МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $\min(a\cdot b\cdot c)=?$

$a\cdot b \vdots 2^9\, 3^{10}\, 5^{10}$ $\quad b\cdot c \vdots 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}$ $\quad a\cdot c \vdots 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

~~Если $a=2^9\,3^{10}\,5^{10}$, то $c=2^{10}\,3^{8}\,5^{20}$, то $b=2^4\,3^5\,5^0$~~

$\boxed{\cancel{a\cdot b\cdot c=2^{23}\cdot 3^{23}\cdot 5^{30}}}$

$a \vdots 2^8$, то $b \vdots 2$, то $c \vdots 2^{13}$ $\Rightarrow a\cdot b\cdot c \vdots 2^{22}$

Если $a \vdots 2^7$, то $b \vdots 2^2$, то $c \vdots 2^{12}$ $\Rightarrow a\cdot b\cdot c \vdots 2^{22}$

$\vdots$

~~$a \vdots 2^6$, то $b \vdots 2^4$, то $c \vdots 2^{13}$ $\Rightarrow a\cdot b\cdot c \vdots 2^{23}$~~

$a \vdots 2^9$,

2^{22} – min

Минимум: $2^{22}\cdot$

Если $a \vdots 3^8$, то $b \vdots 3^2$, то $c \vdots 3^{11}$ $\quad a\cdot b\cdot c \vdots 3^{21}$

$a \vdots 3^7$,

$2^{22}\cdot 3^{21}\cdot 5^{\cancel{30}\,26}$

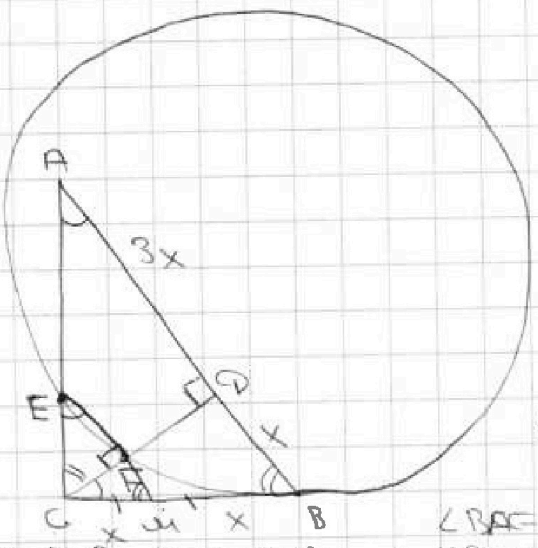
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



$AB \parallel EF$ $\quad \frac{AФ}{ФB} = \frac{3}{1} = \frac{3x}{x}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

$CФ^2 = AФ \cdot ФB = 3x \cdot x = 3x^2$

$CФ = \sqrt{3}x$

По т. Пиф. в $\Delta CФB$:

$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

По т. Пиф в ΔABC:

$AC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$

$\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = 90^\circ - \angle ABC \\ \angle ФCB = 90^\circ - \angle ABC\end{array}\right\} \angle BAC = \angle ФCB$

$\angle BAC = \angle MEC$ (соотв) $\Rightarrow \angle ФCB = \angle MEC$

EF перес. BC в т. M $\Rightarrow EM \parallel AB$

$\sin\angle ФCB = \sin\angle MEC = \frac{FM}{CM} = \frac{CM}{EM} \Rightarrow CM^2 = FM \cdot EM$

$BM^2 = EM \cdot FM$ (кас. и сек.)

$\Rightarrow BM^2 = CM^2 \Rightarrow BM = CM = \frac{BC}{2} = x$

$\frac{AE}{CE} = \frac{MB}{CM} = \frac{1}{1}$ (Фалес) $\Rightarrow AE = CE = \frac{AC}{2} = \sqrt{3}x$

$\frac{CF}{FФ} = \frac{CM}{MB} = \frac{1}{1}$ (Фалес) $\Rightarrow CF = FФ = \frac{1}{1} = \frac{CФ}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$

$\Delta CEF \sim \Delta CAФ$ (по 2 углам) $k = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AФ = \frac{3}{2}x$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2x = 2\sqrt{3}x^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2 \cdot 8}{3\sqrt{3}x^2} = \frac{16}{3}$

Ответ: $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin(\cos x) \le \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \quad -\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$

$-3\pi \le x \le 3\pi$

$\sin(5\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$16\sin^5(\arcsin(\cos x)) - 14\sin^3(\arcsin(\cos x)) - \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$16\cos^5 x - 14\cos^3 x - \cos x = \cos x$

$8\cos^5 x - 7\cos^3 x - \cos x = 0$

$\cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1)(8\cos^2 x + 1) = 0$

$\varnothing$

$\cos x = 0$ $\quad$ $\cos x = 1$ $\quad$ $\cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Учитывая ограничение, $x = \pm 3\pi, \pm\frac{5\pi}{2}; \pm 2\pi; \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}; 0$

Ответ: $\pm 3\pi; \pm\frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}; 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

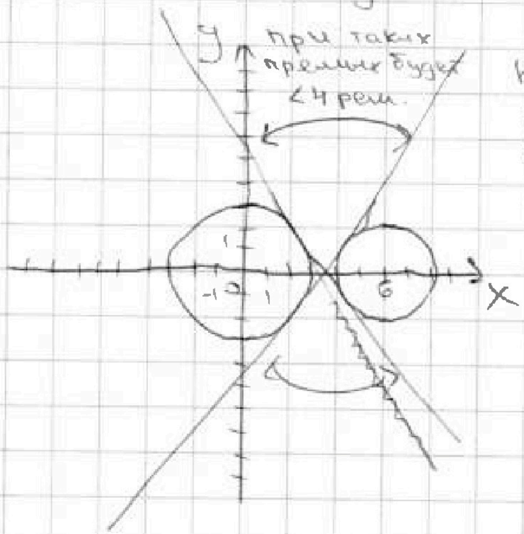
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Б4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$x^2+y^2=3^2 \qquad (x-6)^2+y^2=2^2$



Нужно найти общие касат-
ы и прямых между ними
при всех будет <4 реш.

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 ОДЗ: $x>0,\ y>0,\ x\neq 1$ ~~[illegible]~~ $y\neq\frac{1}{5}$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ $\qquad$ $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$8 = \log_{x^2} 243 - \log_3^4 x - 6\log_x 3$ $\qquad$ $8 = \log_{25y^2}(3^{11}) - \log_3^4(5y) - 2\log_{5y} 3$

$\cancel{\frac{5}{2\log_3 x} - \log_3^4 x - \frac{6}{\log_3 x}}$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2\log_3 x} + 8 = 0 \,\Big|\, \cdot\log_3 x$ $\qquad$ $\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2\log_3(5y)} \,\Big|\, \cdot\log_3(5y)$

$\log_3^5 x + 8\log_3 x + 3{,}5 = 0$ $\qquad$ $\log_3^5(5y) + 8\log_3(5y) - 3{,}5 = 0$ $+8=0$

~~$\log_3^5 x$~~ $\qquad$ $\log_3^5 x + \log_3^5(5y) + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0$

$\log_3(5xy)(\log_3^4 x - \log_3^3 x\log_3 5y + \log_3^2 x\log_3^2 5y - \log_3 x\log_3^3 5y + \log_3^4 5y) + 8\log_3(5xy) = 0$

$\log_3(5xy)(\ \ldots\ldots\ + 8) = 0$

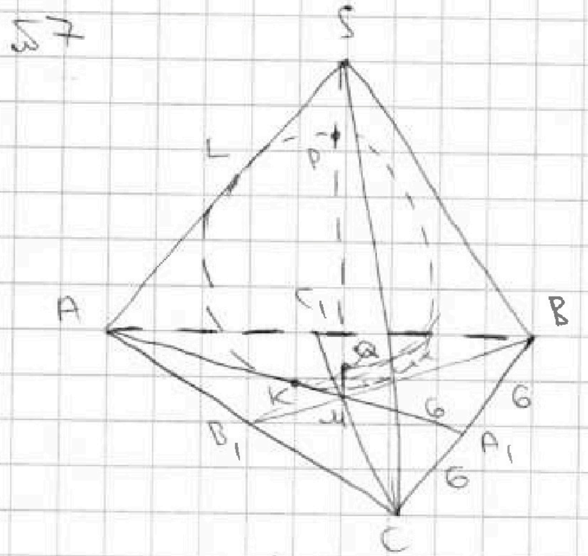
$5xy = 1$

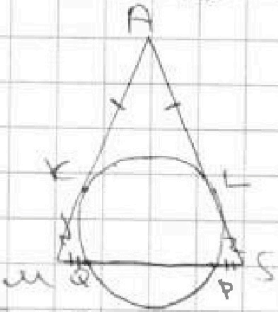
$\boxed{xy = \frac{1}{5}}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

№7

$SP = MQ \quad S_{ABC} = 90 \quad SA = BC = 12$

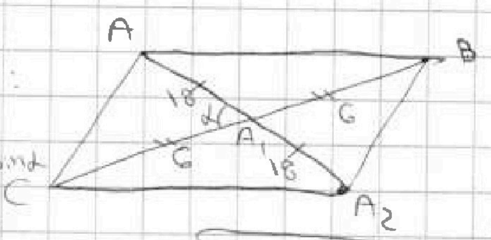




$$\begin{cases} MK^2 = MQ \cdot MP \\ SL^2 = SP \cdot SQ \\ MQ = SP \end{cases} \Rightarrow MK = SL$$

$$\left.\begin{aligned} AK &= AL \text{ (касат)} \\ MK &= SL \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM = AS = 12 = BC \Rightarrow MA_1 = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$$

Удвоение медианы AA_1:



$S_{ABA_2C} = 2S_{ABC} = 180 = \frac{1}{2} AA_2 \cdot BC \cdot \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{180 \cdot 2}{36 \cdot 12} = \frac{5}{6} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

Т. cos для A_1MC: $MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 72 - 12\sqrt{11} = 4(18 - 3\sqrt{11})$

$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \qquad \cos\angle AA_1B = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \qquad \Rightarrow$ по т cos для ABM: $BM = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 162 \cdot \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = \boxed{2430}$

Ответ: 2430

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$MC^2 = 36+36-2\cdot6\cdot6\cdot\frac{\sqrt{11}}{6} = 72-12\sqrt{11} = 12(6-\sqrt{11})$

$MC = 2\sqrt{18-3\sqrt{11}}$ $\quad CC_1 = 3\sqrt{18-3\sqrt{11}}$ $\quad 4(18-3\sqrt{11})$

$MB = 2\sqrt{18+3\sqrt{11}}$ $\quad BB_1 = 3\sqrt{18+3\sqrt{11}}$

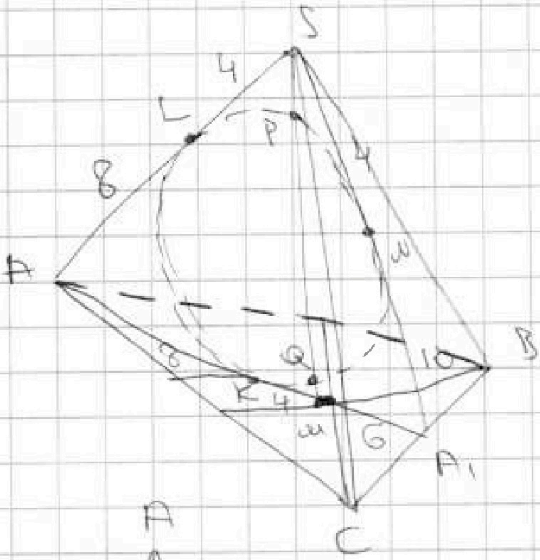
$AA_1 = 18$

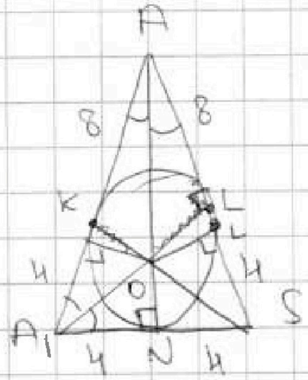
$AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 162\sqrt{324-99} = 162\cdot15 = \boxed{2430}$

7,9

$\times\begin{array}{r}18\\9\\\hline162\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}324\\99\\\hline225\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}15\\15\\\hline75\\15\\\hline225\end{array}$

$\times\begin{array}{r}162\\15\\\hline810\\162\\\hline2430\end{array}$





$AN = \sqrt{144-16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\begin{cases} x^2+y^2-9 = ax+2y-3b \\ x^2+y^2-12x+32 = ax+2y-3b \end{cases}$

$12x-41=0$

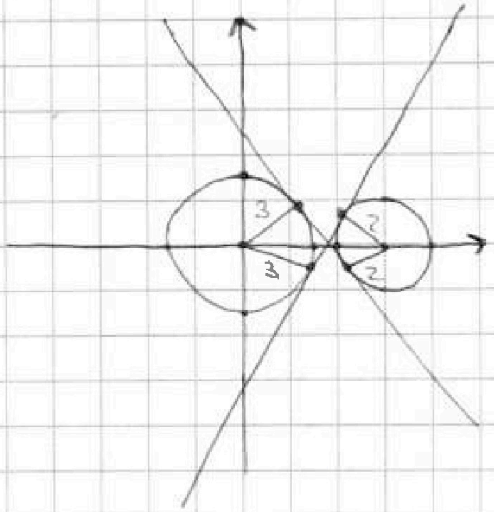
$x = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}$

$a^8 \quad c^{11} \quad b^3$

$a^7 \quad c^{12} \quad b^{33}$

$a^6 \quad c^{13} \quad b^{34}$

a^5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^5(5y) + \log_3^5(x) + 8(\log_3(5y) + \log_3(x)) = 0$

$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - y^3x + y^4)$

$y^3x^2 - x^4y$

$(-x^3y^2 - x^4y)$

$x^3y^2 + y^3x^2$

$x^3y^2 + x^2y^3$

$x^4 + y^4$ | $x+y$

$x^4 + x^3y$ | $-x^3y + x^2y^2 + \dots$

$y^4 - x^3y$

$y^4 + y^3x$

$(-x^3y - y^3x)$

$y^3x^2 - y^3x$

$2x^2y^2$

$x^5 + y^5$ | $x+y$

$x^5 + x^4y$ | $x^3 + y^3 - x^2y$

$y^5 - x^4y$

$y^5 + y^4x$

$(-y^4x - x^4y)$

$-y^3x$

$(-y^4x - y^3x^2)$

$y^3x^2 - x^4y$

$x+y$

$x^4 + y^4 + \dots$

$-y^3x$

$(\log_3(5y) + \log_3(x))(\log_3^4(x) - \log_3^3 x\log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y)$

$(t+5)$

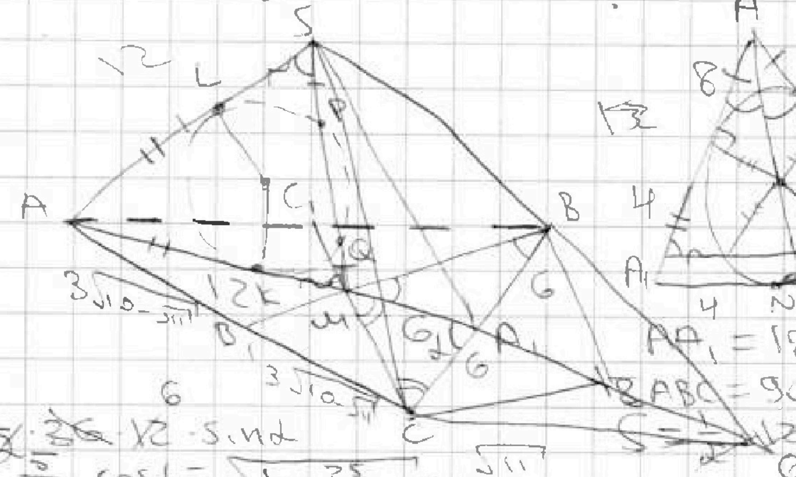
$\log_3(5yx)(8 + \dots)$ $\quad \log_3 x \cdot \log_3 5y(\log_3^2 x - \log_3^2 5y + \log_3 x \log_3 5y)$

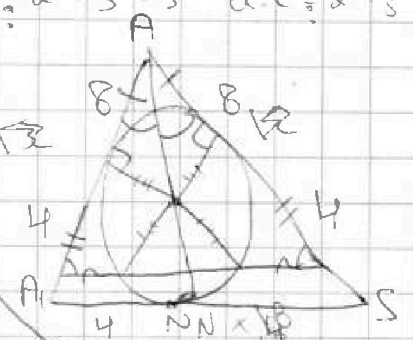
$xy = \frac{1}{5}$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 - \log_{x^2} 243 = \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 - \log_{25y^2}(3^{11})$

$(\log_3^2 x + \log_3^2 5y)(\log_3 5xy)(\log_3 \frac{x}{5y})$

$a \cdot b \cdot c = ?$ $\quad a \cdot b = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $\quad b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ $\quad a \cdot c = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$





$AA_1 = 18$

$ABC = 90$

$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 18 = 108$

$180 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\alpha$

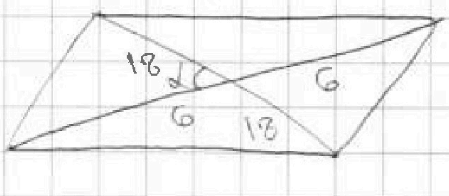
$\sin\alpha = \frac{5}{6}$ $\quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$AC^2 = 324 + 36 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$

$AC^2 = 360 - 36\sqrt{11}$

$AC = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$

$AB = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

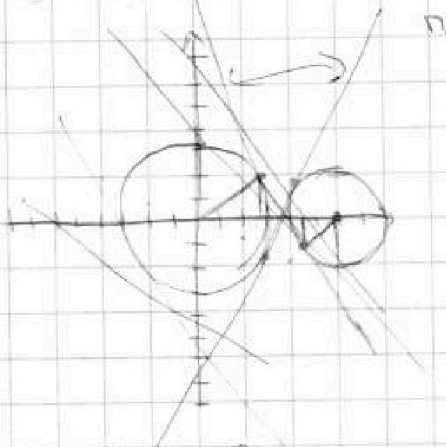
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4) $\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$ $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b$

$x^2+y^2=3^2$ $(x-6)^2+y^2=2^2$



при $a=0$ $-2<\frac{3}{2}b<2$

$-4<3b<4$

$-\frac{4}{3}<b<\frac{4}{3}$

$x^2+y^2-9=x^2+y^2-12x+32=ax+2y-3b$

$12x=41$

$x=\frac{41}{12}$

5) $\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8$

ОДЗ: $x>0$ $x\neq1$ $y>0$ $y\neq1$

$\log_3^4 x+\frac{6}{\log_3 x}=\frac{5}{2\log_3 x}-8$

$\log_3 x=t$

$t^4+\frac{6}{t}=\frac{5}{2t}-8$

$t^5+8t+6-\frac{5}{2}=0$

$t^5+8t+3{,}5=0$

$2t^5+16t+7=0$

$7=-2t^5-16t$

$\log_3^4(5y)+2\log_{5y}3=\log_{25y^2}(3^{11})-8$

$\log_3^4(5y)+\frac{2}{\log_3(5y)}=\frac{11}{2\log_3(5y)}-8$

$\log_3(5y)=s$

$s^4+\frac{2}{s}=\frac{11}{2s}-8$

$s^5+8s+2-\frac{11}{2}=0$

$s^5+8s-3{,}5=0$

$2s^5+16s-7=0$

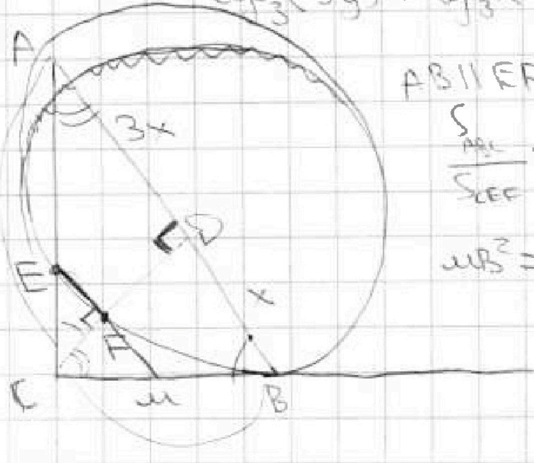
$7=2s^5+16s$

$-2t^5-16t=2s^5+16s$

$-2\log_3^5 x-16\log_3 x=2\log_3^5(5y)+16\log_3(5y)$

$\log_3^5(5y)+\log_3^5 x+8(\log_3 x+\log_3(5y))=0$

$8\log_3(5xy)=0$



$AB\parallel EF$, $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{1}$ $CD^2=3x^2$ $CD=\sqrt{3}x$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}=?$ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot4x\cdot\sqrt{3}x=2\sqrt{3}x^2$

$S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot3x\cdot\sqrt{3}x=\frac{3\sqrt{3}x}{2}$

$MB^2=EM\cdot FM$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$ $(1-\sin^2\alpha)$

$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\sin(3\alpha+2\alpha) = \sin 3\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 3\alpha = (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$3\sin\alpha - 6\sin^3\alpha - 4\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha = 8\sin^5\alpha - 10\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$

$2\sin\alpha\cos^4\alpha + 6\sin\alpha\cos^2\alpha = 8\sin\alpha(\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1) - 6\sin($

$2\cos^2\alpha(4\sin\alpha\cos^2\alpha - 6\sin\alpha) = (2-2\sin^2\alpha)(4\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - 6\sin\alpha) =$

$= (2-2\sin^2\alpha)(4\sin\alpha - 4\sin^3\alpha - 6\sin\alpha) = (2-2\sin^2\alpha)(-4\sin^3\alpha - 2\sin\alpha) =$

$= -8\sin^3\alpha - 4\sin\alpha + 8\sin^5\alpha + 4\sin^3\alpha = 8\sin^5\alpha - 4\sin^3\alpha - 4\sin\alpha$

$8\sin^5\alpha - 10\sin^3\alpha + 3\sin\alpha + 8\sin^5\alpha - 4\sin^3\alpha - 4\sin\alpha = 16\sin^5\alpha - 14\sin^3\alpha - \sin\alpha$

$\sin(5\alpha) = \sin(x+\frac{\pi}{2})$

$16\sin^5\alpha - 14\sin^3\alpha - \sin\alpha = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ $\quad 16\cos^5\alpha - 14\cos^3\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha$

$16\cos^5\alpha - 14\cos^3\alpha - 2\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha(8\cos^4\alpha + 7\cos^2\alpha - 1) = 0$

$\cos\alpha(\cos\alpha - 1)(8\cos^3\alpha + 8\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1) = 0$

$\cos\alpha(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)(8\cos^2\alpha + 1) = 0$

$8t^4 + 7t^2 - 1 \;|\; t-1$

$8t^4 - 8t^3 \quad | \; 8t^3 + 8t^2 + t + 1$

$8t^3 - t^2$

$8t^3 - 8t^2$

$t^2 - 1$

$t^2 - t$

$t - 1$

$t - 1$

0

$8t^3 + 8t^2 + t + 1 \;|\; t+1$

$8t^3 + 8t^2 \quad | \; 8t^2 + 1$

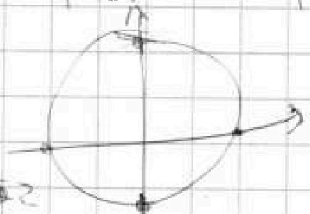
$0 + t + 1$

$t + 1$

0

$\cos\alpha = 0 \quad \cos\alpha = 1 \quad \cos\alpha = -1$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z \quad \alpha = 2\pi n, n\in Z \quad \alpha = \pi + 2\pi n, n\in Z$



$\frac{5\pi}{2}$ $\ge$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$

$\ge -\frac{5\pi}{2}$

$-3\pi \le x \le 3\pi$

Ответ: $x = -3\pi, -\frac{5\pi}{2}, -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \ldots$

3

$AQ = 3x \quad QB = x \quad CQ = \sqrt{3}x$

$CB = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$

$CA = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{3}x} = \frac{1}{2} = \frac{FM}{CM} = \frac{CF}{CE} = \frac{CM}{EM}$

$CM^2 = FM \cdot EM$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$ $\quad BM^2 = FM \cdot EM$

$CM^2 = BM^2$

$CM = BM$

$S_{CEF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}x}{2}\cdot\frac{3}{2}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2 \cdot 8}{3\sqrt{3}x^2} = \boxed{\frac{16}{3}}$

2

$CF = \sqrt{3x^2 + \frac{9}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$