y_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_2 - y_1 : 6 \Rightarrow y_2 \equiv y_1 \pmod{6}$.

$y_2 = 6t_2 + r$ и $y_1 = 6t_1 + r$.

Заметим, что если мы знаем пару $(x_1, x_2; t_1, t_2)$, то нам удобнее всего
в пар y_1 и y_2 .

Тогда сложим координаты по y в ряд и посмотрим в систему (хотя)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, то

$$x - 5(x - 2\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -8\pi$$

$$x = 2\pi - \text{углов. опреп.}$$

Если $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$, то

$$x - 5(3\pi - x) = 2\pi$$

$$6x = 17\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6} - \text{углов. опреп.}$$

Если $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$, то

$$x - 5(x - 4\pi) = 2\pi$$

$$-4x = -18\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} - \text{углов. опреп.}$$

Ответ: $\left[x = \right.$



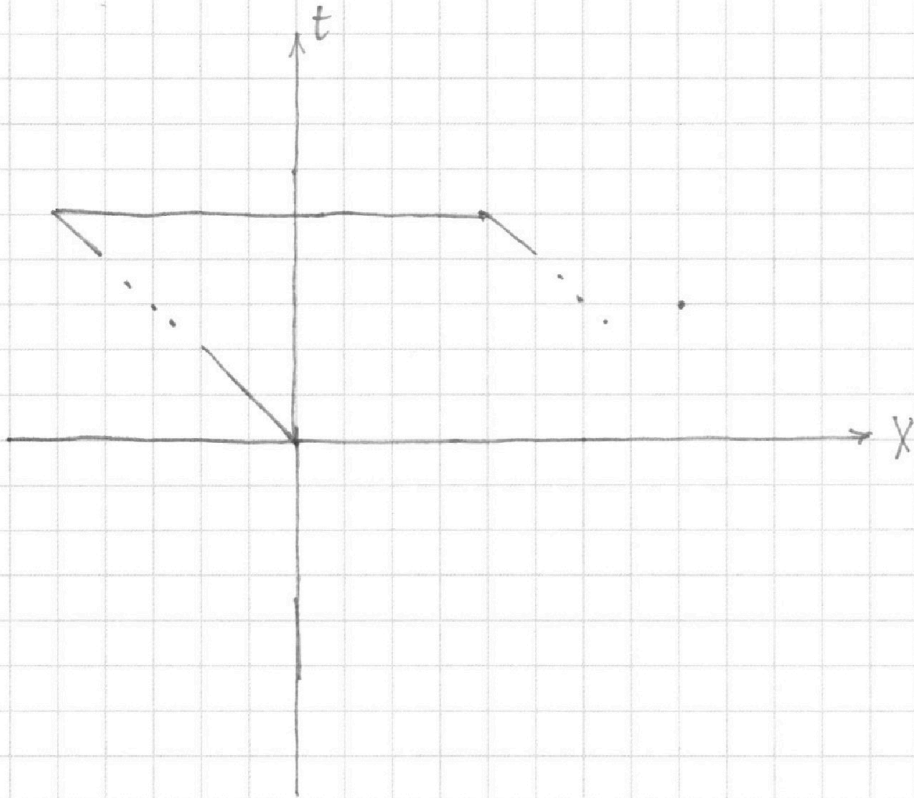
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

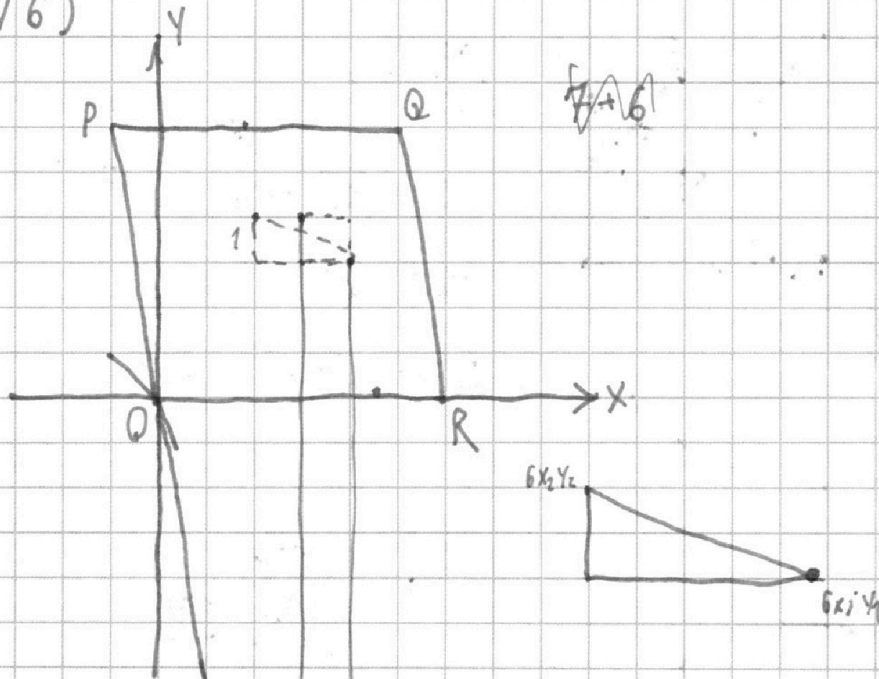
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



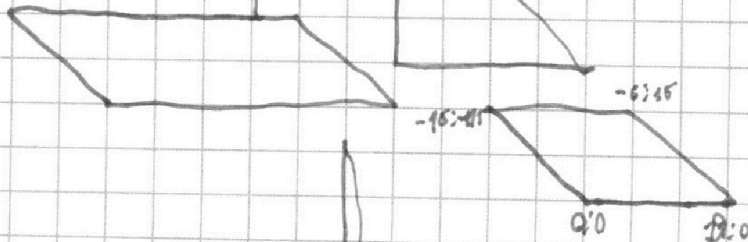
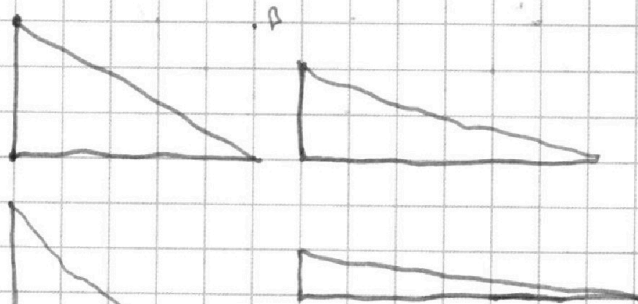
N 6)



$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

$$y_2 - y_1 = 6z_1$$

$$x_2 - x_1 + z_2 - z_1 = 8$$



0 1 2

$$8 \cdot 18 = 144$$

$$16 \cdot 10 = 160$$

$$16 \cdot 9 = 144$$

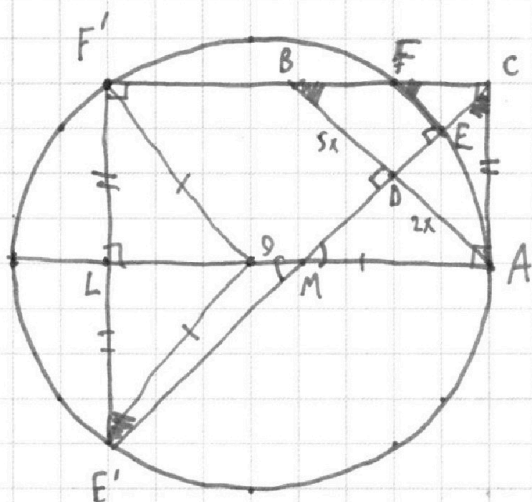
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{AC} = \frac{AC}{CF'}$$

$$BC = x\sqrt{35}$$

$$CD = x\sqrt{10} \Rightarrow AC = x\sqrt{14}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$LM = x\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2x\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$AL = \frac{4x\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = CF'$$

$$14x^2 = 0x \cdot \frac{4x\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \frac{14\sqrt{5}}{24\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

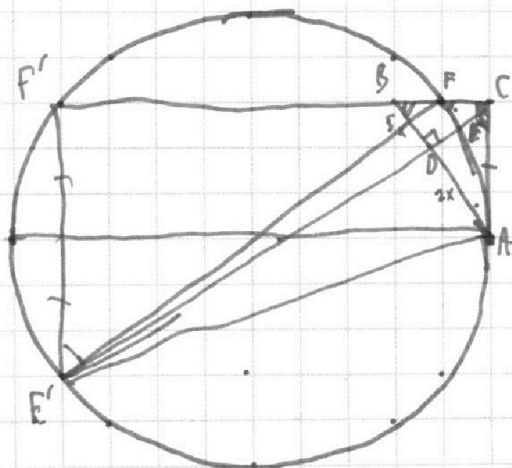
$$CE = x\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$EE = x\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{3x^2}{4\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle ACD} = x^2\sqrt{10}$$

$$\frac{3}{8\sqrt{5}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{24}$$

$$(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$\begin{cases} d_3 + r_3 + 2p_3 \geq 24 \\ d_3 + r_3 \geq 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2^{\alpha} \cdot k \\ b = 2^{\beta} \cdot k \\ c = 2^{\gamma} \cdot k \end{cases} \begin{cases} \alpha + \beta \geq 6 \\ \beta + \gamma \geq 14 \\ \gamma + \alpha \geq 16 \end{cases} \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \beta + \gamma = 14 \\ \gamma + \alpha = 16 \end{cases} \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \beta + \gamma = 14 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \begin{cases} \alpha = 4 \\ \gamma = 12 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 18$$

$$\begin{cases} d_2 + p_2 = 13 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 21 \\ d_2 + r_2 = 25 \end{cases} \begin{cases} d_2 + p_2 = 14 \\ \beta_2 + r_2 = 21 \\ d_2 - p_2 = 4 \end{cases} \begin{cases} d_2 = 9 \\ r_2 = 16 \\ p_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_3 + p_3 = 11 \\ \beta_3 + r_3 = 13 \\ d_3 + r_3 = 28 \end{cases} \begin{cases} d_3 + p_3 = 11 \\ \beta_3 + r_3 = 13 \\ d_3 - p_3 = 15 \end{cases} \begin{cases} d_3 = 13 \\ r_3 - d_3 = 2 \\ \beta_3 + r_3 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= 13 \\ \beta_3 &= 0 \\ r_3 &= 15 \end{aligned} \quad r_2 =$$

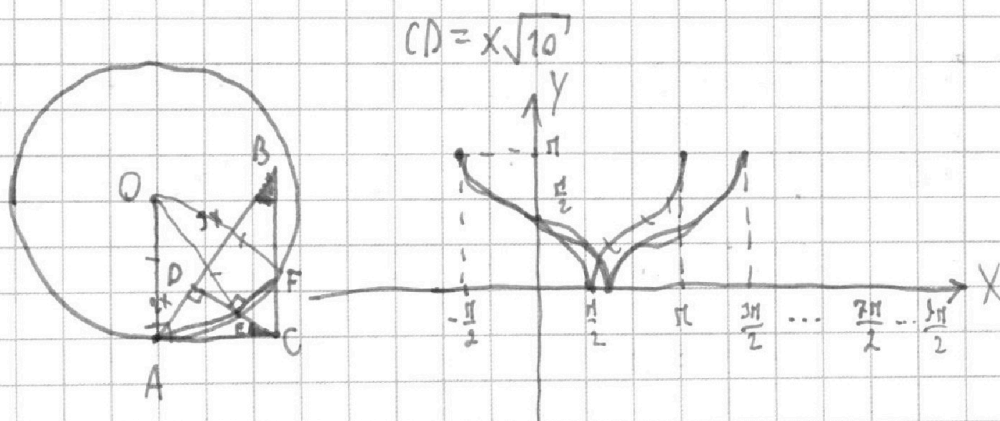
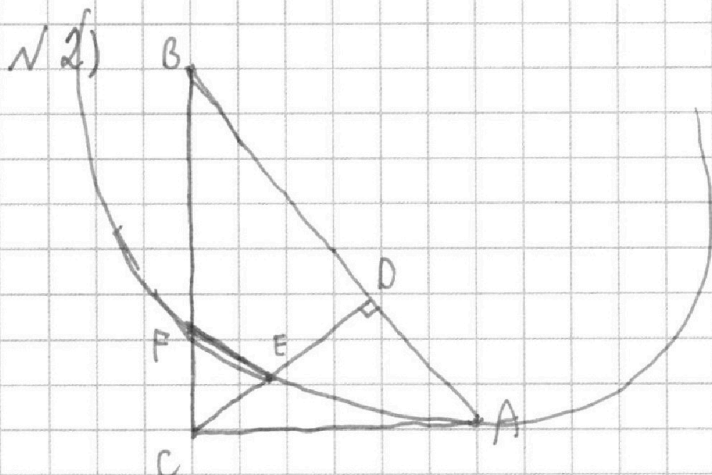
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3) $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$

$-9\pi \leq -2x \leq \pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$

$\frac{\pi}{2} = \arccos$

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$

$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

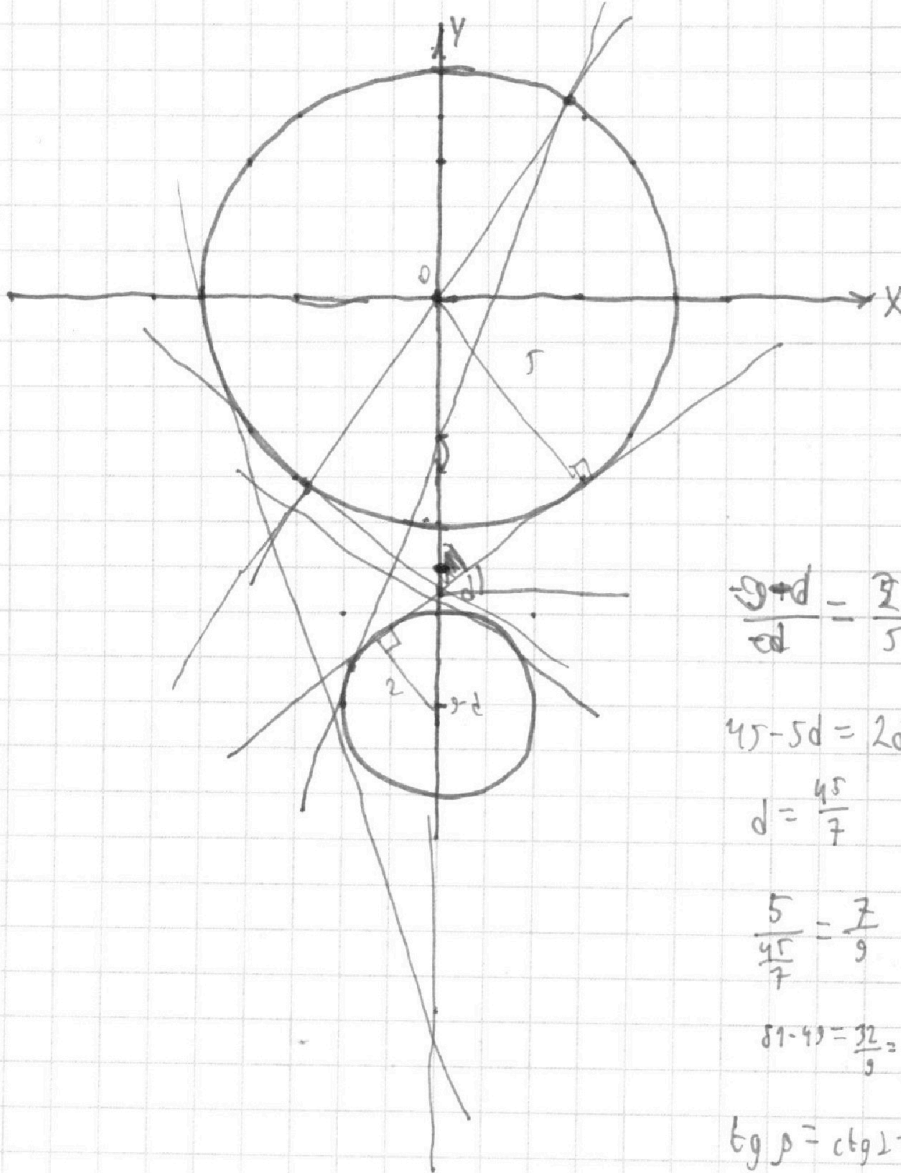
№ 4)

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$

$$y = \frac{b-5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0$$



$$\frac{9+d}{2d} = \frac{5}{2}$$

$$45 - 5d = 2d$$

$$d = \frac{45}{7}$$

$$\frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{9}$$

$$81 - 49 = \frac{32}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 2 = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{11} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125} (y^3 (11^{-4})) - 5 \end{cases}$$

$$\text{огр: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0 \quad | \cdot 3t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$p^4 + \frac{1}{p} = -\frac{13}{3p} - 5$$

$$p^4 + \frac{16p}{3p} + 5 = 0$$

$$3p^5 + 16p + 16 = 0$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = -5 \\ \dots \\ p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$t_i = -p_i$$

$$\log_{11} x_i = -\log_{11} (0,5 y_i)$$

$$x_i = \frac{1}{0,5 y_i}$$

$$x_i \cdot y_i = 2$$

$$\begin{cases} \dots \\ t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 = \frac{16}{3} \end{cases}$$



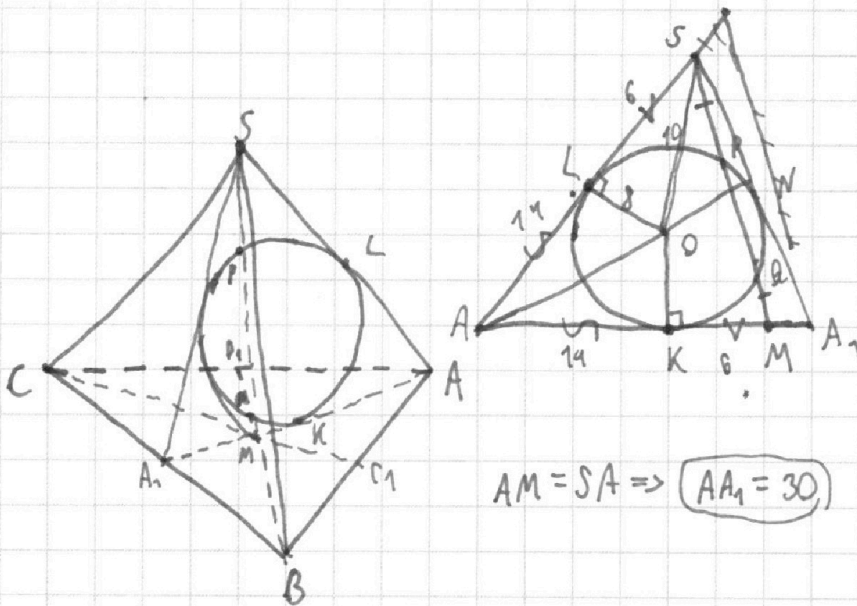
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

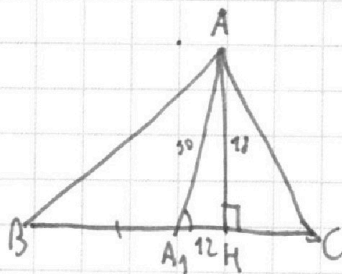
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2} h \cdot B = 180$$

$$h = 18$$



$$180 \sin \alpha = 90$$

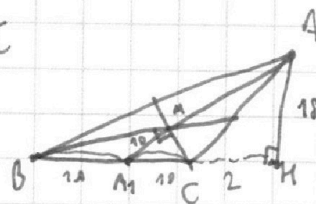
$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} BM \cdot CM = \frac{1}{2} BC \cdot A_1 M \sin \alpha =$$

$$= 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 60$$

$$BM \cdot CM = 120$$

$$OB_1 \cdot OC_1 = 270$$



$$CM = \sqrt{100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{200 - 100} = 2\sqrt{10} \Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{10}$$

$$BM = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \Rightarrow BB_1 = 9\sqrt{10}$$

$$30 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = \boxed{81000}$$



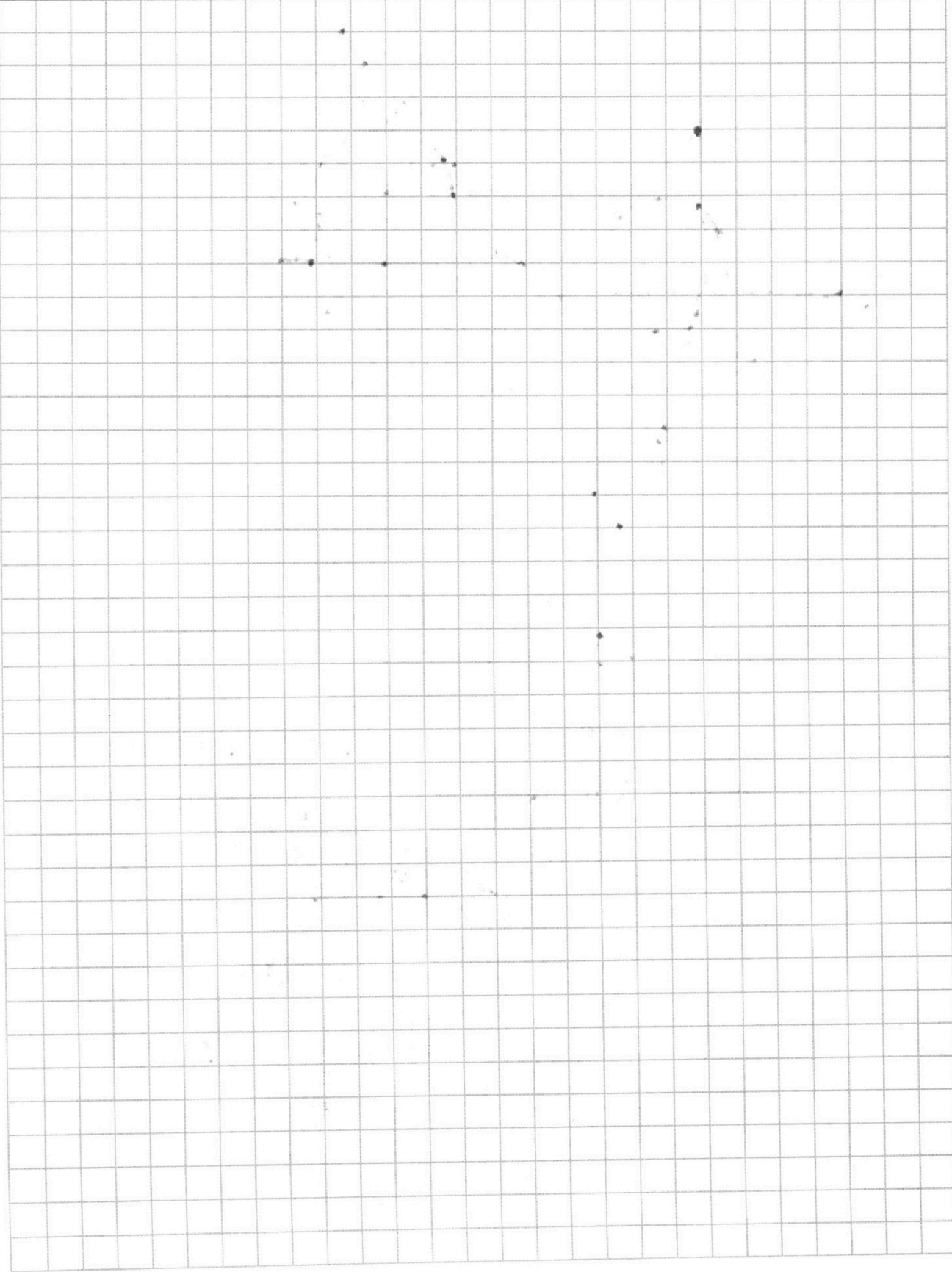
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



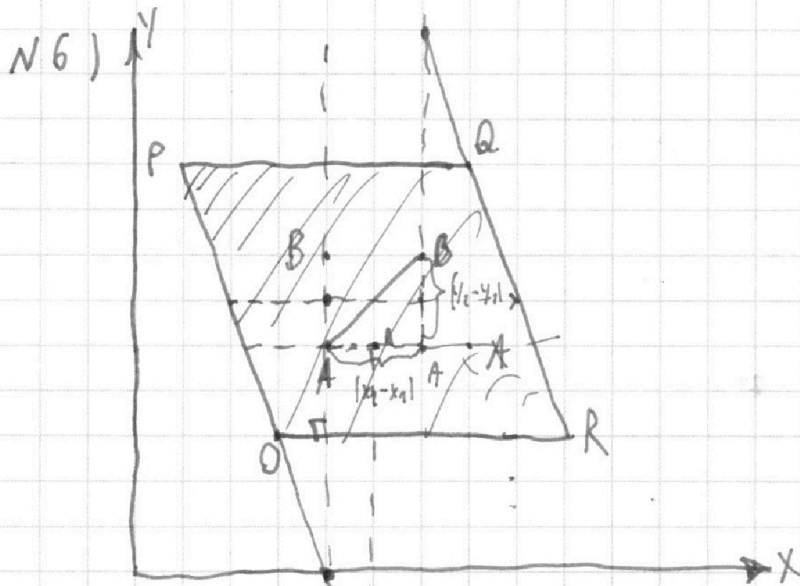
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6x_2 + y_2 = 48 + 6x_1 + y_1$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 99$$

$$6x_2 = -y_2$$

$$y = kx$$

$$6x_2 = -y_1$$

$$y = -6x$$

$$y = -6x + b = -6x + 102$$

$$b = 6 \cdot 17 = 102$$

$$48 + y_2 - y_1 = -6x_2 + 6x_1 = -6(x_2 - x_1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

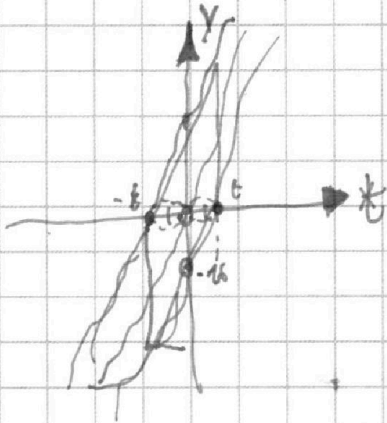
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

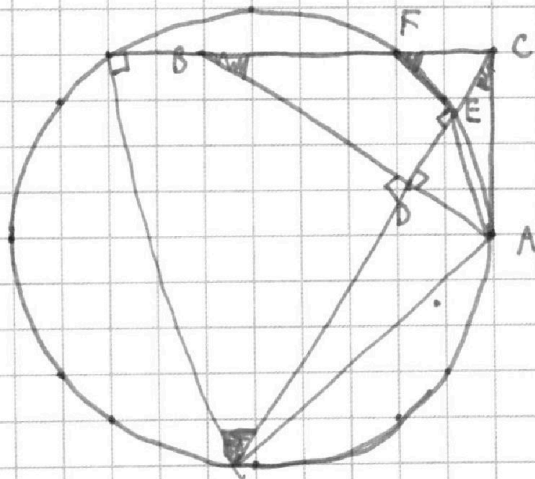
$$f(t) = 15t^4 + 15 = 15(t^4 + 1) > 0$$



№ 2)

$$S_1 = \frac{1}{2} CE \cdot CF$$

$$S_2 = \frac{1}{2} ED \cdot AD$$



$$\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{CF}{AC}$$

~~SA~~
~~AF~~