



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{51 } \min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$a \cdot b : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Если } a = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, \text{ то } c = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^{10}, \text{ то } b = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^3$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{23}$$

$$\text{Если } a : 2^8, \text{ то } b : 2^{11}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{32}$$

$$\text{Если } a : 2^7, \text{ то } b : 2^{12}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{32}$$

$$\text{Если } a : 2^6, \text{ то } b : 2^{13}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{32}$$

2^{22} - min

$$\text{Минимум: } 2^{22}$$

$$\text{Если } a : 3^8, \text{ то } b : 3^2, \text{ то } c : 3^{11} \quad a \cdot b \cdot c : 3^{21}$$

$$a : 3^7,$$

$$2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{23}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

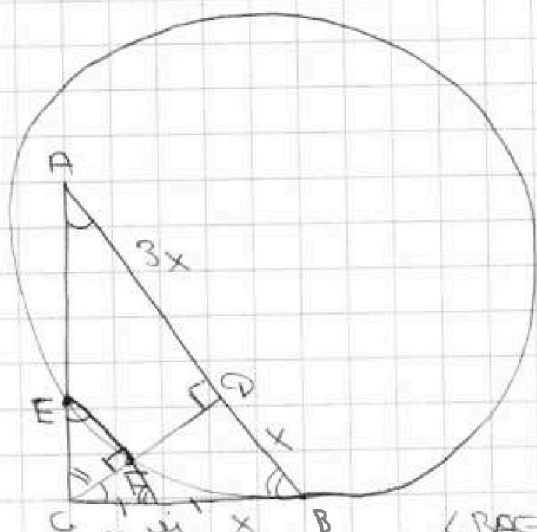
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



52



$$AB \parallel EF \quad \frac{AF}{FB} = \frac{3}{1} = \frac{3x}{x}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

$$CF^2 = AF \cdot FB = 3x \cdot x = 3x^2$$

$$CF = \sqrt{3}x$$

По т. Пиф. в $\triangle CFB$:

$$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

По т. Пиф. в $\triangle ABC$:

$$AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$EF \parallel AB$ пер. BC в т. M $\Rightarrow EM \parallel AB$

~~Сторона~~

$$\sin \angle PCB = \sin \angle MCE = \frac{EM}{CM} = \frac{CM}{EM} \Rightarrow CM^2 = EM \cdot EM$$

$$BM^2 = EM \cdot FM \text{ (кас. и сек.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC = 90^\circ - \angle ABC \\ \angle PCB = 90^\circ - \angle ABC \end{array} \right\} \angle BAC = \angle PCB \Rightarrow \angle PCB = \angle MCE$$

$$\angle BAC = \angle MCE \text{ (кас. и сек.)}$$

$$\Rightarrow CM^2 = EM \cdot EM \Rightarrow BM^2 = CM^2$$

$$BM = CM$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{MB}{CM} = 1 \text{ (кас.)} \Rightarrow AE = CE = \frac{AC}{2} = \sqrt{3}x$$

$$= \frac{BC}{2} = x$$

$$\frac{CF}{FP} = \frac{CM}{MB} = 1 \text{ (кас.)} \Rightarrow CF = FP = \frac{1}{2} = \frac{CF}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAF \text{ (по 2 угл.) } k = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AF = \frac{3}{2}x$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{2\sqrt{3}x^2 \cdot \frac{3}{8}}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{8}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Σ3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\sin(5 \arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \sin^5(\arcsin(\cos x)) - 14 \sin^3(\arcsin(\cos x)) - \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \cos^5 x - 14 \cos^3 x - \cos x = \cos x$$

$$8 \cos^5 x - 7 \cos^3 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1)(8 \cos^2 x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая ограничение, $x = \pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$

Ответ: $\pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

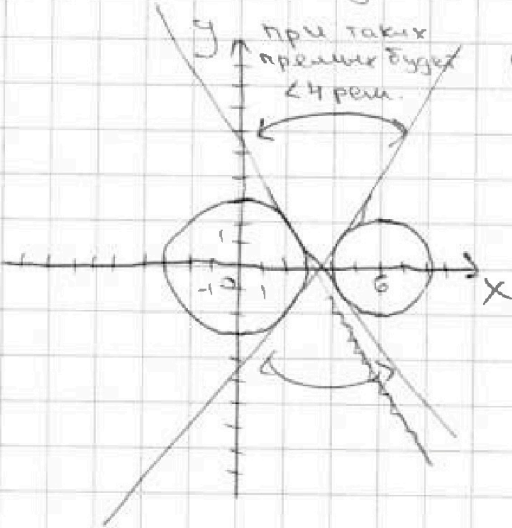
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \\ x^2+y^2=3^2 \quad (x-6)^2+y^2=2^2 \end{cases}$$



Нужно найти общие касан-
ия окружностей между собой
при всех будет 4 реш.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta 5$ ОДЗ: $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq \frac{1}{5}$
 $\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$ $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}(3^8) - 8$
 $B = \log_{x^2} 243 - \log_3^4 x - 6 \log_3 x$ $B = \log_{5^5} (3^8) - \log_3^4(5y) - 2 \log_{5y} 3$

$\frac{1}{2} \log_3^4 x + \frac{6}{2} \log_3 x - \frac{5}{2} \log_3^4 x + 8 = 0$ $\log_3^4 x + \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2 \log_3(5y)} \log_3(5y)$
 $\log_3^5 x + 8 \log_3 x + 3,5 = 0$ $\log_3^5(5y) + 8 \log_3(5y) - 3,5 = 0 + 8 = 0$
 $\log_3^5 x + \log_3^5(5y) + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0$
 $\log_3(5xy)(\log_3^4 x - \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y) + 8 \log_3(5xy) = 0$
 $\log_3(5xy)(\dots + 8) = 0$

$5xy = 1$
 $xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

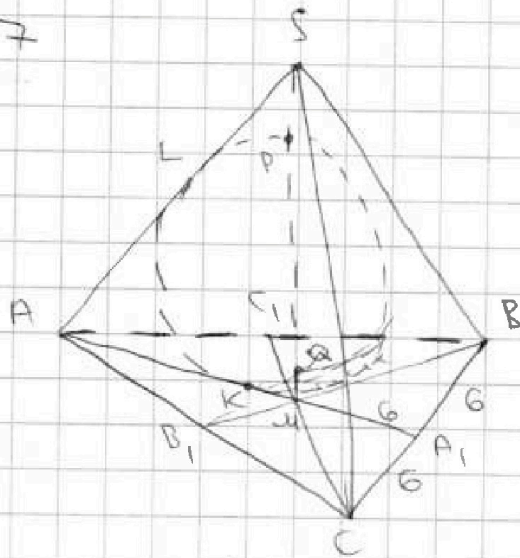
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

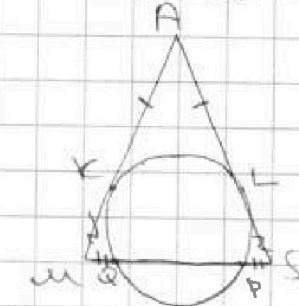
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

57



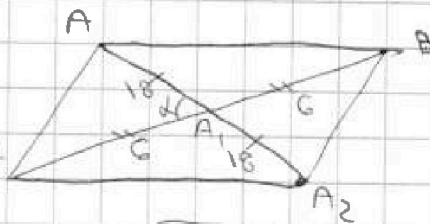
$$SP = MQ \quad S_{\text{плоск}} = 90 \quad SA = BC = 12$$



$$\begin{cases} MK^2 = MQ \cdot MP \\ SL^2 = SP \cdot SQ \\ MQ = SP \end{cases} \Rightarrow MK = SL$$

$$\left. \begin{array}{l} AK = AL \text{ (касаясь)} \\ MK = SL \end{array} \right\} \Rightarrow AA_1 = AS = 12 = BC \Rightarrow MA_1 = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$$

Угловые мерочки AA_1 :



$$S_{ABAC} = 2S_{ABC} = 180 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{180 \cdot 2}{18 \cdot 12 \cdot 2} = \frac{180}{36} = \frac{5}{6}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{Т. кос гна } A_1MC: MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 72 - 12\sqrt{11} = 4(18 - 3\sqrt{11})$$

$$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \quad \cos \angle AA_1B = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow \text{но т. кос гна } A_1BM: BM = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 162 \cdot \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = \boxed{2430}$$

ответ: 2430

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



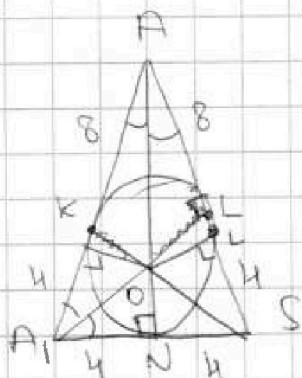
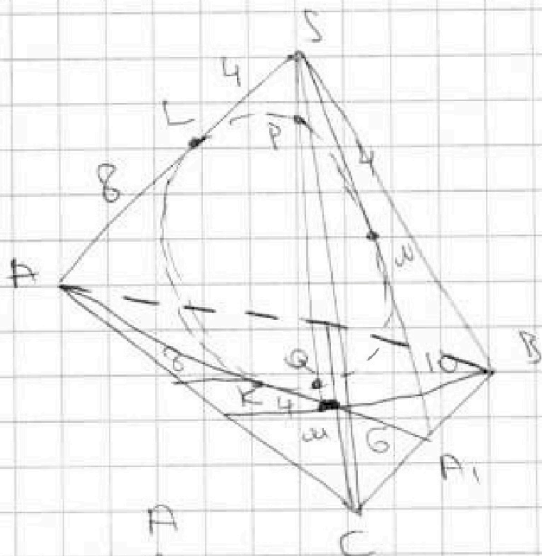
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 MC^2 &= 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = 72 - 12\sqrt{11} = 12(6 - \sqrt{11}) \\
 MC &= 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad 4(18 - 3\sqrt{11}) \\
 MB &= 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}} \\
 AA_1 &= 18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 &= 162 \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 \\
 &= 2430
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 18 \\
 9 \\
 \hline
 162 \\
 324 \\
 99 \\
 \hline
 2965 \\
 22 \\
 \hline
 225
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 102 \\
 15 \\
 \hline
 810 \\
 162 \\
 \hline
 2430
 \end{array}$$



$$AN = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}
 x^2 + y^2 - 9 = ax + 2y - 36 \\
 x^2 + y^2 - 12x + 32 = ax + 2y - 36
 \end{cases}$$

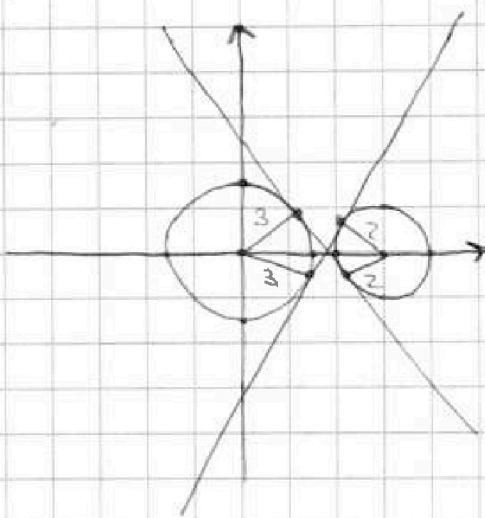
$$\begin{aligned}
 8x - 12x - 41 &= 0 \\
 x &= \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$a^8 \quad c^{11} \quad b^3$$

$$a^7 \quad c^{12} \quad b^{33}$$

$$a^6 \quad c^{13} \quad b^{34}$$

$$a^5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^5(5y) + \log_3^5(x) + 8(\log_3(5y) + \log_3(x)) = 0$$

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

Handwritten algebraic manipulations showing the expansion and simplification of the difference of fifth powers. The process involves dividing the polynomial $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$ by $x+y$ to find the factors $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ and $x^2 + y^2 - xy$.

$$\frac{(\log_3(5y) + \log_3(x))(\log_3^4(x) + \log_3^3x \log_3^2 5y + \log_3^2x \log_3^2 5y - \log_3x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y)}{(\log_3^2x + \log_3^2 5y)(\log_3 5xy)(\log_3 \frac{5x}{35y})}$$

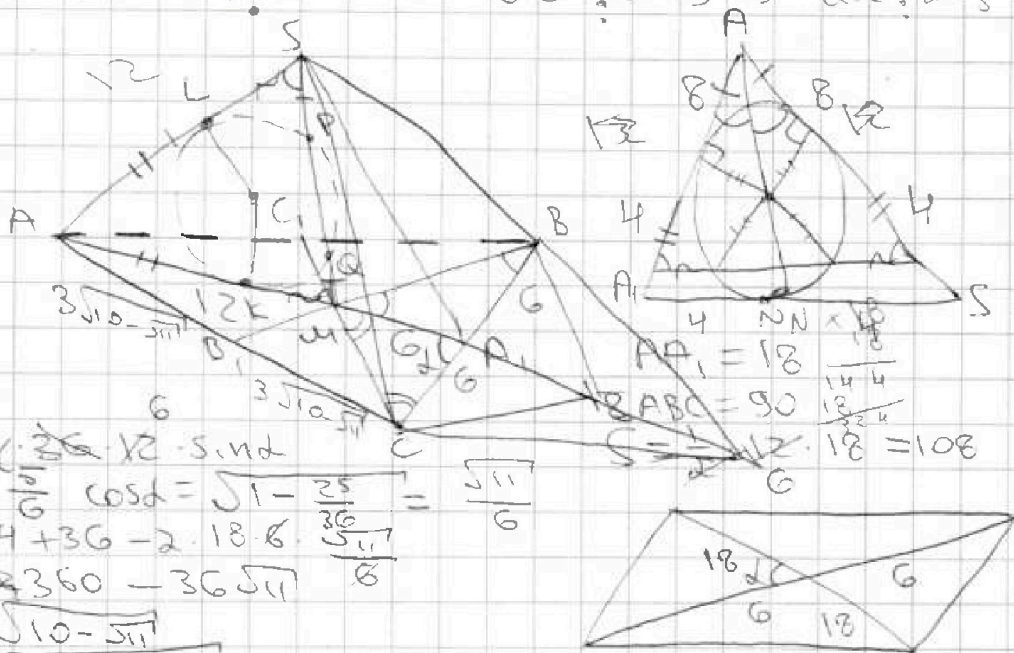
$$\log_3(5yx)(8 + \dots) \log_3x \cdot \log_3 5y (\log_3^2x) - \log_3^2 5y + \log_3x \log_3 5y$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \log_{2413} = \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 - \log_{35y^2} (3^2)$$

$$(\log_3^2 x + \log_3^2 5y)(\log_3 5xy)(\log_3 \frac{5x}{35y})$$

$$a \cdot b \cdot c = ? \quad a, b, c = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad b, c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad a, c = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$



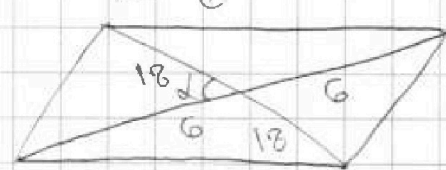
$$180 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \sin d$$

$$\sin d = \frac{1}{6} \quad \cos d = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$AC^2 = 324 + 36 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$AC = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

$$AB = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

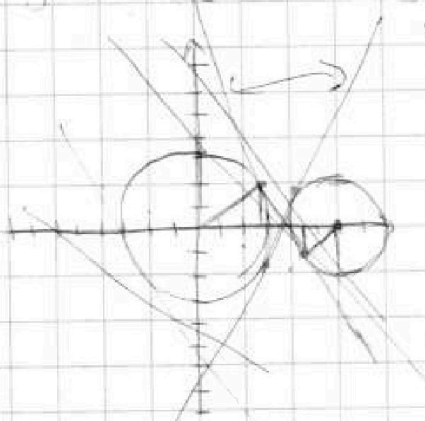
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4)
$$\begin{cases} ax + 2y - 38 = 0 & y = -\frac{a}{2}x + \frac{37}{2}8 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (x - 6)^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$



при $a = 0$

$$\begin{aligned} -2 < \frac{3}{2}8 < 2 \\ -4 < 38 < 4 \\ -\frac{4}{3} < 8 < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 9 &= x^2 + y^2 - 12x + 32 = ax + 17y - 38 \\ 12x &= 41 \\ x &= \frac{41}{12} \end{aligned}$$

5) $\log_{1/3} x + 6 \log_{1/3} 3 = \log_{1/3} 243 - 8$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$

$$\log_{1/3} x + \frac{6}{\log_3 3} = \frac{\log_3 243}{\log_3 1/3} - 8$$

$$\log_{1/3} x + \frac{6}{1} = \frac{5}{-1} - 8$$

$$\log_{1/3} x + 6 = -2 - 8$$

$$\log_{1/3} x + 6 = -10$$

$$\log_{1/3} x = -16$$

$$x = 3^{16}$$

$\log_{1/3} (5y) + 2 \log_{1/3} 3 = \log_{1/3} (3^{11}) - 8$

$$\log_{1/3} (5y) + \frac{2}{\log_3 3} = \frac{\log_3 (3^{11})}{\log_3 1/3} - 8$$

$$\log_{1/3} (5y) + 2 = \frac{11}{-1} - 8$$

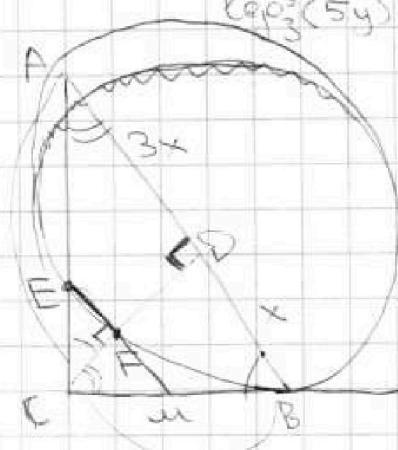
$$\log_{1/3} (5y) + 2 = -11 - 8$$

$$\log_{1/3} (5y) + 2 = -19$$

$$\log_{1/3} (5y) = -21$$

$$5y = 3^{21}$$

$$y = \frac{3^{21}}{5}$$



$AB \parallel EF, \frac{AE}{EB} = \frac{3}{1}, CE^2 = 3x^2, CE = \sqrt{3}x$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{BCE}} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{3}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$$

$MB^2 = EM \cdot FM$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3\sin \alpha \sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$5\sin(3\alpha + 2\alpha) = 5(\sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha) = (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^3 \alpha$$

$$3\sin \alpha - 6\sin^3 \alpha - 4\sin^5 \alpha + 8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$$

$$2\sin \alpha \cos^4 \alpha + 6\sin \alpha \cos^2 \alpha = 8\sin \alpha (\sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha + 1) - 6\sin \alpha$$

$$2\cos^2 \alpha (4\sin \alpha \cos^2 \alpha - 6\sin \alpha) = (2 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - 6\sin \alpha) =$$

$$= (2 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha - 6\sin \alpha) = (2 - 2\sin^2 \alpha)(-4\sin^3 \alpha - 2\sin \alpha) =$$

$$= -8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha + 8\sin^5 \alpha + 4\sin^3 \alpha = 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha$$

$$8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha = 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha = 16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - 5\sin \alpha$$

$$\sin(5\alpha) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - 5\sin \alpha = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \quad 16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - \cos \alpha = 0$$

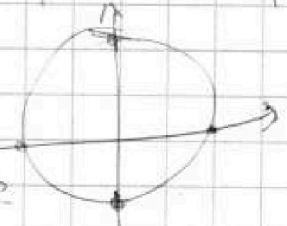
$$\cos \alpha (8\cos^4 \alpha + 7\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

$$\cos \alpha (\cos \alpha - 1)(8\cos^2 \alpha + 8\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1) = 0$$

$$\cos \alpha (\cos \alpha - 1)(\cos^2 \alpha + 1)(8\cos^2 \alpha + 1) = 0$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \cos \alpha = 1 \quad \cos \alpha = -1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\frac{8t^4 + 7t^2 - 1}{8t^4 + 8t^2} \cdot \frac{t-1}{8t^3 + 8t^2}$$

$$\frac{8t^4 + 7t^2 - 1}{8t^4 + 8t^2} = \frac{8t^4 + 8t^2 - t^2 - 1}{8t^4 + 8t^2} = \frac{(8t^4 - 1) - (t^2 + 1)}{8t^4 + 8t^2}$$

$$\frac{(2t^2 - 1)(2t^2 + 1) - (t^2 + 1)}{8t^4 + 8t^2} = \frac{2t^4 + 2t^2 - t^2 - 1 - t^2 - 1}{8t^4 + 8t^2} = \frac{2t^4 - 2}{8t^4 + 8t^2} = \frac{t^4 - 1}{4t^4 + 4t^2} = \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{4t^2(t^2 + 1)} = \frac{t^2 - 1}{4t^2}$$

$$\frac{t^2 - 1}{4t^2} = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$$

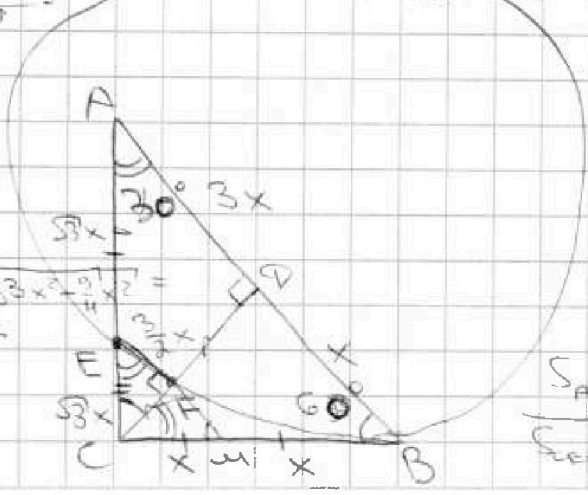
$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

Ответ: $x = -3\pi, \frac{5\pi}{2}, -2\pi, -\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, \dots$

3



$$CF = \sqrt{3x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$AP = 3x \quad PB = x \quad CP = \sqrt{3}x$$

$$CB = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$$

$$CA = \sqrt{3x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{3}x} = \frac{1}{2} = \frac{FM}{EM} = \frac{CF}{EM} = \frac{CF}{EM}$$

$$\cos^2 \alpha = FM \cdot EM$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2 = BM \cdot EM$$

$$= 2\sqrt{3}x^2 \quad \cos^2 \alpha = BM \cdot EM$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{2}{2}x = \frac{\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{\sqrt{3}x^2}{8}} = 16$$

16